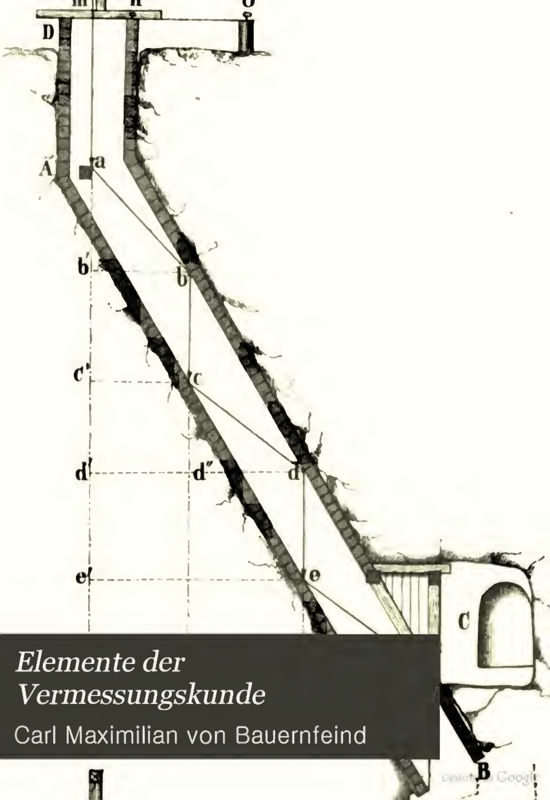
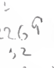


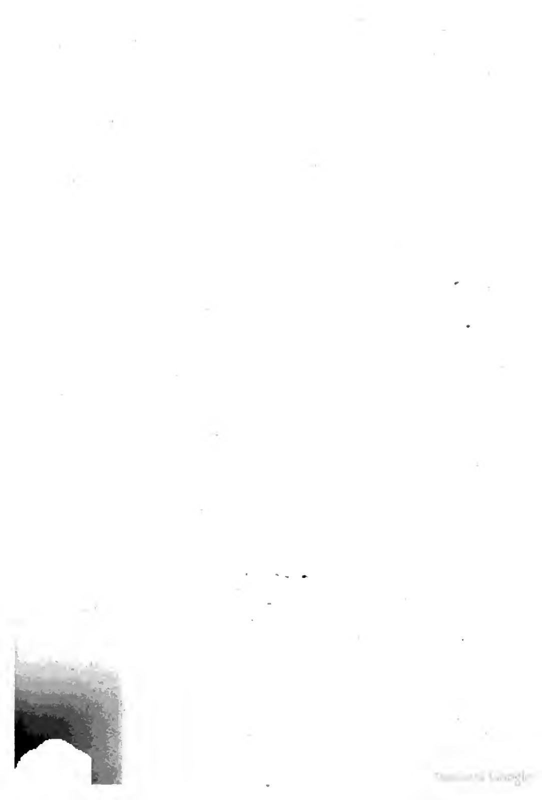
Elemente der Vermessungskunde

Carl Maximilian von Bauernfeind









ELEMENTE

DER

VERMESSUNGSKUNDE

VON

Dr. CARL MAXIMILIAN BAUERNFEIND,
Baurath der königlich bayerischen obersten Baubehörde und Professor.

ZWEITER BAND.

DIE MESSUNGEN UND DAS ABBILDEN DES GEMESSENEN.

MIT 300 HOLZSCHNITTFIGUREN UND 15 TABELLEN.

MÜNCHEN.
LITERARISCH-ARTISTISCHE ANSTALT
DER J. G. COTTA'SCHEN BUCHHANDLUNG.
1858.



Buchdruckerei der J. G. Cotta'schen Buchhandlung in Stuttgart und Augsburg.

Vorrede.

Verschiedene ungünstige Verhältnisse, deren Beseitigung nicht in meiner Macht stand, haben den Druck dieses Bandes, der schon im September 1856 begann, ungewöhnlich verzögert. Indem ich diese Verzögerung denjenigen gegenüber, welche dadurch unangenehm berührt worden seyn sollten, bedaure, erlaube ich mir, unter Bezugnahme auf das Vorwort des ersten Bandes, über den Inhalt des zweiten Folgendes zu bemerken.

Fast alle Lehrbücher der praktischen Geometrie sind in so ferne einseitig abgefasst, als sie ihr Hauptaugenmerk nur dem Aufnehmen des Geländes zuwenden. In unserer Zeit aber, wo man ausserordentliche Summen auf Bauwerke verwendet, die vorzugsweise in Terrainveränderungen bestehen, sind die dem Aufnehmen entgegengesetzten Messoperationen, die Absteckungen, durch welche jene Veränderungen eingeleitet und geregelt werden, von der grössten Wichtigkeit, und ausserdem haben dieselben auch an und für sich ein Interesse: ich habe sie desshalb ausführlich behandelt. Namentlich gilt dieses von dem Abstecken langer gerader Linien und grosser Curven, so wie von jenen Absteckungen, welche sich auf das Nivelliren gründen.

Gleichwie ich die Einseitigkeit in Bezug auf die Behandlung der Hauptabtheilungen der Lehre von den Messungen zu

vermeiden suchte, eben so war ich auch bestrebt, in den Unterabtheilungen den verschiedenen Methoden gerecht zu werden. Ich nenne hier nur die Aufnahmen mit dem Messtische und dem Theodolithen, von welchen jeder mit der hierauf bezüglichen Literatur Vertraute weiss, dass die letzteren, trotz ihrer grösseren Genauigkeit, in den Lehrbüchern der Geodäsie äusserst dürftig behandelt werden. Diesem Mangel, welcher auch von jedem einsichtsvollen praktischen Geometer gefühlt wird, suchte ich nach Kräften zu begegnen, und ich hätte dieses vielleicht noch ausführlicher gethan, wenn mir die freundlichen Mittheilungen des Herrn Regierungsgeometers Fleischbauer in Warza über die von Herrn Hofrath Hansen geleitete Vermessung des Herzogthums Sachsen-Gotha, bei welcher die Detailaufnahme mit dem Theodolithen geschieht, nicht erst nach Vollendung meines Manuscripts zugekommen wären, in Folge dessen ich sie leider nur noch theilweise bei der Correctur dieses Bandes benützen konnte.

Mehrere Lehrbücher der Messkunde sind nach der Meinung ihrer Verfasser dann schon „nach dem neuesten Standpunkte der Wissenschaft“ bearbeitet, wenn sie eine grössere Abhandlung über die Methode der kleinsten Quadrate und deren Anwendung auf gewöhnliche Messungen, z. B. mit der Kette, enthalten. Nach diesem neuesten Standpunkte habe ich nicht gestrebt, da ich der Ansicht bin, dass die Fehler der Messungsresultate der sogenannten niederen Geodäsie ohne Wahrscheinlichkeitsrechnung ausgeglichen werden können und sollen; dass also eine Ausgleichung der Fehler nach der Methode der kleinsten Quadrate nur bei den feinsten geodätischen Messungen, wozu vor allen die Winkelbestimmungen der Dreiecke erster und zweiter Ordnung gehören, am Platze ist; und dass endlich ein Lehrbuch der Geodäsie, welches von diesen

Messungen wirklich handelt, wohl die Anwendung jener Methode zu zeigen hat, aber eine weitläufige Abhandlung darüber eben so wenig als über Geometrie und Algebra, ebene und sphärische Trigonometrie, Reihenlehre und Einrichtung der Logarithmentafeln zu enthalten braucht. Wer sich mit dem Studium der Geodäsie befassen will, muss das der Mathematik bis zu einem hinreichenden Grade schon vollendet haben und darf rein mathematische Abhandlungen nur da suchen, wo sie hin gehören.

Getreu seiner Bestimmung gibt dieser Band nur Anleitung zur sicheren Ausführung aller Vermessungen für technische und staatswirthschaftliche Zwecke und überlässt daher die Lehre von den Gradmessungen besonderen Werken. Selbst die trigonometrischen Arbeiten für grosse Landesvermessungen sind nur so weit behandelt als nöthig ist, eine klare Einsicht in das Wesen derselben und den Zusammenhang der Steuerblätter und topographischen Karten mit den Dreiecknetzen und dieser mit den Meridianen und Parallelkreisen der Erde zu gewähren. Denn dieses reicht für diejenigen, welche nicht selbst solche Landesvermessungen zu leiten haben, vollständig aus und bereitet künftige Dirigenten grosser Triangulirungen hinreichend vor, das für diesen Zweck unerlässliche Studium von Specialwerken, wie die von Gauss, Bessel, Hansen u. A., erfolgreich zu betreiben und sich durch Betheiligung an bedeutenden praktischen Arbeiten dieser oder ähnlicher Art vollständig auszubilden.

Zu den wichtigsten Messungen für die oben genannten Zwecke gehört ohne Zweifel das Nivelliren und dessen Anwendung zur Figurirung des Geländes mittels Horizontalcurven. Diesem selbst von den besseren Lehrbüchern der praktischen Geometrie nicht genug gewürdigten Gegenstande habe

ich eine um so grössere Sorgfalt zugewendet, je mehr ich Gelegenheit hatte zu beobachten, wie sehr derselbe von vielen Ingenieuren noch vernachlässigt wird, obgleich die Darstellung des Terrains durch Horizontalcurven die Grundbedingung rationeller Entwürfe von Strassen, Eisenbahnen und Canälen, die durch Berg- oder Hügelland führen, bildet.

Der Entwickelung der Barometerformel legte ich die von den bisherigen Ansichten abweichende Ohm'sche Annahme zu Grunde, dass die drückende Luftsäule die Form einer vertikal stehenden Pyramide habe, deren Spitze im Erdmittelpunkte liegt. Auf dieser richtigeren Grundlage baut sich eine Formel auf, deren Resultate selbst in den günstigsten Fällen noch um $^1/_{400}$ des Höhenunterschieds von denen der bekannten Laplace'schen Formel abweichen, und zwar liefert die neue Entwickelung alle Höhen um so viel kleiner als die alte, während diese meist auch schon geringere Höhenunterschiede ergab als trigonometrische Messungen. Dieser Umstand macht eine Revision des barometrischen Coefficienten nothwendig. Was ich in dieser Beziehung auf Seite 326 als Wunsch aussprach, habe ich nach dem Drucke jener Stelle mit Unterstützung von mehreren meiner zuverlässigsten Schüler im bayerischen Hochgebirge selbst vollzogen; da aber die hierauf bezüglichen umfangreichen Messungen noch nicht berechnet und verglichen sind, so muss ich die Mittheilung des Ergebnisses unserer Arbeit einer besondern Abhandlung vorbehalten, in der ich vielleicht auch Einiges zur Berichtigung des so ausserordentlich schwankenden Urtheils über die relative Genauigkeit der Barometermessungen werde beitragen können.

Das Markscheiden ist hier selbstverständlich im Sinne der „neuen Markscheidekunst“ aufgefasst, wonach alle Arbeiten, deren Zweck es fordert und deren Oertlichkeit es zulässt, an

der Stelle des Compasses und Gradbogens mit den vollkommneren Instrumenten der praktischen Geometrie, der Libelle, dem Messtische und dem Theodolithen, ausgeführt werden. Da jedoch die Behandlung und Anwendung dieser Messwerkzeuge theils im ersten Bande, theils in den beiden ersten Abschnitten des zweiten Bandes enthalten sind, so blieb für den dritten Abschnitt, der von den Grubenmessungen handelt, nur dasjenige auszuführen übrig, was sich ohne die daselbst bezeichneten Vorkenntnisse vom Bergbaue den Horizontal- und Vertikalmessungen nicht anreihen liess, und was sich auf jene Arbeiten des Markscheiders bezieht, die er bei dem besten Willen und der gründlichsten geometrischen Ausbildung nur mit den althergebrachten Hilfsmitteln vollziehen kann.

Von den Wassermessungen wurde nur so viel aufgenommen, als zur Erforschung der Wassermenge und mechanischen Arbeit eines Flusses erforderlich ist. Hätte ich den Umfang des betreffenden Abschnitts erweitern wollen, so wären dem Zwecke dieses Buchs ferne liegende Abschweifungen in die Gebiete der Hydraulik unvermeidlich gewesen, während der hier behandelte engere Kreis von Messungen in und an Flüssen vorzugsweise nur geometrische Operationen erheischt, also den übrigen Gebieten der praktischen Geometrie ganz nahe verwandt ist.

Dem Umfange nach ist die vom Plan- und Kartenzeichnen handelnde dritte Abtheilung dieses Werks ziemlich mager ausgefallen, und nicht bloss desshalb, weil sich ihr Inhalt nur theilweise wissenschaftlich behandeln lässt, sondern hauptsächlich aus dem Grunde, weil die theoretischen Anleitungen zum Entwerfen von Karten nur für ein kleines Publikum praktisches Interesse haben, während sie für das, dem dieses Buch vorzugsweise gewidmet ist, nur in so ferne von Belang sind,

als sie ihm die Einrichtung und den Gebrauch der Kartennetze wirklich erklären, was in den meisten Lehrbüchern der Geographie nicht geschieht, noch geschehen kann.

Der Kürze und Anschaulichkeit wegen zog ich bei der Darstellung der Kartenprojectionen die geometrischen Entwicklungen den analytischen vor, und ich bin hierin zum Theile Salneuve's „Cours de topographie et de géodesie“ gefolgt, während die topographischen Bezeichnungen, da sie in den meisten Ländern ziemlich übereinstimmen, nach der Instruction für die bayerische Steuer-Catastralvermessung und den Vorschriften der grösseren deutschen topographischen Bureaux angefertigt sind. Die ausserdem benützten Originalarbeiten über Vermessungskunde sind auf Seite XIII besonders angeführt.

Den Anhang, welcher verschiedene zum ersten und zweiten Bande gehörige Tabellen enthält, hat die Verlagshandlung aus zwei Gründen gesondert drucken lassen: zunächst nämlich desshalb, damit die Käufer des ersten Bandes, welche den zweiten nicht wollen, die zu jenem gehörigen Tafeln um einen geringen Betrag erhalten können; und dann in Erwägung des Umstandes, dass man bei geometrischen Arbeiten auf dem Felde wohl ein kleines Heft, aber kein grosses Buch bei sich führen mag.

München, an Ostern 1858.

Carl Bauernfeind.

Inhalt des zweiten Bandes.

Seite

Zweite Abtheilung.

Die Lehre von den Messungen.

I. Horizontalmessungen.

A. Messung der Linien.

B. Messung der Winkel und Dreiecke.

C. Messung von Vielecken und Flurmarken.

D. Messung eines ganzen Landes.

II. Vertikalmessungen.

A. Messung der Vertikalwinkel.

B. Trigonometrische Hohenmessnngen.

C. Höhenmessen durch Nivelliren.

D. Barometrisches Höhenmessen.

III. Grubenmessungen.

A. Technische Ausdrücke der Markscheider.

B. Grundoperationen in der Grube.

C. Von den Markscheidezügen.

Seite

D. Markscheideaufgaben.

IV. Wassermessungen.

Dritte Abtheilung.

Die Lehre vom Plan- und Kartenzeichnen.

I. Kartenzeichnung.

A. Perspectivische Kartenprojectionen.

B. Abwickelbare Kartenprojectionen.

C. Geographische und topographische Karten.

II. Planzeichnung.

A. Horizontal- oder Situationspläne.

B. Vertikal- oder Nivellementspläne.

C. Berg- oder Grubenpläne.

Seite

III. Abzeichnen der Karten und Pläne.

Anhang.

Tafeln über verschiedene Gegenstände der Messkunst.

Originalliteratur,

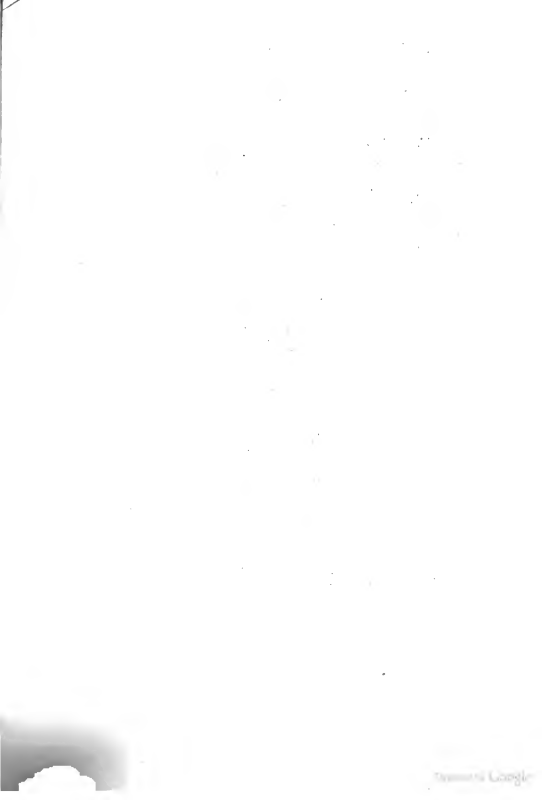
welche bei der Bearbeitung des zweiten Bandes benützt wurde.

A. Bücher.

Amsler, über einen neuen Planimeter. Schaffhausen, 1856.
Baeyer, Nivellement zwischen Swinemünde und Berlin. Berlin, 1840.
Bohnenberger, Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung. Göttingen, 1795.
Bauernfeind, die Planimeter von Ernst, Wetli und Hansen. München, 1853.
Gauss, Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie. Göttingen, 1844.
Hansen, Instruction für die Ausführung der Triangulation von Thüringen. Weimar, 1848.
Hanstadt, Anleitung zur Markscheidekunst. Pesth, 1835.
Stampfer, theoretische und praktische Anleitung zum Nivelliren. Wien, 1852.

B. Zeitschriften.

Crelle, Journal der reinen und angewandten Mathematik. Berlin.
Encke, Berliner astronomisches Jahrbuch. Berlin.
Grunert, Archiv für Mathematik und Physik. Greifswalde.
Schumacher, astronomische Nachrichten. Altona.
Zeuner, der Civilingenieur. Freiberg.



Berichtigungen.

I. Band.

Seite 63 Fig. 24 soll der Schnittpunkt von AB und A′B′ mit G bezeichnet seyn.
„ 121 Zeile 5 v. u. lese man „Excedenz“ statt „Exedenz“.
„ 234 „ 12 v. o. „ „ §. 135 statt §. 136.
„ 238 „ 12 v. o. soll nach „nämlich“ das Komma fehlen.
„ 264 „ 21 v. o. lese man „und wozu“ statt „und“.
„ 270 „ 11 v. o. setze man die Worte „lässt er sich“ vor „behufs“ ein.
„ 290 „ 8 v. o. lese man 3,09 statt ‘309.
„ 339 „ 20 v. o. „ „ 2.55 statt 3,55.
„ 341 „ 18 v. o. „ „ „M D sehr nahe“ statt M D.
„ 344 „ 9 v. o. „ „ „dass auch“ statt „dass“.
„ 368 „ 10 v. o. „ „ „welche“ statt „welcher“.
„ 368 „ 11 v. o. „ „ „ihrer“ statt „ihre“.
„ 380 „ 2 v. o. „ „ 100 statt 010.
„ 380 „ 16 v. o. „ „ o statt O.
„ 381 „ 6 v. o. „ „ „Canalwage“ statt „Kanalwege“.
„ 382 „ 1 v. u. „ „ „um ihre zu be senkrecht stehende Axe v g“.
„ 383 „ 6 v. u. „ „ z′ statt z.
„ 385 „ 10 v. o. „ „ „Canalwage“ statt Kanalwege.
„ 394 „ 13 v. o. und Zeile 1 v. u. lese man „vierfachen“ statt „doppelten“.
„ 394 „ 2 v. u. lese man 4φ statt 2φ.
„ 424 „ 22 v. o. „ „ „von ihm und dem“ statt „von dem“.
„ 428 „ 7 v. o. „ „ Fig. 242 statt Fig. 170.

II. Band.

Seite 180 Zeile 16 v. u. lese man §. 298 statt §. 289.
„ 198 „ 10 v. u. setze man nach „Seiten“ ein Komma.
„ 319 „ 1 v. o. lese man D statt C.
„ 321 „ 4 v. u. „ „ $r^2 + r(z' + z'')$ statt $r_2 + r(z' + z'')$.
„ 321 „ 13 v. u. „ „ $c g_0 r^2$ statt $c g_0 r_2$.
„ 324 „ 12 v. u. „ „ $(1 + \alpha r)$ statt $(1 = \alpha r)$
„ 325 „ 13 v. o. „ „ $\left(\frac{r + z''}{r + z'}\right)^2$ statt $\left(\frac{r + z''}{r + z'}\right)_2$.

Zweite Abtheilung.

Die Lehre von den Messungen oder den geometrischen Aufnahmen und Absteckungen.

Theorie der Messungen.

§. 231.

Die Aufgaben, welche mit den in der ersten Abtheilung dieses Buchs betrachteten Messinstrumenten gelöst werden können, sind ebenso zahlreich und mannichfaltig als die Anforderungen, welche von Seite der Staatsverwaltung, des Verkehrs, der Technik und der Wissenschaft an die Messkunst gestellt werden. Aus dieser Mannichfaltigkeit das Gleichartige herauszufinden und zusammenzustellen, und dieses selbst wieder so zu ordnen, dass eine klare Uebersicht aller Abtheilungen des Gebiets der Vermessungskunde gewonnen wird, ist die nächstgelegene Aufgabe der Lehre von den Messungen; ihre Hauptbestimmung aber ist, den geordneten Inhalt der Messkunst wissenschaftlich darzustellen.

Durch die Operationen der Messkunst können zwei verschiedene Zwecke erreicht werden: der eine besteht darin, die gegenseitige Lage von Punkten auf und unter der Erdoberfläche und die Geschwindigkeiten der Flüsse so zu bestimmen, dass sich darnach Land- und Stromkarten, Situations- und Nivellementspläne, Terraindurchschnitte und Grubenrisse herstellen lassen; der andere aber zielt dahin ab, eine auf Karten und Plänen oder sonstwie vorgezeichnete Lage von Punkten so auf oder in das Terrain überzutragen, dass die natürlichen Projectionen der Terrainpunkte unter sich und gegen ihre Umgebung dieselbe relative Lage haben wie die gleichnamigen Projectionen der im Bilde gegebenen Punkte. Jene Operationen bezeichnet man kurz mit dem Worte Aufnehmen, diese aber mit dem Ausdrucke Abstecken. Das Aufnehmen und Abstecken macht den Inhalt [1] der zweiten Abtheilung der Vermessungskunde aus, und

[1] Die meisten Lehrbücher der Messkunde ziehen nur das Aufnehmen in den Kreis ihrer Betrachtungen und lassen das Abstecken ganz weg.

in der Lehre von der geometrischen Aufnahme und Absteckung besteht die Theorie der Messungen.

Zergliedert man die Lösungen aller Aufgaben der Messkunde, so zeigt sich, dass selbst die zusammengesetztesten nur aus der verschiedenartigen Verknüpfung einer mässigen Anzahl von Elementaraufgaben bestehen, und dass sich diese Aufgaben wiederum in vier Gruppen abtheilen lassen, nämlich

1) in Horizontalmessungen, welche bloss die Aufnahme und Absteckung von natürlichen Horizontalprojectionen bezwecken;

2) in Vertikalmessungen, deren Zweck im Aufnehmen und Abstecken von Höhen besteht;

3) in Grubenmessungen, welche eine Verbindung von Horizontal- und Vertikalmessungen für bergmännische Zwecke sind; und

4) in Wassermessungen, welche sich aus Horizontal- oder Vertikalmessungen und Zeitbeobachtungen zusammensetzen und hydrotechnischen Zwecken dienen.

Diese vier Gruppen von Messoperationen mit entsprechenden Unterabtheilungen, worin das Aufnehmen und Abstecken gehörig gesondert sind, bilden das Gerippe für den nachfolgenden Vortrag der Lehre von den Messungen.

Erster Abschnitt.

Horizontalmessungen.

A. Messung der Linien.

§. 232.

Mit dem Ausdrucke Messung der Linien bezeichnen wir alle Verrichtungen, durch welche gerade und krumme Linien auf dem Felde abgesteckt und aufgenommen werden. Diese Verrichtungen bestehen in mittel- oder unmittelbaren Messungen und den damit verbundenen Rechnungen oder geometrischen Constructionen, und sind theils nach der Form der Linien, theils nach ihrer Ausdehnung, theils nach den Hindernissen, welche die Beschaffenheit des Bodens

mit sich bringt, theils nach den Hilfsmitteln, welche zur Messung verwendet werden können, theils nach der Einsicht und Geschicklichkeit des Geometers verschieden von einander. Ihre Theorie wird desshalb am zweckmässigsten in der Form von Aufgaben, welche für gegebene Voraussetzungen bestimmte Forderungen stellen, abgehandelt. Wenn man diese Aufgaben mit Rücksicht auf die im Leben und in der Natur bestehenden Verhältnisse zweckmässig wählt und ihre Lösungen vervielfältigt und so einrichtet, dass daraus hervorgeht, wie in einzelnen Fällen mit den dargebotenen Hilfsmitteln der beabsichtigte Zweck auf eine einfache und zuverlässige Art erreicht werden kann: so lassen sich in einer verhältnissmässig geringen Zahl von Aufgaben so viele Verfahrungsweisen, Regeln und Winke geben, dass sich jeder denkende Geometer in allen möglichen Fällen leicht selber zu helfen weiss.

1) Das Abstecken gerader Linien.

§. 233.

Es wurde bereits im ersten Bande, als von den Hilfsmitteln zur Bezeichnung der Punkte auf dem Felde die Rede war, erklärt, dass das Abstecken einer geraden Linie in der Aufstellung einer entsprechenden Anzahl von Fluchtstäben oder Signalen, deren lothrechte Axen in einer Vertikalebene liegen, besteht; und es wurde daselbst auch gezeigt, wie man in den einfachsten Fällen eine gerade Linie mit Stäben absteckt. Wir setzen daher hier als bekannt voraus, dass man zwischen zwei gegebenen Punkten von geringer Entfernung einen dritten Punkt angeben könne, der mit jenen in einer Geraden liegt, und dass man eine durch zwei Punkte bestimmte Gerade nach beiden Seiten hin zu verlängern wisse, wenn das Terrain keine Schwierigkeiten in den Weg legt. Das im §. 81 beschriebene Verfahren zur Absteckung gerader Linien lässt sich aber nicht mehr anwenden, wenn die gegebenen zwei Punkte, welche die abzusteckende Linie bestimmen, so liegen, dass man von einem zum andern nicht mehr sehen kann, sey es, weil sich ein Hinderniss zwischen oder vor den beiden Punkten befindet, oder sey es, weil die Entfernung der Punkte von einander zu gross ist. In den folgenden Paragraphen wird nun gezeigt, wie man die Schwierigkeiten, welche sich dem Visiren von einem Punkte zum andern entgegenstellen, überwindet.

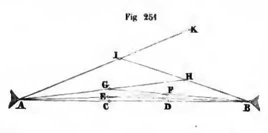
§. 234.

Aufgabe. Zwischen zwei gegebenen Punkten von mässiger Entfernung, welche aber so liegen, dass sich von dem einen zum andern keine Absehlinie herstellen lässt, soll ein dritter Punkt in gerader Linie abgesteckt werden.

Der Grund warum man von dem einen gegebenen Punkte A nach dem anderen B oder von diesem nach jenem keine Absehlinie herstellen kann, liegt entweder darin, dass sich zwischen den beiden Punkten ein Bergvorsprung oder ein Hügel befindet, oder darin, dass man sich hinter A und B nicht aufstellen kann, weil diese Punkte durch lothrechte Mauerkanten, durch Thurmspitzen oder andere ähnliche natürliche Signale bezeichnet sind. Ob nun das eine oder das andere Hinderniss stattfindet, ist für die Lösung der vorliegenden Aufgabe gleich. Das Verfahren, welches dieselbe fordert, ändert sich nur mit den dazu gestatteten Hilfsmitteln, welche entweder bloss aus Absteckstäben, oder aus einem Prismenkreuze mit Absteckstäben, oder endlich aus einem Spiegelkreise und Stäben bestehen.

1) Lösung der Aufgabe ohne andere Hilfsmittel als Absteckstäbe.

Wenn man nur Absteckstäbe zur Verfügung hat, so erfordert die Lösung der vorliegenden Aufgabe mindestens einen Gehilfen. Hat man diesen, so stecke man noch mehrere theils durch A theils durch B gehende gerade Hilfslinien ab, bis man endlich zwei erhält, welche ein Stück gemeinschaftlich haben. Ist dieses der Fall, so liegen die beiden Punkte, welche den gemeinsamen Theil der beiden Hilfsgeraden bezeichnen, in der geraden Linie AB.



Um dieses Verfahren auszuführen, stelle man sich (nach Fig. 251) in einem beliebigen Punkte K auf, von dem aus man A erblickt und richte durch blosses Absehen den Gehilfen I in die Gerade AK ein. Hiebei muss der Gehilfe den Punkt I so wählen, dass man von ihm aus nach B sehen kann. Es wird nun von I aus der Stab H in die Linie BI, von H aus der Stab G in die Linie AH, von G aus der Stab F in die Linie BG, von F aus

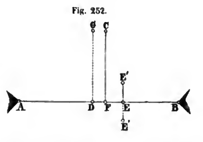
E in AF u. s. f. eingerichtet, bis man endlich zwei Punkte C und D erhält, welche sowohl in der Geraden AD als in der Geraden BC liegen. Da diese zwei Linien das gerade Stück CD gemein haben, so liegen sie selbst und mit ihnen C und D in einer einzigen geraden Richtung, und zwar in der, welche durch A und B geht. Die Aufgabe ist somit gelöst.

Man begreift leicht, dass diese Lösung jederzeit umständlich, in vielen Fällen unsicher und manchmal sogar unausführbar ist. Sie wird unsicher, wenn der Raum zwischen den Linien CEGI und DFHK im Verhältniss zur Länge AB nur schmal ist, und wird unausführbar, wenn der bezeichnete Raum in einen nach A und B hin rasch abfallenden Bergrücken übergeht. Diese Unsicherheit in dem einen und die Unausführbarkeit in dem andern Falle verschwinden, wenn man mit dem Prismenkreuze arbeitet, dessen Anwendung wir nun näher erörtern wollen.

2) Lösung der Aufgabe mit Anwendung des Prismenkreuzes.

Diese Lösung besteht nach der im §. 108 gegebenen Anleitung zum Gebrauche des Prismenkreuzes darin, dass man, um nach Fig. 252 den Punkt E zwischen A und B einzuschalten, von einem beliebigen Punkte E′ ausgehend und die beiden Objektivebenen des Instruments gegen A und B, die Okularebenen aber gegen das Auge wendend, so lange fortschreitet, bis man an eine Stelle gelangt, in welcher sich die Bilder von A und B in den beiden Prismen decken. Steckt man an dieser Stelle unterhalb des Prismenkreuzes einen Stab lothrecht in den Boden, so bezeichnet dieser den gesuchten Punkt E.

Fig. 252.



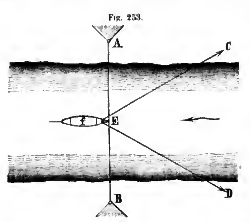
Will man sich von der richtigen Lage dieses Punktes überzeugen, so braucht man das eben beschriebene und für eine Seite von AB ausgeführte Verfahren nur von der anderen Seite von AB her zu wiederholen und zuzusehen, ob das Instrument auch in dieser entgegengesetzten Lage den Punkt E angibt oder nicht. Erhält man denselben zum zweiten Male, so ist diess ein Beweis nicht bloss für die richtige Operation, sondern auch für die gehörige Berichtigung des Prismenkreuzes, ergibt sich aber durch die zweite Messung ein

anderer in E' gelegener Punkt, so deutet dieser lediglich auf eine unvollständige Berichtigung des Instruments hin, welche desshalb zu ergänzen ist. Jedenfalls liegt aber in einem solchen Falle der gesuchte Punkt E in der Mitte zwischen den zwei Punkten, welche die beiden Absteckungen ergeben haben.

Gewährt das Terrain hinreichenden Raum, so kann man zur Prüfung der Lage des Punktes E einen Stab D in die Linie EB einstecken und von E aus untersuchen, ob dieser Stab auch in der Linie EA steht: ist dieses wirklich der Fall, so muss nothwendig auch E ein Punkt der Geraden AB seyn, weil das gerade Stück DE den beiden durch A und B gehenden Geraden AE und BD gemein ist.

Da man zur Ausführung der Absteckung des Punktes E nur so viel Raum bedarf als nöthig ist, darauf vor- oder rückwärts zu gehen, so ist klar, dass die Einschränkung dieses Raumes auf einen schmalen Streifen kein Hinderniss ist, wenn man mit dem Prismenkreuze arbeitet, während dieselbe die in Nr. 1 beschriebene Absteckung unmöglich macht. Ebenso ist klar, dass auf einem Strome die Aufsuchung eines Punktes E in der geraden Linie AB mit Hilfe eines Fahrzeugs f, welches von sich oder von den Ufern aus bewegt und geleitet wird, leicht ausgeführt werden kann, was nicht der Fall wäre, wenn man die Absteckung bloss mit Stäben bewirken wollte.

Fig. 253.

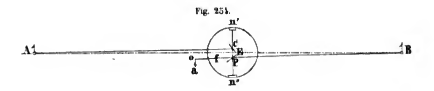


3) Lösung der Aufgabe mit Hilfe des Reflexions- oder Spiegelkreises.

Da der in den §§. 153 bis 157 beschriebene Spiegelkreis von Pistor und Martins zur Messung von Winkeln geeignet ist, welche genau 180° betragen, so muss derselbe auch zur Aussteckung solcher Winkel, d. h. zur Einschaltung eines Punktes E in die gerade Linie zweier anderer Punkte A und B dienen. Für diese Absteckung

ist aber erst das Instrument dadurch vorzubereiten, dass man dem Oculare des Fernrohrs das in Fig. 156 gezeichnete Reflexionsprisma

Fig. 254.



vorschraubt und den in Fig. 150 mit N' bezeichneten Nonius auf den Theilstrich 180° des Limbus genau einstellt.

Nach dieser Vorbereitung fasst man den Spiegelkreis an seinem Griffe, hält ihn wagrecht vor den Kopf und richtet das Fernrohr f, wie Fig. 254 zeigt, mit dem bei a befindlichen Auge nach dem Punkte B, wodurch der drehbare Spiegel c von dem Punkte A Licht erhält, das in Folge der bekannten Einrichtung des Instruments den Weg A c p o a macht, bis es in's Auge gelangt.

Geht man nun mit dem also gehaltenen Spiegelkreise gegen die Linie AB so lange vor- oder rückwärts, bis sich die bei a gesehenen Bilder von A und B decken, so bezeichnet die Axe des Instruments den gesuchten und in AB liegenden Punkt E. Von der richtigen Lage dieses Punktes kann man sich wie vorhin bei Nr. 2 überzeugen.

Das Verfahren zur Absteckung des Punktes E ist hier im Grunde dasselbe wie bei dem Prismenkreuze, aber es verursacht im Vergleiche mit jenem viel mehr Mühe, nicht nur weil die beiden Bilder von A und B, welche der Spiegelkreis liefert, dunkler sind als jene des Prismenkreuzes, sondern auch weil das Gesichtsfeld jenes Kreises ungleich kleiner ist als das an unserm Instrumentchen, und weil endlich der Spiegelkreis eine viel ruhigere Haltung des Beobachters erfordert als dieses.

§. 235.

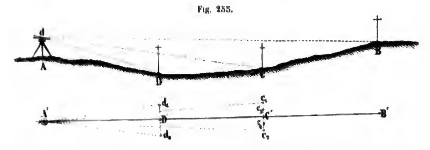
Aufgabe. Zwischen zwei gegebenen Punkten von grosser Entfernung, welche so liegen, dass sie von einem ihrer Verbindungslinie angehörigen Standpunkte aus mit Fernrohren gesehen werden können, sollen zwei oder mehrere Punkte in gerader Linie abgesteckt werden.

Die Lösung dieser Aufgabe erfordert ein Instrument, das mit einem Messfernrohre versehen ist und so aufgestellt werden kann, dass sich die Absehlinie beim Auf- und Niederkippen des Rohrs in einer Vertikalebene bewegt: also einen Theodolithen oder ein theodolithenartig eingerichtetes Nivellirinstrument, wie dergleichen in Fig. 221 und Fig. 224 abgebildet und in den §§. 207 bis 209 beschrieben sind. Ferner fordert die Lösung dieser Aufgabe Gehilfen, welche Signalstangen lothrecht aufzustellen wissen und die Zeichen verstehen, welche ihnen der Geometer gibt. Ist dieser von seinen Gehilfen zu weit entfernt, so dass sie dessen Zeichen mit blossen Augen nicht erkennen können, so muss einer derselben mit einem Handfernrohre (einem sogenannten Feldstecher) versehen werden, damit er die Winke, welche der Geometer mit einer Messfahne gibt, deutlich erkennen und den übrigen zur Darnachachtung mittheilen kann.

Da das Abstecken langer gerader Linien in neuerer Zeit häufig vorkommt und für die Ausführung grosser Erdwerke, wie sie Strassen und Eisenbahnen fordern, von bedeutender Wichtigkeit ist, so wollen wir die vorliegende Aufgabe für mehrere bestimmte Fälle lösen.

1) Die gegebenen Punkte A und B liegen so, dass man auf einem von ihnen (A) den Theodolithen aufstellen und nach dem anderen (B) ungehindert visiren kann. In diesem Falle stelle man das Instrument centrisch über A und so auf, dass die Alhidadenaxe lothrecht ist und folglich die Drehaxe des Fernrohrs sich stets in einer Horizontalebene bewegt. Durch diese Aufstellung wird be-

Fig. 255.



wirkt, dass in jeder Lage des Fernrohrs dessen Absehlinie in einer Vertikalebene liegt, welche durch den Punkt A geht. Stellt man nun das Fernrohr genau auf B ein und schliesst die Bewegung der

Alhidade ab, so kann sich die Absehlinie nur mehr in der abzusteckenden Vertikalebene bewegen. In Fig. 255 soll die Linie ADCB den Schnitt dieser Ebene mit dem Terrain und die Gerade A′D′C′B′ die gesuchte Horizontalspur derselben Ebene vorstellen.

Will man nun den Punkt C finden, so lasse man die Gehilfen an einer Stelle, welche nach vorläufiger Schätzung diesem Punkte entspricht, eine Signalstange aufstellen und sehe zu, ob dieselbe in der Vertikalebene AB steht oder nicht. Wird nämlich bei hinreichend gesenktem Fernrohre die Mitte des unteren Stangenendes von dem Fadenkreuze gedeckt, so befindet sich die Stange an der rechten Stelle und braucht dieselbe dann nur noch genau lothrecht gestellt zu werden; erscheint aber das Fadenkreuz rechts oder links von der Stange, so liegt, da das Fernrohr ein astronomisches ist, der gewählte Punkt beziehungsweise links oder rechts von der Geraden AB und muss desshalb die Stange auf ein gegebenes Zeichen des Geometers in dem ersten Falle nach der rechten, in dem zweiten aber nach der linken Seite hin versetzt und ihre Stellung abermals geprüft werden. Dieses Versetzen und Prüfen nimmt man so lange fort vor, bis die rechte Stelle gefunden ist, d. h. bis das Fadenkreuz die Stange von oben bis unten nach der Mittellinie deckt. Es ist vielleicht nicht überflüssig zu bemerken, dass die Versetzung der Signalstange, bis die richtige Stelle gefunden ist, nach einem gewissen Systeme geschehen muss, wenn man möglichst bald zum Ziele gelangen will. Dieses System besteht darin, dass jeder neue Standpunkt in der Mitte der beiden nächst vorhergegangenen Standpunkte zu nehmen ist. War c_1 der erste und c_2 der zweite Standpunkt des Signals, so ist für den dritten c_3 der Abstand $c_3 c_2 = c_3 c_1$, für den vierten c_4 der Abstand $c_4 c_3 = c_4 c_2$ u. s. f. zu nehmen, bis man endlich den gesuchten Punkt C′ erhält, welcher den Abstand $(c_4 c_3)$ der beiden letzten Punkte halbirt. So wie der Punkt C, wird auch der Punkt D abgesteckt, wobei sich von selbst versteht, dass man in dem Falle, wo die nähere Signalstange die fernere decken könnte — und das ist bei ebenem Terrain stets der Fall — den entfernteren Punkt (C) früher als den näheren (D) abzustecken hat.

2) Die gegebenen Punkte A und B liegen so, dass man von einem zum anderen nicht sehen, wohl aber zwischen beiden eine Stelle finden kann, welche nach jedem von ihnen zu visiren gestattet. Diesem Falle entspricht auch der, in welchem auf keinem

der gegebenen Punkte der Theodolith aufgestellt, aber von einem Zwischenpunkte aus nach beiden visirt werden kann.

Unter den gegebenen Verhältnissen kommt es vor Allem darauf an, auf dem Terrainbezirke, welcher zwischen A und B so liegt, dass man von ihm aus beide Punkte sehen kann, einen Punkt C so zu bestimmen, dass er in der Vertikalebene AB liegt. Hat man diesen Punkt, so lassen sich in den Abtheilungen AC und BC der Geraden AB leicht noch andere Punkte durch das Verfahren abstecken, welches unter Nr. 1 beschrieben wurde.

Wir nehmen an, dass zur Absteckung des Punktes C ein guter Theodolith gegeben sey. Diesen stelle man vorläufig in einem Punkte c_1 auf, den man nach dem Augenmasse für einen Punkt der Linie AB hält. Nachdem der Kreis horizontal steht, stelle man das Fernrohr genau auf einen der gegebenen Punkte, etwa auf A ein und schlage hierauf, ohne übrigens an dem Stande des Instruments

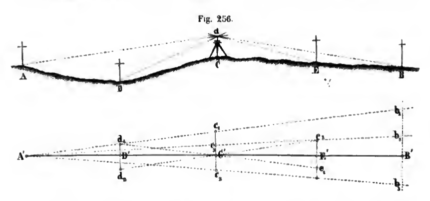


Fig. 256.

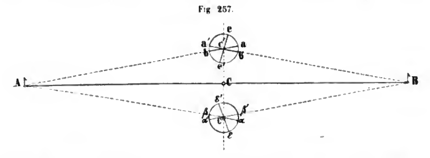
das Geringste zu ändern, das Fernrohr durch. Zeigt sich hiebei, dass die Visirlinie links von B bei b_1 vorbeigeht, so muss der Standpunkt des Theodolithen in der Richtung c_1c_2 nach rechts versetzt werden. Angenommen, man hätte jetzt den Punkt c_2 gewählt, so wiederholt man daselbst das Verfahren, das eben in c_1 ausgeführt wurde, und wenn nun die Visirlinie des durchgeschlagenen Fernrohrs rechts von B bei b_3 vorbeigeht, so stellt man den Theodolithen auf den Punkt c_3, welcher in der Mitte von c_1c_2 liegt, und fährt mit diesem Verfahren so lange fort, bis man endlich einen Punkt C erhält, welcher so liegt, dass von ihm aus das Fernrohr in seiner ersten und zweiten Lage genau auf A und B zeigt.

Dieses Verfahren setzt, wie man leicht einsieht, voraus, dass die Absehlinie des Fernrohrs zur Drehaxe desselben ganz genau senkrecht stehe: man muss sich also von dieser Beschaffenheit des Fernrohrs erst überzeugt haben, wenn man sich sofort auf die eben gemachte Bestimmung des Punktes C verlassen und keine unbrauchbare Arbeit liefern will. Aber selbst dann, wenn Absehlinie und Drehaxe senkrecht gegen einander stehen, ist noch eine Prüfung der Absteckung des Punktes C rathsam. Dieselbe kann auf verschiedenen Wegen vorgenommen werden.

Ein Verfahren besteht darin, dass man das Fernrohr des noch unverändert stehenden Theodolithen wieder genau auf A einstellt, die beiden Nonien des Horizontalkreises abliest, die Alhidade genau um 180° dreht und zusieht, ob jetzt abermals das Fadenkreuz genau auf den Punkt B zeigt oder nicht. Wird B gedeckt, so kann man sicher seyn, dass C richtig gefunden ist, weicht aber das Fadenkreuz von B ab, so ist eine der beiden Messungen unrichtig und es muss in diesem Falle eine zweite Untersuchung entscheiden, wo der Fehler liegt.

Diese Untersuchung, welche auch sogleich als zweites Verfahren zur Prüfung der ersten Absteckung angewendet werden kann, beruht auf folgender Betrachtung. Stellt in Fig. 257 der Punkt C′ den

Fig. 257.



eben gefundenen Punkt C vor, von dem vermuthet wird, dass er falsch sey, und bezeichnet derselbe zugleich die Alhidadenaxe des Theodolithen, ee′ aber die Drehaxe und ab die auf A gerichtete Absehlinie des Fernrohrs, so wird, wenn nach dem Durchschlagen des Rohrs die Absehlinie a′b′ auf B geht, der Punkt C′ um eine gewisse leicht zu berechnende Grösse CC′ von der Linie AB abstehen und zwar auf der oberen Seite von AB, wenn die Visirlinie

mit der Drehaxe gegen A B hin den spitzen Winkel A C' e' einschliesst. Würde aber die Alhidade mit dem Fernrohr, das jetzt die Lage a' b' hat um 180° gedreht werden, so dass die Absehlinie nunmehr von b' nach a' hinginge und folglich der stumpfe Winkel A C' e, den die Absehlinie mit der Drehaxe macht, gegen A B läge: so hätte sich durch das oben beschriebene Verfahren statt C' ein Punkt C'' ergeben, welcher von A B ebenfalls um die Grösse C C' abstände, aber auf der unteren Seite dieses Geraden sich befände. Der richtige Punkt C läge alsdann in der Mitte von C' C''.

Auf Grund dieser Betrachtung wird man also, nachdem die erste Messung mit der Lage e e' der Drehaxe des Fernrohrs gemacht wurde, eine neue Bestimmung des Punktes C vornehmen, bei welcher diese Drehaxe die entgegengesetzte Lage $\varepsilon \varepsilon'$ hat. Zeigt sich hiebei, dass wieder der frühere Punkt C erhalten wird, so sind die erste und dritte Messung richtig; weicht aber der neue Punkt C'' von dem ersten C' ab, so liegt der gesuchte Punkt C in der Mitte von C' C'', womit auch die zweite Messung übereinstimmen wird, wenn man sie für diesen Punkt wiederholt. Hat man den Punkt C gefunden, so kann man von ihm aus die Punkte D und E ganz in derselben Weise abstecken, wie in Nr. 1 gelehrt worden ist. Man wird sich auch leicht selbst klar machen können, wie man, um C zu finden, verfahren müsste, wenn statt des Theodolithen nur ein grosses Nivellirinstrument gegeben wäre, das keinen Horizontalkreis hätte und dessen Fernrohr sich wohl in seinen Lagern umsetzen, aber nicht durchschlagen liesse.

§. 236.

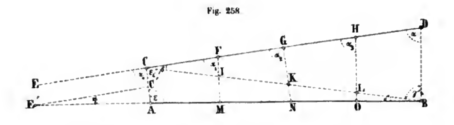
Aufgabe. Zwischen zwei gegebenen Punkten von sehr grosser Entfernung, welche durch verschiedene Hindernisse so getrennt sind, dass man längs ihrer Verbindungslinie nicht visiren kann, sollen einige Punkte in gerader Linie abgesteckt werden.

Die Lösung dieser Aufgabe ist im Allgemeinen schwierig und umständlich, kann aber oft durch kluge Benützung der Localverhältnisse sehr vereinfacht werden. Wir wollen zunächst einige solche günstige Umstände voraussetzen und alsdann den schwierigsten Fall behandeln.

1) Es sey möglich, neben der gesuchten Geraden A B eine an-

dere Gerade CD abzustecken, deren Endpunkte mit den gegebenen Punkten A und B verbunden werden können.

Fig. 258



Dieser Fall kommt sehr oft vor und manchmal so, dass die Hilfslinie sogleich durch einen der Endpunkte A oder B selbst gelegt werden kann. Die Linie CD, welche wir hier als Hilfslinie benützen, kann man durch Rückwärtsverlängern eines angenommenen geraden Stückes (z. B. CF oder DH) nach §. 81, oder durch Einschalten von Punkten (F, G, H) zwischen C und D nach §. 235 abstecken.

Ist dieses geschehen, so bezeichne man in der Linie CD einige Punkte F, G, H, welche eine freie Aussicht gegen die gesuchte Linie AB gestatten und so liegen, dass man in den von ihnen ausgehenden Richtungen FM, GN, HO Entfernungen abmessen kann. Hierauf wird die Linie CD mit ihren Zwischenpunkten F, G, H der Länge nach zweimal abgemessen und alle Entfernungen werden auf den Horizont reducirt. Wir wollen annehmen, dass die wagrechte Gerade CF = a_1, CG = a_2, CH = a_3 und CD selbst = a sey. In gleicher Weise werden AC = c und BD = e gemessen und auf den Horizont reducirt. Sind die Richtungen FI, GK, HL, welche freie Aussicht und ungehinderte Messung gegen AB hin gestatten, durch Absteckstäbe oder Signale festgelegt, so misst man ausserdem noch die in der Fig. 258 angezeigten Horizontalwinkel α_0, α_1, α_2, α_3 und α. Mit diesen gemessenen und folglich bekannten Grössen kann man die Entfernungen MF, NG, OH der Punkte M, N, O, welche in der Geraden AB liegen sollen, berechnen, und ist diese Rechnung gemacht, so braucht man nur die gefundenen Horizontalentfernungen von F, G, H aus genau abzumessen, um die gesuchten Punkte M, N, O der Geraden AB zu erhalten.

Die für diese Absteckung nöthigen Rechnungen werden am einfachsten in folgender Weise zu führen seyn.

Aus CD = a, BD = e, CDB = α und a $>$ e erhält man nach bekannten Formeln der ebenen Trigonometrie:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\gamma - \beta) = \frac{a - e}{a + e} \cot \tfrac{1}{2} \alpha.$$

Verbindet man den Werth von $\gamma - \beta$, welcher sich hieraus ergibt, mit dem von

$$\gamma + \beta = 180^0 - \alpha,$$

so erhält man die Winkel β und γ, welche zur weiteren Berechnung nöthig sind. Mit diesen Winkeln ist die Länge d der Seite BC sehr leicht zu finden; kennt man aber d, so sind in dem Dreiecke ABC wieder zwei Seiten AC = c, CB = d und der eingeschlossene Winkel ACB = $180^0 - (\alpha_0 + \beta) = \varepsilon_1$ bekannt, folglich kann man mit Hilfe der Gleichung

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\varepsilon - \delta) = \frac{d - c}{d + c} \cot \tfrac{1}{2} \varepsilon_1$$

die Winkeldifferenz $\varepsilon - \delta$ berechnen, und da die Winkelsumme

$$\varepsilon + \delta = 180^0 - \varepsilon_1 = \alpha_0 + \beta$$

ist, so lassen sich die Winkel ε und δ selbst und damit auch die Länge der Linie AB finden.

Ist die Rechnung so weit gediehen, so ist es nicht mehr schwer, die Abstände FM, GN, HO, welche wir beziehlich mit e_1, e_2, e_3 bezeichnen wollen, zu finden. Denn da jetzt der Winkel ε gefunden ist, so kennt man in dem Dreiecke ACE, das durch Verlängerung der Linien BA und DC entsteht, die drei Winkel und eine Seite (AC), es lassen sich folglich die übrigen Stücke dieses Dreiecks berechnen. Wir brauchen aber zunächst nur die Seite EC. Da nun der Winkel $\eta = \varepsilon - \alpha_0$ ist, so erhält man

$$CE = \frac{C \sin \varepsilon}{\sin \eta} = i;$$

und da in dem Dreiecke EFM die Seite EF = i + a_1, der Winkel EFM = α_1 und der Winkel FEM = η ist, so findet man

$$FM = \frac{(i + a_1) \sin \eta}{\sin (\alpha_1 + \eta)} = e_1.$$

In gleicher Weise erhält man aus dem Dreiecke EGN die Seite

$$GN = \frac{(i + a_2) \sin \eta}{\sin (\alpha_2 + \eta)} = e_2,$$

und schliesslich aus dem Dreiecke EHO die Seite

$$HO = \frac{(i + a_3) \sin \eta}{\sin (\alpha_3 + \eta)} = e_3.$$

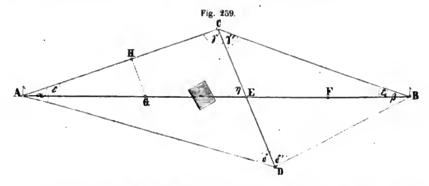


Die Rechnung wird ungleich einfacher, wenn man entweder in der Lage ist, alle mit α bezeichneten Winkel einander gleich zu machen, oder wenn man die Hilfslinie CD durch A oder B selbst legen kann, was, wie schon bemerkt, oft der Fall ist. Wir halten es jedoch für unnöthig, die damit verbundenen Vereinfachungen hier näher zu erörtern, da sie jeder, der die vorhergehenden Rechnungen versteht, leicht selber findet.

2) Es sey möglich, die abzusteckende Gerade AB in der Weise mit einer gebrochenen Linie ACDB zu verbinden, wie dieses Fig. 259 zeigt.

Wenn man die drei Geraden AC, CD, DB und die beiden Winkel C und D sehr genau messen würde, so liesse sich aus diesen Grössen allein die Entfernung des Punktes E, welcher der Geraden AB angehört, von den Punkten C oder D berechnen. Würde man diese Entfernung genau abmessen, so wäre E bestimmt und dadurch die jetzige Aufgabe auf den in Nr. 1 betrachteten einfacheren Fall zurückgeführt, in so ferne neben AE die durch A gehende Hilfslinie AC und neben EB die Hilfslinie DB läge. Da es aber immer eine umständliche und mühevolle Arbeit ist, lange Linien sehr genau zu messen, so wollen wir jetzt annehmen, man könne von C und D aus nach A und B hin visiren.

Fig. 259.



Ist dieses Visiren möglich, so messe man vor allen Dingen die an ihren Endpunkten C und D mit starken Pfählen bezeichnete Hilfslinie CD mit Messlatten sehr genau ab und bemerke hiebei grössere Abschnitte von etwa 500 Fuss durch kleinere Pfähle, um diese später, wenn die Entfernung CE abgemessen werden soll, in der Art benützen zu können, dass nur noch ein kleiner Theil

anzusetzen oder abzuziehen ist. Hat man die Horizontalprojektion von CD = b gefunden, so messe man in C die Winkel γ und γ', in D die Winkel δ und δ', und in A und B die Winkel α und β. Streng genommen hätte man zwar die beiden letzteren Winkel nicht nöthig; aber es ist gut, sie zu messen, weil sie eine Controle für die Messung der übrigen Winkel bilden.

Beträgt die Summe $\alpha + \gamma + \delta$ oder $\beta' + \gamma' + \delta'$ mehr oder weniger als 180⁰ und liegt der Unterschied im Bereiche der unvermeidlichen Beobachtungsfehler, so gleiche man je drei zusammengehörige Winkel auf 180⁰ dadurch aus, dass man jeden um den dritten Theil des Gesammtfehlers verbessert, wenn alle Winkel mit gleicher Genauigkeit gemessen sind, wie wir hier annehmen wollen.[1] Mit Hilfe dieser Winkel und der Grundlinie b findet man leicht die Dreiecksseiten AD, BD gleich c, c', oder AC, BC gleich d, d', und hierdurch aus den Dreiecken ABC oder ABD die Winkel, welche diese Seiten mit der Geraden AB einschliessen. Wir wollen hier nur zwei von ihnen, nämlich CAB = ε und CBA = ε_1 bestimmen, da die übrigen (ausser zur Controle der Rechnung) unnöthig sind. Da in dem Dreiecke ABC die Seiten d, d' und der von ihnen eingeschlossene Winkel ACB = $\gamma + \gamma'$ bekannt sind, so hat man, wenn $d > d'$ ist,

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\varepsilon_1 - \varepsilon) = \frac{d - d'}{d + d'} \cot \tfrac{1}{2} (\gamma + \gamma').$$

Verbindet man die Winkeldifferenz $\varepsilon_1 - \varepsilon$, welche sich hieraus ergibt, mit der bekannten Winkelsumme

$$\varepsilon_1 + \varepsilon = 180^0 - (\gamma + \gamma'),$$

so erhält man sowohl ε als ε_1. Hat man aber diese Winkel, so liefern die beiden Dreiecke ACE und BCE die gesuchte Entfernung.

$$CE = \frac{d \sin \varepsilon}{\sin (\gamma + \varepsilon)} = \frac{d' \sin \varepsilon_1}{\sin (\gamma' + \varepsilon_1)}.$$

Wird diese Länge genau berechnet und abgemessen, so ist der Punkt E bestimmt. Weitere Punkte der Linie AB sind entweder dadurch zu ermitteln, dass man aus den Dreiecken ACE oder BCE die Neigung η der Seite CD gegen die Gerade AB berechnet und den Winkel η oder seinen Nebenwinkel $180^0 - \eta$ mit Hilfe eines

[1] Wären die Winkel mit ungleicher Genauigkeit gemessen, so müsste die Vertheilung des Gesammtfehlers mit Rücksicht auf diese verschiedene Genauigkeit vorgenommen werden. (§. 268.)

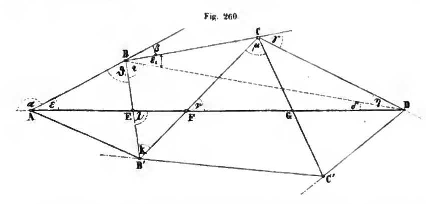
in E aufgestellten Theodolithen an CE anträgt, wodurch sich z. B. der Punkt F ergibt; oder man findet einen Punkt z. B. G dadurch, dass man auf AC eine Abscisse AH = l abmisst und von H aus in senkrechter Richtung zu AC die Ordinate HG = l tg ε abträgt.

3) Es lassen sich keine so einfachen Hilfsfiguren mehr abstecken, wie in Nr. 1 und Nr. 2 angenommen wurden.

In diesem Falle bleibt nichts anderes übrig, als zwischen den gegebenen Endpunkten der gesuchten Geraden ein Netz von Dreiecken abzustecken, dasselbe genau zu messen und aus den gemessenen Grössen zu berechnen, an welchen Stellen die Dreiecksseiten von der auszusteckenden geraden Linie geschnitten werden, endlich diese Schnittpunkte auf den zugehörigen Dreiecksseiten abzutragen und dauerhaft zu bezeichnen.

Es seyen (Fig. 260) A und D die gegebenen Punkte und es sollen einige andere Punkte E, F, G der Geraden AD auf dem Felde bestimmt werden.

Fig. 260



Zu dem Ende suche man auf dem Terrain zunächst die Dreieckpunkte B, C, B', C' so aus, dass sie nicht nur gute Standorte für den Theodolithen und Aussicht nach je drei oder vier anderen Punkten des Dreiecknetzes gewähren, sondern dass auch die einzelnen dadurch bestimmten Dreiecke keine zu spitzen oder zu stumpfen Winkel erhalten und auf denjenigen Seiten derselben, welche die Gerade AD schneiden, bequem und sicher die erforderlichen Längen abgemessen werden können. Eine der letzteren Seiten, z. B. B'C, wähle man als Grundlinie des Netzes, messe sie mit Messlatten zweimal sehr genau ab, und bezeichne wieder, der späteren Bestimmung des in

ihr liegenden Schnittpunkts (F) wegen, grössere Abtheilungen von etwa 500 Fuss durch kleinere Pfähle. Es sey die auf den Horizont reducirte Länge von B'C = g.

Nun messe man mit einem guten Theodolithen in den Netzpunkten A, B, C, D, C', B' alle Winkel, welche daselbst gemessen werden können, so genau als möglich, und gleiche je drei zu einem Dreiecke gehörige auf die in der vorigen Nummer angegebene Weise auf 180° aus.

Mit Hilfe dieser Winkel und der Seite g lassen sich alle Dreieckseiten berechnen; denn aus dem Dreieck B'CB findet man BC = b und BB' = e; mit e aber aus dem Dreieck BB'A die Seiten AB = a und AB' = a'; mit g erhält man aus dem Dreiecke CC'B' die Seite B'C' = b' und CC' = f; mit f aber aus dem Dreiecke CC'D die Seite CD = c und C'D = c'.

Würde man den Winkel BAE = ε kennen, so liesse sich aus dem Dreiecke ABE die Seite BE = x berechnen, da ausser ε der Winkel ABE und die Seite AB = a bekannt wäre; folglich liesse sich auch der Punkt E der Geraden AD abstecken. Alsdann könnte man auch aus dem Dreiecke EB'F die Seite B'F = y berechnen und folglich auf dem Felde den Punkt F erhalten. Schliesslich erhielte man die Seite CG = z aus dem Dreiecke FCG und damit den Punkt G auf dem Felde.

Der Winkel ε ist aber leicht zu finden. Denn da man in dem Dreiecke BCD die zwei Seiten b, c und den von ihnen eingeschlossenen Winkel BCD = $180^0 - \gamma$ kennt, so findet man zunächst $\eta - \varepsilon_1$ aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\eta - \varepsilon_1) = \frac{b - c}{b + c} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \gamma,$$

und da ferner die Winkelsumme

$$\eta + \varepsilon_1 = \gamma$$

ist, so sind η und ε_1 als bekannt anzusehen.

Man kennt somit auch den Winkel ABD = D + i − ε_1 = $180^0 - (\beta + \varepsilon_1)$, und da aus dem Dreiecke BCD die Seite

$$BD = \frac{b \sin \gamma}{\sin \eta} = i$$

folgt, so sind in dem Dreiecke ABD wiederum zwei Seiten AB = a, DB = i und der von ihnen eingeschlossene Winkel

$$ABD = 180^0 - (\beta + \varepsilon_1)$$

bekannt; desshalb ist auch

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varepsilon - \delta) = \frac{i - a}{i + a} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\beta + \varepsilon_1).$$

Weil aber die Winkelsumme

$$\varepsilon + \delta = \beta + \varepsilon_1$$

ist, so findet man aus den beiden letzten Gleichungen die Winkel δ und ε selbst und damit auch die Seite

$$AD = \frac{e \sin (\beta + \varepsilon_1)}{\sin \varepsilon} = \frac{b \sin \gamma \sin (\beta + \varepsilon_1)}{\sin \varepsilon \sin \eta}.$$

Die Länge BE = x ergibt sich aus dem Dreiecke ABE, in welchem die drei Winkel und eine Seite AB = a bekannt sind: es ist nämlich

$$x = \frac{a \sin \varepsilon}{\sin (\varepsilon + \vartheta)}.$$

Zieht man x von e ab, so kennt man in dem Dreiecke EB'F eine Seite B'E = e — x und alle Winkel, folglich findet man die Seite B'F oder

$$y = \frac{(e - x) \sin \lambda}{\sin (\varkappa + \lambda)}.$$

Endlich ergibt sich aus dem Dreiecke FCG, in welchem abermals alle Winkel und eine Seite FC = g — y bekannt sind, die Entfernung des Punktes G von C oder

$$z = \frac{(g - y) \sin \nu}{\sin (\mu + \nu)}.$$

Sind die Werthe von x, y, z genau berechnet, so messe man sie auf den Dreiecksseiten BB', B'C, CC' von den Punkten B, B', C aus ganz genau ab, und ist dieses geschehen, so hat man die drei Punkte E, F, G der abzusteckenden Geraden AB gefunden.

4) Aussteckung einer sehr langen geraden Linie durch besondere Hilfsmittel, namentlich Lichtsignale.

Wenn man es scheut, das eben beschriebene Verfahren zur Aussteckung einer langen geraden Linie, welches stets sicher zum Ziele führt, anzuwenden, so kann man wohl auch, wenn das Terrain nicht stark durchschnitten ist, von dem nachfolgenden Verfahren Gebrauch machen, welches der Ingenieur Fr. Andriessen beim Baue der rheinischen Eisenbahn ausgeführt und in dem ersten Bande der Zeitschrift des hannoverschen Architekten- und Ingenieurvereins wie folgt beschrieben hat:

»Meine Baustrecke von Köln bis Düren war $5\frac{1}{2}$ preussische Meilen lang und bestand nur aus drei geraden Linien, welche durch Uebergangscurven verbunden waren. Die erste Gerade, von Köln bis zum Königsdorfer Tunnel, war 1 Meile lang; die zweite, von dem genannten Stollen bis zur Merzenicher Haide, hatte $2\frac{1}{2}$ Meile Länge; und die dritte vor Düren war ungefähr eine $\frac{1}{2}$ Meile lang.

Wegen der vielen Dünste war es nicht möglich, bei Tage die beiden ersten Geraden mit Sicherheit auszustecken; nachdem ich aber die erste eine Meile lange Gerade bei Nacht ganz genau ausgesteckt hatte, ging ich zu der weit schwierigeren Bestimmung der zweiten geraden Linie von $2\frac{1}{2}$ Meilen Länge, deren Endpunkte festlagen, über.

Der östliche Endpunkt dieser Linie war auf einem 20′ hohen Hügel am Königsdorfer Tunnel. Die Aussicht nach der Merzenicher Haide war jedoch auf diese lange Entfernung durch drei hohe Eichenwaldungen so sehr verdeckt, dass nur zwei Stellen mittelst Fernrohrs gesehen werden konnten, die eine 4000 Fuss und die andere $1\frac{1}{2}$ Meilen von dem östlichen Endpunkte entfernt.

Das westliche Ende der Geraden, auf der Merzenicher Haide gelegen, war hinter der letzten Waldung ganz und gar versteckt und alle Auszüge aus Katasterplänen dienten nur dazu, die Stellung der Zwischenpunkte annähernd zu ermitteln. Eine Linie nach diesen Ermittelungen durch die Eichenwaldungen zu schlagen, war aber zu gefährlich, da jede Eiche 100 Thaler kostete. Ich sah mich also genöthigt, die Nacht zu Hilfe zu nehmen und folgendermassen zu verfahren.

Am westlichen Endpunkte auf der Merzenicher Haide liess ich Tags vorher eine grosse Theertonne aufrichten, die der daselbst befindliche Aufseher um 9 Uhr Abends anzuzünden hatte. Einen zweiten Aufseher stellte ich mit einer hohen Stange, woran eine grosse Laterne hing auf die $1\frac{1}{2}$ Meile vom östlichen Standpunkte entfernte Stelle, und zwar so viel als möglich in die Richtung der durch das Fernrohr sichtbaren beiden Endpunkte. Dieser Aufseher wurde angewiesen alle zwischen 9 und $9\frac{1}{2}$ Uhr sichtbaren Signale, als für ihn gültig, genau zu befolgen. Eben so ausgerüstet wurde ein dritter Aufseher auf die 4000 Fuss vom östlichen Endpunkte entfernte Stelle, welche nahezu in der gegebenen Richtung lag, gestellt und beauftragt, die zwischen $9\frac{1}{2}$ und 10 Uhr erfolgenden Signale zu beachten.

Da bei Nacht alles Winken mit Laternen nichts hilft, in so ferne die Vergleichungsgegenstände unsichtbar sind, und da auch zwei Laternen, wovon die eine feststeht und die andere verrückt wird, desshalb nichts nutzen, weil man von Weitem nicht entscheiden kann, welche Laterne verrückt wurde: so liess ich neben und hinter mir eine Anzahl Raketen so aufpflanzen, dass sie, angezündet, in schräger Richtung nach Norden oder Süden fliegen oder senkrecht in die Höhe steigen mussten.

Mit diesen Raketen dirigirte ich in den bestimmten Zeiträumen die beiden Einrichtungslaternen, nachdem ich vorher das Fadenkreuz des Theodolithen, der auf dem östlichen Endpunkte aufgestellt war, nach der Mitte des rothen am Horizonte sichtbaren Scheins der brennenden Theertonne gerichtet hatte. Beim ersten Einrücken der $1\frac{1}{2}$ Meile entfernten Laterne musste ich drei Raketen links steigen lassen, ehe dieselbe in die Linie kam, dann eine rechts, weil sie ein wenig durch die Linie gerückt war, und darauf noch eine links. Hierauf liess ich das Signal mit den senkrecht steigenden grossen Leuchtkugeln geben, womit der erste Punkt bestimmt war. Die zweite Einrichtungslaterne stand der abzusteckenden Richtung näher, so dass ihre Stellung mit drei entgegengesetzt fliegenden Raketen und einer Leuchtkugel bestimmt werden konnte. Mit gutem Vertrauen liess ich am folgenden Tage die 4000 Fuss lange Linie rückwärts verlängern und die Waldungen durchschlagen. Diese Linie traf genau auf den $1\frac{1}{2}$ Meile entfernten Punkt und wich von dem westlichen $2\frac{1}{2}$ Meilen entfernten Endpunkte nur $2\frac{1}{2}$ Fuss ab; ein geringer Fehler, welcher leicht zu verbessern war."

2) Das Abstecken senkrechter und paralleler Linien.

§. 237.

Aus der Instrumentenlehre ist bekannt, wie man mit Hilfe des Winkelkreuzes oder der Winkeltrommel, mit dem Winkelspiegel oder dem Prismenkreuze, mit dem Spiegelsextanten oder dem Spiegelkreise, endlich wie man mit der Bussole oder dem Theodolithen eine Linie abstecken kann, welche auf einer andern gegebenen Linie in einem gegebenen Punkte derselben senkrecht steht: von diesen Absteckungen ist daher hier nicht mehr die Rede, wenn sie unter so günstigen Terrainverhältnissen vorzunehmen sind, wie wir sie früher

vorausgesetzt haben. Wenn aber in Folge der Beschaffenheit gegebener Umstände Schwierigkeiten auftreten, welche nur durch mittelbare Messungen zu beseitigen sind, so reichen die in der Instrumentenlehre behandelten Auflösungen von Messungsaufgaben nicht mehr aus und müssen desshalb hier einige besondere gegeben werden.

Diese Aufgaben liessen sich ebenso wie ihre Lösungen sehr vervielfältigen; wir werden aber von beiden nur eine kleine Auswahl treffen, um dem Leser die Gelegenheit zu eigenen Erfindungen nicht zu entziehen.

§. 238.

Aufgabe. Eine gerade Linie und ein Punkt in ihr sind gegeben; man soll in diesem Punkte eine Senkrechte errichten.

1) Man besitze zur Lösung dieser Aufgabe nur eine oder zwei Messketten und mehrere Fluchtstäbe.

Die gegebene Linie sey A B und C der gegebene Punkt (Fig. 261). Hat man zwei Messketten bei der Hand, so kann man auf dem Felde das Verfahren nachahmen, dessen man sich auf dem Reissbrette bedient, um eine Senkrechte zu errichten: man misst nämlich von C aus zwei gleiche Stücke C A und CB, wovon jedes kleiner ist als die Kette, ab, befestigt in A und B je eine Kette und spannt dieselbe gegen F und E hin so aus, dass sie sich in gleichen Abständen (DF, DE) von ihren Enden begegnen. Der Schnittpunkt D beider Ketten ist ein Punkt der gesuchten Senkrechten CD. Die Abstände DF und DE können nach Belieben 2, 3, 4, 5 oder mehr Fuss lang gemacht werden.

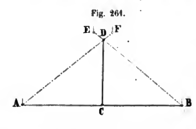
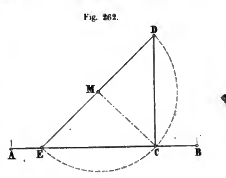


Fig. 261.

Hat man nur eine Kette, so muss jeder der Abstände CA und CB bedeutend kleiner seyn als die halbe Kettenlänge, und es sind alsdann die beiden Kettenstäbe in A und B festzuhalten, während der Geometer die Kette in der Mitte fasst und sich damit so lange bewegt, bis deren beide Hälften (D A und D B) gleich stark angespannt sind, wodurch sich der Punkt D der abzusteckenden Senkrechten CD ergibt.

Noch einfacher ist das in Fig. 262 dargestellte Verfahren. Man lasse nämlich die beiden Kettenstäbe in dem gegebenen Punkte C und einem anderen Punkte E der Geraden AB, welcher etwa 30 Fuss von C entfernt ist, festhalten und bestimme den Punkt M, welcher der Kettenmitte entspricht, durch Anspannen beider Kettenhälften. Lässt man hierauf den Gehilfen von C sich gegen D hin bewegen, seinen Stab in die Richtung EM einstellen und die Kette anspannen, so bezeichnet dessen Kettenstab einen zweiten Punkt D der Senkrechten, welche durch C geht. Denn da nach der Construction $ME = MC = MD$, so geht durch die drei Punkte E, C, D ein Kreis, dessen Durchmesser ED ist, der Winkel ECD liegt im Halbkreise und ist folglich ein rechter.

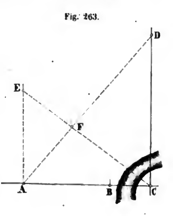
Fig. 262.



2) Der gegebene Punkt C der Geraden AB sey unzugänglich, man besitze aber ein Prismenkreuz oder einen Winkelspiegel.

Man errichte nach Fig. 263 in A oder irgend einem anderen Punkte der Geraden AB eine Senkrechte zu dieser. Ist E ein Punkt derselben, so ist dadurch auf dem Felde die Linie CE gegeben. In dieser kann man mit dem Prismenkreuze oder dem Winkelspiegel[1] leicht den Punkt F suchen, welcher einer Geraden AF angehört, die durch den Punkt A geht und auf CE senkrecht steht. Denkt man sich vorläufig die Senkrechte CD gezogen und AF bis D verlängert, so entstehen

Fig. 263.



[1] Wie mit dem Prismenkreuze von einem gegebenen Punkte auf eine gegebene Gerade eine Senkrechte gefällt wird, ist in Bd. I. S. 174 gezeigt worden; der Winkelspiegel wird in gleicher Weise angewendet, erfordert aber, dass man sich durch eine besondere Operation fortwährend davon überzeuge, ob man sich in der gegebenen Geraden bewegt oder nicht.

mehrere ähnliche und rechtwinkelige Dreiecke, welche dazu dienen, die Länge FD zu berechnen, wenn zwei andere Längen gemessen sind. Es ist nämlich, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke DFC und AFE,

$$DF = \frac{AF \cdot CF}{EF},$$

und wegen der Aehnlichkeit der rechtwinkeligen Dreiecke ACF und AEF:

$$CF = \frac{AF \cdot AF}{EF}.$$

Stellt man diesen Werth von CF in die erste Gleichung ein und setzt die gemessenen Linien AF = a und EF = b, so erhält man

$$DF = \frac{a^3}{b^2} = c.$$

Wird die hieraus berechnete Länge C von F aus in der Richtung AF abgemessen, so erhält man den Punkt D, welcher der gesuchten Senkrechten CD angehört und deren Fusspunkt C unzugänglich ist.

3) Die gegebene Gerade AB und die abzusteckende Senkrechte CD sind sehr lang und es wird der rechte Winkel beider mit grosser Genauigkeit verlangt.

In diesem Falle bleibt nichts anderes übrig, als die Absteckung mit Hilfe eines Theodolithen vorzunehmen. Dieser wird erst centrisch über dem gegebenen Punkte C aufgestellt und dazu benützt sich zu überzeugen, ob dieser Punkt genau genug in der Geraden AB liegt, was nach §. 235 geschehen kann. Alsdann stellt man das Fadenkreuz des Fernrohrs genau auf den entferntesten Endpunkt (A) der gegebenen Geraden ein, liest beide Nonien ab, zeichnet die Ablesungen auf, verstellt mit Hilfe derselben das Fernrohr genau um 90° und richtet nun in die Abschlinie, so weit als möglich entfernt, ein Signal D ein. Um sich von der richtigen Stellung dieses Signals zu überzeugen, kann man das Fernrohr nochmals auf A zurückführen, die Nonien wiederholt ablesen und zusehen, ob der Unterschied gegen die Ablesung bei der Einstellung auf D wirklich genau 90° beträgt oder nicht. Dieselbe Untersuchung macht man auch für den Winkel BCD, indem man das Fadenkreuz erst wieder auf D und dann auf B einstellt und in beiden Fällen abliest. Wenn sich keine Abweichung zeigt, oder wenn eine geringe an der Stellung des Signals D verbessert ist, so

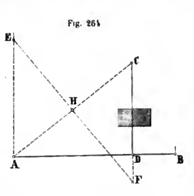
kann man in die Linie CD nach Bedürfniss noch eine oder mehrere andere Signalstangen nach §. 235 einrichten.

§. 239.

Aufgabe. Eine gerade Linie und ein Punkt ausser ihr sind gegeben; man soll von diesem Punkte eine Senkrechte auf die Gerade errichten.

1) Die Lösung dieser Aufgabe mit dem Prismenkreuze oder dem Winkelspiegel ist bereits bekannt und braucht in Bezug auf den Winkelspiegel nur noch durch die Bemerkung vervollständigt zu werden, dass dieser stets fordert, dass die gegebene Gerade durch mindestens zwei Stäbe, welche beide auf der rechten oder beide auf der linken Seite des Geometers stehen, bezeichnet werden, damit sich der letztere hierdurch überzeugen könne, ob er sich beim Suchen des Fusspunktes der Senkrechten in der gegebenen Geraden bewege oder nicht. Diese Forderung, welche nach §. 234 manchmal schwer zu erfüllen ist, ist für das Prismenkreuz nicht nöthig, wesshalb dasselbe auch in Hinsicht der Lösung der vorstehenden Aufgabe dem Winkelspiegel vorzuziehen ist.

2) Es befinde sich in der Richtung der abzusteckenden Senkrechten CD ein Hinderniss, welches das Visiren erschwert. (Fig. 264.)



Eine unmittelbare Lösung durch das Prismenkreuz oder den Winkelspiegel ist hier nicht möglich, während eine mittelbare Lösung keine Schwierigkeiten macht. Man errichte nämlich in A eine Senkrechte AE zur gegebenen Geraden AB, halbire die Linie AC in H und lege durch einen beliebigen Punkt E der Senkrechten AE die Gerade EH und verlängere dieselbe, bis HF = HE wird. Dadurch erhält man den Punkt F, welcher in der gesuchten Senkrechten liegt; will man nun deren Fusspunkt D haben, so braucht man nur mit Hilfe des Prismenkreuzes von F aus eine Senkrechte auf AB zu fällen, womit alsdann die Aufgabe gelöst ist.

Dass der vorhin bestimmte Punkt F wirklich in der Senkrechten

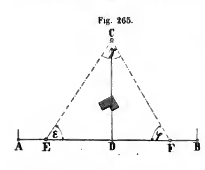
CD liegt, geht aus der folgenden Betrachtung hervor. Nimmt man erst an, dass CDF senkrecht steht zu AB, so ist, weil auch AE senkrecht zu AB, das Dreieck CHF dem Dreiecke AEH ähnlich, und es findet desshalb die Gleichung statt:

$$AH \cdot HF = CH \cdot EH$$

Macht man nun, wie wir gethan haben, $AH = CH$, so muss, wenn die Gleichung fortbestehen soll, nothwendig $HF = EH$ werden. Umgekehrt ist also zu schliessen, dass, wenn man bei der hier befolgten Operation $HF = EH$ macht, der Punkt F in der gesuchten Senkrechten CD liegen müsse.

3) Der Punkt C ist sehr weit von der gegebenen Geraden AB entfernt und es wird der Fusspunkt D der Senkrechten mit grosser Genauigkeit verlangt. (Fig. 265.)

Fig. 265.



Wenn diese Bedingungen stattfinden, so wird man in der Linie AB ein gerades Stück EF, welches erstens so liegt, dass man von E und F nach C visiren kann, und das zweitens wo möglich eben so gross als CD, ausserdem aber nicht vielmal kleiner als CD ist, so genau als möglich abstecken und mit Messlatten ausmessen. Die auf den Horizont reducirte Länge der Linie EF heisse c. Ausser dieser Länge misst man in den Punkten E, F, C auch noch die drei Winkel des Dreiecks EFC mit einem Theodolithen und gleicht dieselben auf die Summe von 180° aus. Sollte der Punkt C unzugänglich seyn, so genügt es, die Winkel bei E und F allein zu messen.

Nennt man die den Punkten E, F, C entsprechenden Horizontalwinkel beziehlich ε, φ, γ und heisst x der Abstand des Punktes D von E, so ist $DF = c - x$ und daher

$$x \operatorname{tg} \varepsilon = (c - x) \operatorname{tg} \varphi.$$

Aus dieser Gleichung findet man nach einer ganz einfachen Umformung:

$$x = \frac{c \sin \varphi \cos \varepsilon}{\sin (\varepsilon + \varphi)} = \frac{c \sin \varphi \cos \varepsilon}{\sin \gamma}.$$

Misst man diese Länge von E gegen F hin genau ab (wobei sich die von der ersten Messung dieser Linie bekannten Ergebnisse

mit benützen lassen), so erhält man den gesuchten Punkt D, von dem aus mit dem Theodolithen die Senkrechte CD theils nach C hin, bis an das Hinderniss zwischen C und D, theils auf der entgegengesetzten Seite von AB abgesteckt werden kann, wenn das Fernrohr erst auf A oder B eingestellt und dann um 90° gedreht wird.

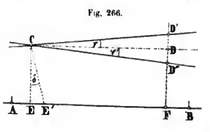
§. 240.

Aufgabe. Eine gerade Linie ist gegeben und ein Punkt ausser ihr; es soll durch diesen Punkt eine Parallele zu jener Geraden abgesteckt werden.

Diese Aufgabe kommt in der Praxis sehr oft vor und es können die Umstände, unter denen sie zu lösen ist, sehr mannichfaltig seyn, sey es, weil das Terrain mehr oder weniger Hindernisse darbietet, oder sey es, weil die Auswahl der Messinstrumente beschränkt ist, oder sey es endlich, weil bald eine grössere, bald eine geringere Genauigkeit der Absteckung gefordert wird. Um nicht weitläufig zu werden, wollen wir die hier zu besprechenden Fälle nicht nach den dabei anzuwendenden Instrumenten, sondern nach den Methoden der Absteckung eintheilen.

1) Absteckung paralleler Linien mit Hilfe von Senkrechten, welche gleiche Länge haben.

Fig. 266.



Ist AB die gegebene Gerade und C der gegebene Punkt, so hat man vor allen Dingen die Senkrechte CE herzustellen und zu messen, dann aber in irgend einem Punkte der Geraden AB, etwa in F oder in B selbst eine Senkrechte FD zu errichten und diese der CE gleich zu machen. Das Prismenkreuz wird hier wieder die besten Dienste thun, namentlich dann, wenn die Punkte A und B unzugänglich oder so gelegen seyn sollten, dass man von einem zum andern nicht visiren kann.

Bei dieser Absteckung kommt es weniger auf scharfe Bestimmung der rechten Winkel bei E und F, als vielmehr darauf an, dass die Punkte E und F genau in der Geraden AB liegen, und dass die Senkrechten CE und DF gleich lang sind. Denn nimmt

man an, dass in Fig. 266 der Winkel CEF um den kleinen Winkel ECE' $= \delta$ falsch bestimmt worden wäre, während BFD richtig, d. h. $= 90^0$ ist, so würde die Wirkung dieses Fehlers darin bestehen, dass man statt des richtigen Abstandes CE = a den unrichtigen CE' = FD' von F aus abtrüge, wodurch statt der Parallelen CD die Richtung CD' erhalten würde, die mit CD einen Winkel φ bildete, dessen Grösse sich aus der leicht aufzufindenden Gleichung:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{DD'}{CD} = \frac{1 - \cos \delta}{\cos \delta} \cdot \frac{a}{b} = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \delta}{\cos \delta} \cdot \frac{a}{b},$$

in welcher CD = EF = b gesetzt ist, bestimmen liesse. Der erste Ausdruck für tg φ kann vereinfacht werden, wenn man ihn mit cos δ dividirt und

$$\sec \delta = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} = 1 + \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \delta$$

setzt, was hier ohne Zweifel erlaubt ist. Dadurch erhält man

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a \operatorname{tg}^2 \delta}{2 b}.$$

Berücksichtigt man ferner, dass φ und δ immer nur kleine Winkel sind, so kann man weiter, wenn diese Winkel in Minuten ausgedrückt werden,

$$\operatorname{tg} \varphi = \varphi \operatorname{tg} 1' \text{ und } \operatorname{tg} \delta = \delta \operatorname{tg} 1'$$

nehmen und desshalb auch

$$\varphi = \frac{a \delta^2 \operatorname{tg} 1'}{2 b} = \frac{a d^2}{6875 b} \text{ Min.} \quad . \quad . \quad . \quad (184)$$

finden. Hat man endlich die Absicht, δ als einen Theil des rechten Winkels, welcher 5400 Minuten umfasst, auszudrücken, so kann man, unter p einen kleinen ächten Bruch verstehend,

$$\delta = 5400 \text{ p Minuten}$$

setzen, wodurch sich schliesslich der Werth von

$$\operatorname{tg} \varphi = 1{,}2345 \, p^2 \frac{a}{b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (185)$$

und jener von

$$\varphi = 4240 \cdot p^2 \cdot \frac{a}{b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (186)$$

ergibt. Wäre z. B. p = 0,01, also $\delta = 54$ Minuten, und betrüge a den zehnten Theil ven b, so fände man

$$\varphi = 0{,}0424 \text{ Min.} = 2{,}54 \text{ Sek.}$$

Nehmen wir jetzt an, die Winkel bei E und F seyen richtig, diese Punkte selbst aber, oder die von ihnen aus abgemessenen

Senkrechten EC, FD unrichtig bestimmt, so dass in der Richtung FD statt des Punktes D der Punkt D'' erhalten würde, welcher um das Stückchen $DD'' = \Delta a = q\, a$ (wobei q wieder ein kleiner Bruch ist) falsch liegt: so erhielte man statt der Parallelen CD die Richtung CD'', welche mit jener einen Winkel φ' bildete, der sich aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} \varphi' = q \frac{a}{b} \quad \ldots \ldots \quad (187)$$

ergäbe. Wendet man auch hier die erlaubte Näherungsformel $\operatorname{tg} \varphi' = \varphi' \operatorname{tg} 1'$ an, so erhält man unmittelbar den Winkel

$$\varphi' = 3438\, q \frac{a}{b} \quad \ldots \ldots \quad (188)$$

Nimmt man wieder beispielsweise $q = 0{,}01$ oder $\Delta a = 0{,}01\, a$ und $b = 10\, a$ an, so wird $\varphi' = 3{,}438$ Min. $= 206{,}3$ Sekunden, also $\varphi' = 81\, \varphi$, während die relativen Messungsfehler im Winkel (p) und in der Senkrechten (q) einander gleich sind. Lässt man diese Gleichheit der relativen Fehler und der Verhältnisse von a und b fortbestehen, so wird allgemein

$$\operatorname{tg} \varphi = 1{,}2345\, p \operatorname{tg} \varphi' \quad \ldots \ldots \quad (189)$$

oder mit Rücksicht auf die Kleinheit der Winkel φ und φ':

$$\varphi = 1{,}2345\, p\, \varphi' \quad \ldots \ldots \quad (190)$$

Soll die Frage beantwortet werden, bei welchen relativen Messungsfehlern die Folgen in Bezug auf die abzusteckende Parallele einander gleich sind, so hat man $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi'$ zu setzen und daraus das Verhältniss von

$$\frac{q}{p} = 1{,}2345\, p \quad \ldots \ldots \quad (191)$$

zu entwickeln, welches lehrt, dass der relative Fehler in einer Senkrechten nur den $(1{,}2345\, p)^{\text{ten}}$ Theil vom relativen Fehler im rechten Winkel betragen darf, wenn die Wirkungen auf die abzusteckende Parallellinie gleich werden sollen.

2) Absteckung von Parallellinien mittelst der Wechselwinkel.

Diese Winkel können eine beliebige Grösse haben, also auch rechte seyn. Hätte man daher nur ein Prismenkreuz oder einen Winkelspiegel statt eines Theodolithen oder Spiegelkreises zur Verfügung, so müsste man, um die vorliegende Aufgabe zu lösen, von dem gegebenen Punkte C auf die gegebene Gerade AB eine Senkrechte CD fällen und an diese bei C den rechten Winkel ECD = ADC

antragen. Wäre E der gegebene Punkt, durch den eine Parallele zu AB gelegt werden sollte, ohne dass man zu ihm gelangen könnte, so würde man, um ausser dem gegebenen noch einen Punkt C der Parallelen zu erhalten in einem beliebigen Punkte D der Geraden AB eine Senkrechte CD errichten und auf dieser mit dem Prismenkreuze oder dem Winkelspiegel den Punkt C bestimmen, in welchem sie von einer durch E gehenden und zu ihr senkrechten Geraden EC geschnitten wird.

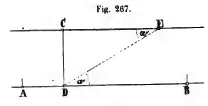


Fig. 267.

Kann man in dem gegebenen Punkte E und in irgend einem Punkte D der Geraden AB ein winkelmessendes Instrument, z. B. einen Theodolithen aufstellen, so messe man in D den Winkel BDE $= \omega$, stelle hierauf den Theodolithen in E auf, richte das Fernrohr nach D, lese die beiden Nonien ab, drehe mit Hilfe dieser Ablesungen die Alhidade genau um den Winkel ω in der Richtung von D nach C hin und stecke in der neuen Abschlinie das Signal C aus, so ist offenbar EC parallel zu AB. Eine einfache Ueberlegung lehrt, wie man zu verfahren hätte, um den Winkel ω auch mit dem Spiegelsextanten, dem Spiegelkreise, der Bussole oder dem Messtische in D aufzunehmen und an ED anzutragen.

3) Absteckung der Parallellinien mit Hilfe von ähnlichen Dreiecken.

Diese Art der Absteckung ist fast die einzige, wenn man bloss mit Kette und Stäben versehen ist.

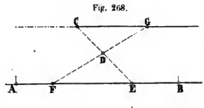


Fig. 268.

Soll durch C eine Parallele zu AB gelegt werden, so kann man nach Fig. 268 zwei sich schneidende Gerade CE und FD, wovon eine durch C geht und welche beide in der Geraden AB endigen, abstekken, die Stücke CD $=$ a, DE $=$ b, DF $=$ c messen und hierauf den Punkt G der gesuchten Parallelen CG dadurch bestimmen, dass man FD verlängert und

$$DG = x = \frac{ac}{b}$$

macht. Die Richtigkeit dieses Verfahrens kann sich der Leser selbst beweisen, so wie er auch leicht einsehen wird, dass man statt der Punkte E und F auch die Punkte B und A oder doch einen von ihnen zur Absteckung benützen kann.

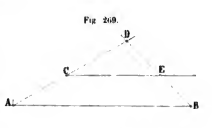


Fig. 269.

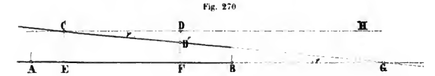
Kann oder will man das vorstehende Verfahren nicht anwenden, so lege man wie in Fig. 269 durch C die Gerade CA und verlängere dieselbe bis zu einem Punkte D, der so liegt, dass man von ihm nach dem Punkte B der Geraden AB sehen und messen kann. Ist $AC = m$, $CD = n$, $DB = r$ gemessen, so mache man

$$DE = z = \frac{n\,r}{m + n}$$

und es ist die Parallele CE gefunden; denn dadurch, dass DE die eben berechnete Länge z erhalten hat, ist das Dreieck DCE dem Dreiecke DAB ähnlich und folglich die CE der AB parallel geworden. Es versteht sich von selbst, dass man statt B jeden anderen gut gelegenen Punkt der Geraden AB benützen, und dass man, wenn das Terrain nicht hindert, $n = m$ und folglich $z = \frac{1}{2}\,r$ machen kann.

4) Absteckung der Parallellinien durch Benützung ausserordentlich weit entfernter Gegenstände. Da zwei gerade Linien einen um

Fig. 270.



so kleineren Winkel mit einander bilden, in je grösserer Entfernung sie sich schneiden, so kann man durch Benützung eines sehr entfernten Schnittpunkts Linien abstecken, welche nahezu parallel sind. Hat man demnach durch C eine Parallele zu der Geraden AB, in deren Verlängerung ein sehr weit entfernter Gegenstand G, z. B. ein Kirchthurm, ein Haus, ein Baum, ein Signal etc. sichtbar ist, abzustecken, so braucht man nur von C aus den Stab D'' in die

Richtung CG einzustellen, und es wird dadurch die Aufgabe um so genauer gelöst seyn, je weiter G von C entfernt ist.

Wie gross die Genauigkeit ist, kann man in jedem einzelnen Falle leicht beurtheilen. Bezeichnet nämlich

a die Entfernung des Punktes C von der Geraden AB = CE,
b den Abstand der Senkrechten CE und D''F von einander,
c die Entfernung des Gegenstandes G vom Punkte E,
d die Abweichung DD'' der wahren Richtung CD von der genäherten CG,
φ den Neigungswinkel dieser beiden Linien (CD, CG), und
q das Verhältniss, in welchem d zu a steht:

so ist nach der Figur

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{d}{b} = \frac{a}{c} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (192)$$

oder, wenn man berücksichtigt, dass φ immer nur ein kleiner Winkel ist,

$$\varphi = 3438 \cdot \frac{a}{c} \text{ Minuten.} \quad \ldots\ldots \quad (193)$$

Will man den Fehler der Absteckung lieber durch den Unterschied d ausdrücken, welcher zwischen den Abständen CE und D''F stattfindet, so dient dazu die Gleichung

$$d = b\,\frac{a}{c}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (194)$$

welche aus (192) folgt, und welche selbst wieder das Verhältniss dieses Fehlers zum Abstande a oder

$$q = \frac{d}{a} = \frac{b}{c} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (195)$$

liefert. Wenn also der Abstand D''F nur um den tausendsten Theil seiner Länge falsch werden dürfte, so müsste der Punkt G tausendmal so weit von E entfernt seyn als F; wäre demnach b = 100 Fuss, so müsste CG schon gleich 100·000 Fuss seyn, eine Forderung, die sich nur selten erfüllen liesse.

Unter der Voraussetzung aber, dass C wirklich so gross genommen werden könnte, als eben angegeben, und dass a = b = 100 Fuss wäre, betrüge der Winkel φ, unter welchem die abgesteckte Richtung CG gegen AB geneigt seyn würde, doch immer noch 3,438 Minuten. Hieraus ergibt sich wohl zur Genüge, dass von dem eben besprochenen Näherungsverfahren nur ein sehr beschränkter Gebrauch zu machen ist.

3) Das Abstecken der krummen Linien (Curven).

§. 241.

Eine der wichtigsten Vermessungsarbeiten der Bau-Ingenieure bildet das Ausstecken derjenigen Curven, durch welche je zwei sich schneidende gerade Richtungen von Strassen, Eisenbahnen oder Canälen mit einander verbunden werden müssen, um hiernach Verkehrswege herzustellen, deren horizontal projicirte Axen stetige Linien sind. Die Curven, welche zur Verbindung der als Tangenten erscheinenden Geraden dienen, sind fast ausschliesslich Kreisbögen und nur in wenigen Fällen Parabeln. Die Bedingungen, unter denen diese Curven auszustecken sind, können sehr verschieden seyn, und es werden sich theils hiernach, theils nach dem Grade der Genauigkeit, welchen die Arbeit besitzen soll, die Methoden der Absteckung richten. Wir werden hier diejenigen auseinandersetzen, welche wir in unserer Praxis angewendet und in den zu bezeichnenden Fällen bewährt gefunden haben. Alle diese Methoden setzen voraus, dass man die Berührungspunkte der abzusteckenden Curven vorher bestimmt habe, wesshalb zuvörderst die folgende Aufgabe zu lösen ist.

§. 242.

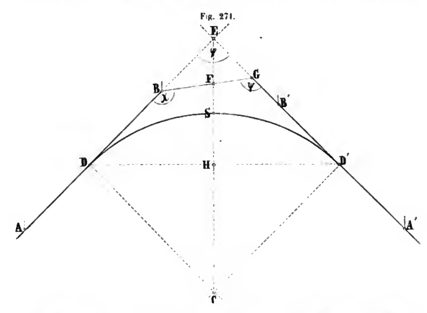
Aufgabe. Zwei gerade sich schneidende Richtungen sind ihrer Lage nach, und die sie verbindende Curve ist durch ihren kleinsten Krümmungshalbmesser gegeben: man soll die Entfernnng der Berührungspunkte von dem Schnittpunkte der Tangenten bestimmen.

Sind (Fig. 271) AB, A'B' die gegebenen Geraden, so hat man vor allen Dingen den Punkt E, in welchem sie sich schneiden, und den Horizontalwinkel φ, den sie daselbst einschliessen, zu bestimmen. Der Schnittpunkt E wird erhalten, indem man sich entweder in der Verlängerung von AB aufstellt und darin so lange vor- oder rückwärts geht, bis man auch in die verlängerte Linie A'B' gelangt; oder indem zwei bei A und A' stehende Geometer einen Gehilfen mit einer Signalstange gleichzeitig in die Linien AB und A'B' einrichten. Steht dessen Stange in den beiden Geraden, so bezeichnet sie offenbar deren Schnittpunkt.

Ist dieser Punkt zugänglich und kann von ihm aus jede der Berührungslinien AB, A'B' auf eine genügend lange Strecke gesehen werden, so hat die Messung des Winkels φ, welche mit dem

Theodolithen oder Spiegelkreise geschieht, keine Schwierigkeit und ist dieselbe aus den §§. 133, 146, 156 hinreichend bekannt. Sollte aber der Schnittpunkt E unzugänglich seyn, oder könnte man von ihm aus nur ein kurzes Stück der Linien AB und A'B' übersehen,

Fig. 271.



so müsste man den Winkel φ auf mittelbare Weise dadurch bestimmen, dass man in zwei geeigneten Punkten B und G der Geraden AB und A'B' die Winkel χ und ψ misst und daraus den Winkel

$$\varphi = \chi + \psi - 180^0$$

berechnet. Die Punkte B und G müssen so liegen, dass man nicht nur von einem zum andern und beziehlich nach A und A' sehen, sondern auch von B bis G messen kann. Denn die Länge der Linie $BG = e$ ist nöthig, um damit die Entfernungen $BE = g$ und $GE = b$, deren man später zur Absteckung der Berührungspunkte bedarf, zu berechnen. Wir setzen jetzt die Winkel φ und, wo wir sie bedürfen, die Seiten e, b, g als bekannt voraus.

Ist die Verbindungscurve DSD', welche die Geraden AB, A'B' in den Punkten D, D' berührt, ein **Kreis**, so ist dessen Krümmungshalbmesser eine constante Grösse r, welche hier ebenfalls gegeben ist. Denkt man sich in der Fig. 271 den Mittelpunkt C des Kreises DSD' bestimmt und denselben mit den Punkten D, D', E

verbunden, so entstehen zwei congruente rechtwinkelige Dreiecke CDE, CD′E, aus denen sofort die gesuchte Entfernung der Berührungspunkte D, D′ von E oder

$$ED = ED' = a = r \cot \tfrac{1}{2}\varphi \quad . \quad . \quad . \quad (196)$$

folgt. Misst man diese Länge a von E aus sehr genau auf den beiden Tangenten EA, EA′ ab, so erhält man auf dem Felde die Berührungspunkte D, D′, die mit hinreichend starken Pfählen dauerhaft bezeichnet werden. Sollte der Punkt E unzugänglich seyn, so hätte man selbstverständlich nur von B aus die Länge a — g und von G aus die Länge a — b abzumessen, um die Punkte D und D′ zu erhalten.

Sind die Geraden AB, A′B′ durch eine Parabel DSD′ mit einander zu verbinden, so wird der Scheitel S derselben stets in der Linie EF liegen, welche den Winkel φ halbirt, und es wird ihre Gleichung für rechtwinkelige oder Polarcoordinaten entweder bekannt seyn oder aus den gegebenen Bestimmungsstücken leicht gefunden werden können.

Es sey diese Gleichung für ein rechtwinkeliges System:

$$y^2 = px = 2rx, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (197)$$

wobei r den kleinsten Krümmungshalbmesser der Parabel bezeichnet, der Ursprung der Coordinatenaxen im Scheitel der Curve liegt und die den Winkel φ halbirende Linie EF die Abscissenaxe vorstellt. Nach einer bekannten Eigenschaft der gemeinen Parabel ist die Ordinate DH des Berührungspunktes D gleich

$$y = 2x \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi = r \cot \tfrac{1}{2}\varphi \quad . \quad . \quad . \quad (198)$$

und demzufolge die Entfernung des Berührungspunktes D vom Schnittpunkte E der Tangenten gleich

$$a' = \frac{y}{\sin \tfrac{1}{2}\varphi} = \frac{r \cot \tfrac{1}{2}\varphi}{\sin \tfrac{1}{2}\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (199)$$

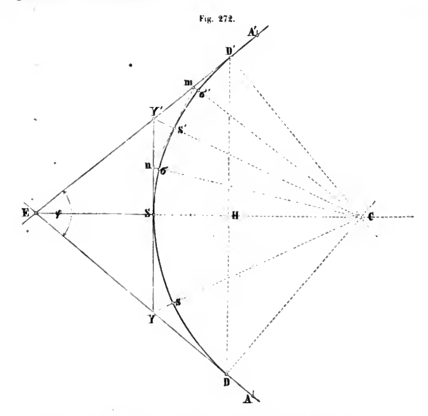
Wird diese Entfernung von E aus auf den Tangenten EA und EA′ abgemessen, so erhält man die gesuchten Berührungspunkte D und D′ der abzusteckenden Parabel.

§. 243.

Aufgabe. Es ist der Neigungswinkel (φ) der Tangenten einer Curve und diese selbst durch ihren Krümmungshalbmesser (r) gegeben: man soll die Entfernung des Scheitels (S) der Curve von dem Schnittpunkte (E) der Tangenten berechnen und abstecken.

In manchen Fällen ist der Scheitel der abzusteckenden Curve für deren Aussteckung selbst nöthig, in allen Fällen aber ist es gut, die Lage desselben zur Controle der Rechnung und Messung gesondert zu bestimmen.

Fig. 272.



Stellt in Fig. 272 die Curve DSD' einen **Kreisbogen** vom Halbmesser r vor, und sind D, D' dessen Berührungspunkte an den Tangenten EA, EA', welche zusammen den durch die Linie EC halbirten Winkel $AEA' = \varphi$ einschliessen, so ist aus bekannten geometrischen Gründen S der Scheitel des Kreises und $ES = c$ die gesuchte Entfernung. Denkt man sich in S eine Senkrechte zu EC errichtet, so stellt dieselbe eine Tangente des Kreises vor und es ist desshalb $SY = SY' = DY = D'Y' = d$.

Um die Länge d auszudrücken, verbinde man den Schnittpunkt Y mit dem Mittelpunkte C des Kreises DSA', so ist offenbar

$$DCY = SCY = \frac{1}{2}(90^0 - \frac{1}{2}\varphi) = 45^0 - \frac{1}{4}\varphi$$

und daher aus den rechtwinkeligen Dreiecken DCY oder SCY:

$$d = r \operatorname{tg}(45^0 - \frac{1}{4}\varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (200)$$

Mit Hilfe dieses Ausdrucks findet man die gesuchte Entfernung des Scheitels S oder

$$e = d \cot \frac{1}{2}\varphi = r \operatorname{tg}(45^0 - \frac{1}{4}\varphi) \cot \frac{1}{2}\varphi \quad . \quad (201)$$

Will man die Tangente YSY' dadurch abstecken, dass man die Punkte Y und Y' von E aus abmisst, so ist

$$EY = EY' = f = \frac{d}{\sin \frac{1}{2}\varphi} = \frac{r \operatorname{tg}(45^0 - \frac{1}{4}\varphi)}{\sin \frac{1}{2}\varphi} \quad (202)$$

zu nehmen. Der Schnittpunkt dieser Tangente und der Halbirungslinie EC gibt den Scheitel S, dessen Entfernung von E mit dem berechneten Werthe e übereinstimmen muss, wenn richtig gearbeitet wurde.

Ist die Curve DSD' ein **Parabelbogen**, so ist die Entfernung des Scheitels S von dem Punkte E durch die Gleichung

$$e' = \frac{1}{2} y \cot \frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2} r \cot^2 \frac{1}{2}\varphi, \quad . \quad . \quad (203)$$

welche auf der schon in dem Ausdrucke (198) benützten Eigenschaft der Parabel beruht, zu bestimmen, während die Länge EY = EY' oder

$$f = \frac{e'}{\cos \frac{1}{2}\varphi} = \frac{r \cos \frac{1}{2}\varphi}{2 \sin^2 \frac{1}{2}\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (204)$$

und dieselbe Entfernung der Schnittpunkte Y und Y' oder SY = SY' gleich

$$d' = e' \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2} r \cot \frac{1}{2}\varphi \quad . \quad . \quad . \quad (205)$$

ist. Steckt man mit Hilfe dieser Grössen die Punkte Y, S, Y' ab, so hat man damit nicht bloss den Scheitel der Parabel, sondern auch gleichzeitig deren Axen SC, SY bestimmt.

Die Richtung EC, in welcher sowohl der Scheitel der Parabel als der des Kreises liegt, steckt man am schnellsten und sichersten schon bei der Messung des Winkels φ aus, indem man nach der Bestimmung dieses Winkels und bei unverrücktem Stande des Instruments die Namen des Horizontalkreises auf Ablesungen einstellt, welche das arithmetische Mittel aus denjenigen sind, welche den Winkel φ lieferten. Sollte der Punkt E unzugänglich seyn, so könnte auch ES nicht unmittelbar gemessen werden; in diesem Falle ist aber eine Controle der Arbeit dadurch gegeben, dass man die von den Punkten B und G (Fig. 271) aus, bestimmte Tangente YY'

misst und zusieht, ob deren Länge genau = 2d oder 2d' ist, je nachdem der Bogen DSD' einem Kreise oder einer Parabel angehört. Findet diese Uebereinstimmung statt, so liefert der Mittelpunkt von YY' den Scheitel S, und eine Senkrechte in demselben die Halbirungslinie EC.

§. 244.

Aufgabe. Es sind die beiden Tangenten und Berührungspunkte eines Kreises von bekanntem Halbmesser gegeben: man soll den zwischen jenen Punkten enthaltenen Kreisbogen abstecken.

1) Absteckung der Curve durch Orthogonal-Coordinaten.

Bei dieser Methode wird jeder Berührungspunkt als Ursprung des rechtwinkeligen Coordinatensystems, jede Tangente als Abscissenaxe und jeder durch einen Berührungspunkt gezogene Halbmesser als Ordinatenaxe betrachtet. Kommt es bei der Absteckung nicht darauf an, dass die Bogenstücke gleich gross werden, so macht man die Abscissenunterschiede gleich; sollen aber die Bogenstücke gleich seyn, so müssen nothwendig die Abscissenunterschiede ungleich werden. Diese Verschiedenheit der Anforderungen veranlasst zwar zwei verschiedene Berechnungsweisen der Coordinaten, aber keineswegs einen Unterschied in der Art der Absteckung der Coordinaten selbst. Wir werden hier zunächst diese zwei Fälle und hierauf noch den Fall behandeln, in welchem der für die Absteckung gebotene Raum sehr beschränkt ist.

a) Die Abscissenunterschiede sollen gleich seyn.

Bezeichnet in Fig. 273 D den Berührungspunkt, DE die Abscissenaxe und DC die Ordinatenaxe, so ist für irgend einen Curvenpunkt p, dessen Abscisse Dm = x ist, die zugehörige Ordinate

$$y = r - \sqrt{r^2 - x^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (206)$$

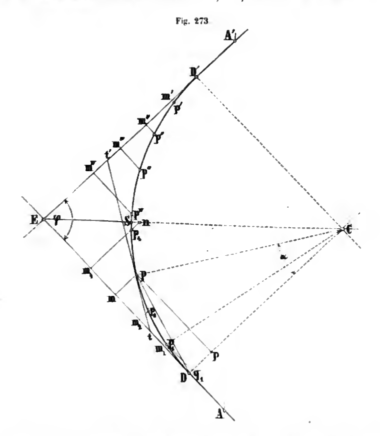
Da r gegeben ist, so lässt sich hieraus für jedes x das entsprechende y berechnen. Man wird zu dem Ende

$$\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{(r + x)(r - x)}$$

setzen, mit Hilfe der Logarithmen erst alle Wurzelwerthe herstellen und diese schliesslich von dem Halbmesser r abziehen, vorausgesetzt, dass man keine Tabelle besitzt, in der die gesuchten Ordinatenwerthe schon enthalten sind. Wir haben für unseren früheren

Gebrauch eine solche Tabelle theils selbst berechnet, theils berechnen lassen, und theilen sie nun im Anhange unter Nr. IX mit. Darin findet man die Coordinaten für r = 100 Fuss bis r = 7000 Fuss, und für Abscissenunterschiede von 10, 20, 25 und 50 Fuss.

Fig. 273



Da in den meisten praktischen Fällen die Grösse des Halbmessers innerhalb gewisser Gränzen beliebig gewählt werden darf, so kann man es fast immer dahin bringen, dass r einen der Werthe erhält, welche in der Tabelle dafür angenommen sind; man braucht also nur noch in wenigen Fällen die Coordinaten selbst zu rechnen.

Sind die Coordinatenwerthe bekannt, so beginnt die Absteckung der Curve damit, dass man auf den Tangenten DE, DE′ von den Berührungspunkten DD′ nur die Abscissen mit der Messkette oder mit Messlatten abmisst und ihre Endpunkte vorläufig bezeichnet.

Hierauf errichtet man in diesen Endpunkten mit Hilfe des Winkelspiegels oder Prismenkreuzes Senkrechte, misst darauf mit Ruthenstäben die berechneten Ordinaten ab und bezeichnet deren Endpunkte durch Pfähle, welche etwa 1 Fuss über dem Boden vorstehen, so sind dieses Punkte des abzusteckenden Kreisbogens. Zeigt sich nach dieser Absteckung, dass die beiden Curvenzweige DS, D'S ohne Unterbrechung ihrer Stetigkeit an dem bereits vorher ausgesteckten Scheitel S in einander übergehen, so kann diese Beobachtung als ein günstiges Zeichen für die Genauigkeit der Arbeit angesehen werden; findet aber dieser stetige Uebergang nicht statt, so hat man vor allen Dingen seine Rechnung zu prüfen, und wenn sich hierin kein Fehler herausstellt, die Messung, Berechnung und Absteckung aller Hilfsgrössen zu wiederholen. Eine weitere Prüfung der ganzen Arbeit besteht darin, dass man die Bogenlängen Dp_1, Dp_2 Dp... berechnet, und sich durch unmittelbare Messung überzeugt, ob die abgesteckten Bogenlängen mit den berechneten übereinstimmen oder nicht. Wegen Berechnung der Bögen Dp_1, Dp_2, Dp.... bedarf es wohl nur der Bemerkung, dass für irgend einen Punkt p, der x zur Abscisse hat, der zugehörige Bogen gleich ist

$$Dp = \text{arc sin} \left(\frac{x}{r}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (207)$$

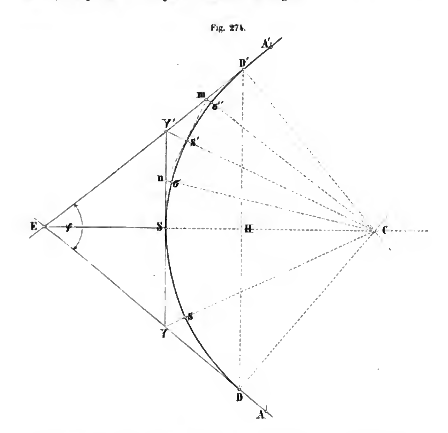
Will man bei grossen Curven die langen Ordinaten, welche in der Nähe des Scheitels abzustecken wären, vermeiden, so theilt man den abzusteckenden Kreisbogen DSD' nach Fig. 274 in vier gleiche Theile, indem man die Zwischentangente YSY' herstellt, und steckt jeden dieser Theile gerade so ab, wie vorher die Curvenzweige DS, D'S. Es versteht sich dabei von selbst, dass für die Bögen Ss, Ss' dieselben Coordinatenwerthe gelten, welche den Bögen Ds, D's' angehören; und dass man die Entfernungen der Scheitelpunkte s und s' von Y und Y' ganz in derselben Weise bestimmt, wie es in §. 243 für S geschehen ist.

b) Die Bogenstücke sollen gleich seyn.

Wenn r der Halbmesser des abzusteckenden Kreisbogens und der Winkel φ seiner Tangenten, somit auch die Lage der Berührungspunkte gegeben ist, so kennt man damit auch die Länge des zwischen diesen Punkten enthaltenen Bogens und kann folglich bestimmen, in wie viele gleiche Theile der letztere getheilt werden

soll. Man wählt hier gerne eine gerade Anzahl Theile, damit der Scheitel des Bogens von seinen Nachbarpfählen eben so weit absteht, als jeder Curvenpfahl von dem seinigen.

Fig. 274.



Nehmen wir an, dass der ganze Bogen in 2n gleiche Theile zerlegt werde, so entspricht jedem Bogenstücke ein Mittelpunktswinkel von der Grösse

$$\alpha = \frac{180^0 - \varphi}{2n} \quad \ldots \ldots \quad (208)$$

und eine Länge

$$l = 0{,}01745\,\alpha r, \quad \ldots \ldots \quad (209)$$

wobei jedoch α in Graden auszudrücken ist.

Stellt in Fig. 275 wieder DSD' den abzusteckenden Kreisbogen, D den einen und D' den anderen Berührungspunkt vor, so ist für

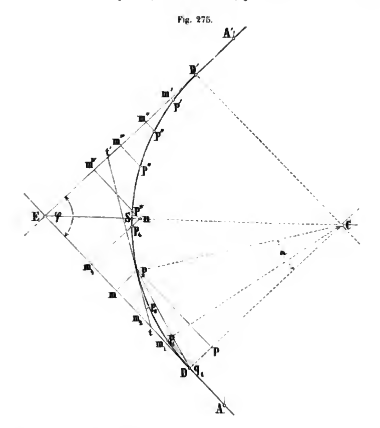
irgend einen Curvenpunkt p, welcher um den Bogen $Dp = u\,l$ von D entfernt ist, die Abscisse

$$Dm = x = r \sin (u\ \alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (210)$$

und die Ordinate

$$mp = y = 2r \sin^2 (\tfrac{1}{2}\ u\ \alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (211)$$

Fig. 275.



Nimmt man nach und nach u gleich 1, 2, 3, 4 u. s. f. bis $u = n$, so erhält man aus den vorstehenden Gleichungen die den Punkten p_1, p_2, p.... S zugehörigen Coordinatenwerthe x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4 u. s. w.; und trägt man dieselben in der sub lit. a angegebenen Weise auf dem Felde auf, so findet man daselbst die gesuchten Curvenpunkte p_1, p_2, p, p_4 u. s. f. bis zum Scheitel S. Zeigt sich nach der Absteckung, dass der aus den Coordinaten bestimmte Scheitelpunkt mit dem nach §. 243 gefundenen zusammen-

trifft, und bemerkt man, indem man von Pfahl zu Pfahl vorwärts geht und von jedem nach dem zweitnächsten visirt, keinen Unterschied in den Abständen der nächstliegenden Pfähle von diesen Visirlinien, sind also die Pfeile dem Augenmasse nach alle einander gleich, so kann man mit der Absteckung zufrieden seyn.

Es bedarf wohl kaum der Erinnerung, dass eine Zwischentangente gelegt wird, wenn die Coordinaten in der Nähe des Scheitels zu lang und folglich mühsam abzustecken sind. Wie diese im Scheitel herzustellen ist, wurde schon früher gezeigt; man kann sie aber auch an irgend einem anderen bereits abgesteckten Punkte, z. B. in p, nöthig haben. In diesem Falle darf man nur in p einen Theodolithen centrisch und horizontal aufstellen, von p nach D visiren, die Nonieu ablesen und hierauf die Alhidade um den Winkel $u\alpha$ in dem entsprechenden Sinne drehen, so wird die Visirlinie des Fernrohrs in der Richtung der neuen Tangenten stehen. Steckt man nun den Stab t aus, so kann man die Linie tp rückwärts gegen S hin verlängern; lässt sich aber das Fernrohr durchschlagen, so kann man sofort einen Stab t' in die Tangente, welche man sucht, einrichten. Von p aus geht dann selbstverständlich die Curvenabsteckung in derselben Weise weiter, wie von D gegen p hin.

c) Der freie Raum für die Absteckung ist sehr beschränkt.

Auch wenn man eine Zwischentangente legt, ist der freie Raum, welchen die Absteckung mittelst Coordinaten fordert, bei grösseren Curven sehr ausgedehnt und desshalb nicht immer zu haben. In solchen Fällen muss man sich einzuschränken wissen, d. h. man muss Methoden der Curvenabsteckung kennen, welche auf verhältnissmässig schmalem Raume ausführbar sind.

Nachstehend theilen wir zwei solche Methoden mit, welche sich zwar ebenfalls auf die Orthogonalcoordinaten gründen, aber keineswegs so zuverlässig sind, wie die unter (a) und (b) besprochenen Verfahrungsweisen.

α) Betrachtet man nämlich in Fig. 276 die Tangenten $i_1\,t$, so ist klar, dass der Punkt i_1, in welchem sie die Tangente $D\,w_2$ schneidet, von p_2 and D gleich weit abliegt, und dass er sich in dem verlängerten Halbmesser $C\,p_1$, welcher den Winkel $D\,C\,p_2$ halbirt, befindet. Der Fusspunkt n_1 der Ordinate $p_1\,w_1$ liegt von i_1 um eine kleine Grösse $w_1\,i_1$ ab, welche sich aus der Ordinate $p_1\,w_1$ und dem Winkel $w_1\,p_1\,i_1 = \frac{1}{2}\,(u\,\alpha)$ leicht berechnen lässt; es ist nämlich

$$w_1 i_1 = \xi = y \operatorname{tg} (\tfrac{1}{2} u\, \alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (212)$$

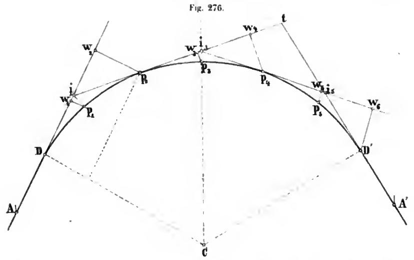
Berechnet man hieraus die Länge ξ und trägt sie an $D w_1$ an, so erhält man einen Punkt i_1, der in der Tangente $i_1\, t$ liegt und also zu deren Absteckung dient, wenn man den Punkt p_1 bereits hat. Geht der Winkel $\frac{1}{2} u\, \alpha$ in α über, indem $u = 2$ wird, so darf in dem vorliegenden Falle, wo α stets ein kleiner Winkel ist, annähernd

$$\operatorname{tg} \alpha = \alpha \operatorname{tg} 1^0 = 0{,}01745\, \alpha$$

und folglich auch

$$\xi = 0{,}01745\, \alpha\, y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (213)$$

Fig. 276.



gesetzt werden. Bei der Berechnung des Werthes von ξ aus der letzten Gleichung ist zu berücksichtigen, dass α in Graden ausgedrückt werden muss, und dass man alsdann ξ in derselben Längeneinheit erhält, in welcher y gegeben ist. Ist übrigens der Halbmesser des abzusteckenden Kreisbogens sehr gross, so wird ξ so klein, dass man es gegen x vernachlässigen kann.

Hat man nun von D aus einen Kreisbogen von dem Halbmesser r abzustecken, welcher die Tangente $D w_2$ in D berührt und dessen Bogenstücke $D p_1$, $p_1 p_2$, $p_2 p_3$ u. s. w. einander gleich werden sollen, so berechne man sich vor allem die Winkel $D C p_1 = \alpha$ und $D C p_2 = 2\alpha$ nach Gleichung (208) und hiermit die Abscissen

$$x_1 = r \sin \alpha \quad ; \quad x_2 = r \sin 2\alpha,$$

sowie die zugehörigen Ordinaten

$$y_1 = 2r \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha \quad ; \quad y_2 = 2r \sin^2 \alpha.$$

Ferner berechne man mit Hilfe von y_1 die Länge

$$\xi = 0{,}01745 \; \alpha \; y_1$$

und stecke die Punkte p_1 und p_2 durch Abmessen dieser Coordinatenwerthe ab, indem man $Dw_1 = x_1$, $Dw_2 = x_2$; $w_1 p_1 = y_1$ und $w_2 p_2 = y_2$ macht. Steckt man weiter in dem Punkte i_1, welcher um die Grösse ξ von w_1 absteht, einen Stab ein, so erhält man die Tangente $i_1 p_2$, auf der man abermals die Abscissenwerthe $p_2 w_3 = x_1$ und $p_2 w_4 = x_2$ abtragen kann, um auf den in w_3 und w_4 errichteten Senkrechten die Ordinaten $y_1 = w_3 p_3$ und $y_2 = w_4 p_4$ abzumessen. Die Tangente $i_3 p_4$, von der aus die Punkte p_5 und D' bestimmt werden, erhält man in derselben Weise wie i_1 p_2 und alle folgende eben so. Es versteht sich von selbst, dass wenn der Winkel α nach Gleichung (208) bestimmt und die Absteckung stets nach einer Richtung fortgesetzt wurde, der n^{te} Curvenpunkt mit dem Scheitel (S) und der $(2n)^{te}$ mit dem zweiten Berührungspunkte D' zusammentreffen muss. Besser ist es jedoch, wenn man nur den halben Bogen von D aus, die andere Hälfte aber von D' aus vornimmt und zusieht, ob beide Curvenzweige durch den vorher bestimmten Scheitel gehen, ohne sich daselbst zu schneiden.

β) Es sey für den Punkt p_1 in Fig. 277 nach den Gleichungen (208) bis (211):

$$\begin{aligned}
&\text{der Winkel } DCp_1 = \alpha = \frac{180^0 - \varphi}{2n}, \\
&\text{der Bogen } \quad Dp_1 = l = 0{,}01745 \; \alpha \; r, \\
&\text{die Abscisse } \quad Dw_1 = x_1 = r \sin \alpha, \\
&\text{die Ordinate } \quad p_1 w_1 = y_1 = 2r \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha.
\end{aligned}$$

Zieht man die Sehne Dp_1 über den Kreis hinaus, macht $p_1 p_2 = Dp_1$, so ist der Winkel $w_2 p_1 p_2 = \alpha$, verlängert man $p_1 p_2$ und macht $p_2 p_3 = p_1 p_2 = Dp_1$, so wird auch der Winkel $w_3 p_2 p_3 = \alpha$ u. s. f. Würde man die Sehnen $p_1 p_2 = p_2 p_3 = p_3 p_4 \ldots . = s$ kennen, so hätte man

$$\text{die Abscissen } p_1 w_2 = p_2 w_3 = p_3 w_4 \ldots . = \varepsilon = s \cos \alpha,$$
$$\text{die Ordinaten } p_2 w_2 = p_3 w_3 = p_4 w_4 \ldots . = \eta = s \sin \alpha,$$

und es liessen sich folglich die Punkte p_2, p_3, p_4 mit Hilfe dieser Coordinaten leicht abstecken. Nun ist aber die Sehne

$$s = 2r \sin \tfrac{1}{2}\alpha$$

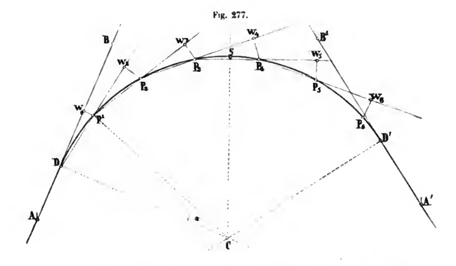
und, wenn man α in Bogenmass ausdrückt und die Sinusreihe bis zur dritten Potenz anwendet:

$$\sin \tfrac{1}{2}\alpha = \sin\left(\frac{l}{2r}\right) = \frac{l}{2r} - \frac{1}{6}\left(\frac{l}{2r}\right)^3;$$

folglich, nach gehöriger Substitution und Reduction:

$$s = l\left(1 - \frac{1}{24}\left(\frac{l}{r}\right)^2\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (214)$$

Fig. 277.



Bedenkt man, dass das Verhältniss von l zu r bei Strassencurven höchstens $^1/_7$, bei Eisenbahncurven höchstens $^1/_{20}$ und manchmal sogar $^1/_{100}$ beträgt, so sieht man ein, dass in allen Fällen $s = l$ gesetzt werden darf, da hierdurch die Werthe von ξ und η im ungünstigsten Falle um $^1/_{1000}$ zu gross werden.

Unter dieser Annahme wird

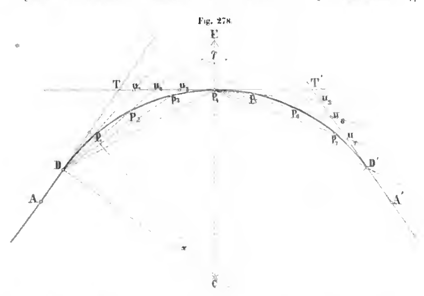
$$\left.\begin{array}{l}\text{die Abscisse } \xi_1 = s \cos \alpha = l \cos \alpha \\ \text{die Ordinate } \eta = s \sin \alpha = l \sin \alpha\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (215)$$

Werden diese Coordinatenwerthe berechnet, so besteht die Absteckung bloss darin, dass man auf der verlängerten Sehne $D p_1$ die Abscisse $\xi = n_1 w_2$ abmisst, in w_2 eine Senkrechte $w_2 p_2 = \eta$ errichtet, hierauf die Sehne $p_1 p_2$ um das Stück $p_2 w_3 = \xi$ verlängert, die Senkrechte $n_3 p_3 = \eta$ macht, und so fortfährt, bis man entweder im Scheitel des Bogens oder am zweiten Berührungspunkte D' angekommen ist.

2) Absteckung der Curven durch Polarcoordinaten.

Stellt die Linie DE in Fig. 278 die eine Tangente des abzusteckenden Kreisbogens DD' und D den Berührungspunkt beider vor; denkt man sich ferner den Bogen in die gleichen Theile Dp_1, $p_1 p_2$, $p_2 p_3$ u. s. w. getheilt und die Sehnen Dp_1, Dp_2, Dp_3... gezogen: so erscheinen letztere als Fahrstrahlen (Radienvectoren),

Fig. 278.



welche in dem Pole D mit der Axe DE beziehlich die Winkel $TDp_1 = \beta$, $TDp_2 = 2\beta$, $TDp_3 = 3\beta$ u. s. w. bilden. Kann man nun diese Winkel nach einander an die Tangente DT antragen und die Längen Dp_1, Dp_2, Dp_3.... der Fahrstrahlen bestimmen, so wird dadurch die Curve DD' abgesteckt, und zwar mittels Polarcoordinaten.

Ist aber wieder wie früher der Winkel φ und der Halbmesser r des abzusteckenden Kreises gegeben, so wird, wenn man den ganzen Bogen DD' in 2n gleiche Theile zerlegt, nach Gleichung (208) der Centriwinkel DCp_1 oder

$$\alpha = \frac{180^0 - \varphi}{2n},$$

und folglich der Winkel TDp_1, welcher halb so gross als α ist, d. i.

$$\beta = \frac{180^0 - \varphi}{4n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (216)$$

Die Länge jedes Bogenstückes (Dp_1, p_2p_3, p_2p_3....), welche gleich

$$l = 0{,}01745\ \alpha r$$

ist, kann nach der Bemerkung zur Gleichung (209) der Länge seiner Sehne gleich gesetzt werden, weil man dadurch nur einen für die Praxis verschwindenden Fehler begeht. Will man die Curvenpunkte p_1, p_2, p_3.... auf dem Felde bestimmen, so stelle man in D einen Theodolithen centrisch und horizontal auf, stelle das Fernrohr genau in die Richtung DT ein und lese die beiden Nonien des Horizontalkreises ab. Addirt man hierauf zu diesen Ablesungen den einfachen Winkel β und stellt die Nonien auf die neuen Ablesungen ein, so muss die Visirlinie in der Richtung Dp_1 liegen. Winkt man in dieser Richtung einen Stab ein und lässt in derselben die Länge l genau abmessen, so erhält man den Punkt p_1. Addirt man wieder den Winkel β zu den letzten Ablesungen und stellt die Nonien auf diese neuen Ablesungen ein, so hat man das Fernrohr gegen seine erste Stellung um 2β gedreht und es zeigt folglich jetzt die Richtung Dp_2 an. Um den Punkt p_2 zu erhalten, muss von p_1 aus die Länge l so abgemessen werden, dass der zweite Endpunkt p_2 derselben in der Richtung Dp_2 liegt, was am bessten dadurch geschieht, dass man den Abstand der beiden Kettenstäbe der Messkette genau = l macht und von D aus den zweiten Stab einvisirt, während der erste in p_1 steht. Der dritte, vierte, überhaupt jeder folgende Punkt wird genau so wie p_2 bestimmt. Ist richtig gearbeitet worden, so muss man im Verfolge dieser Absteckung mit einem Punkte in dem Scheitel und einem in dem zweiten Berührungspunkte eintreffen.

Da es jedoch immer mit einigen Schwierigkeiten verknüpft ist, die Messkette kürzer oder länger zu machen, als sie vom Anfang an ist, so thut man in dem vorliegenden Falle besser, den abzusteckenden Kreisbogen nicht in 2n gleiche Theile zu theilen, sondern von einem Berührungspunkte (D) aus fort und fort Bogenstücke von der Länge l, welche der Kettenlänge gleich ist, wenn der Krümmungshalbmesser mindestens 500 Fuss beträgt, abzuschneiden, bis man am zweiten Berührungspunkte (D') ankommt, der selbstverständlich nur zufällig mit einem der auf diesem Wege abgesteckten Punkte zusammentreffen wird, wie das auch mit dem Scheitel der Fall ist. Aber man wird im Voraus berechnen können, wie der Scheitel und der zweite Berührungspunkt gegen die nächsten Curvenpunkte liegen müssen.

Wir wollen zu dem Ende die Kettenlänge l' nennen; dann ist der Centriwinkel, welcher einem Bogen von der Länge l entspricht:

$$\alpha' = 5{,}73 \frac{l'}{r} \text{ Grad} \quad \ldots\ldots \quad (217)$$

und der Peripheriewinkel, der zu dem Bogen l' gehört:

$$\beta' = 2{,}865 \frac{l'}{r} \text{ Grad} \quad \ldots\ldots \quad (218)$$

Da nun der ganze Kreisbogen DD' einen Mittelpunktswinkel

$$\gamma = 180^0 - \varphi$$

hat, so erhält man seine Länge

$$L = 0{,}01745\, \gamma r$$

und die Anzahl der zwischen D und D' abzuschneidenden Bogenstücke von der Länge l':

$$u = \frac{\gamma}{\alpha'} = \frac{L}{l'} \cdot$$

Versteht man unter ν die Ganzen und unter ε die Bruchtheile aus denen die Zahl u besteht, so dass also

$$u = \nu + \varepsilon$$

ist, so wird der letzte Curvenpunkt, den man auf die oben beschriebene Weise mit Hilfe der Werthe von l' und β' noch abstecken kann, von dem zweiten Berührungspunkte D' um einen Bogen

$$\lambda = \varepsilon l'$$

abstehen, wenn richtig gearbeitet worden ist. Den Abstand λ' des Scheitels vom nächst vorhergehenden Curvenpunkte erhält man dadurch, dass man die Grössen γ', L', u', ν', ε', λ' gerade so auf den halben Bogen $Dp_4 = D'p_4$ bezieht, wie vorher γ, L, u, ν, ε, λ auf den ganzen Bogen.

Die eben beschriebene Methode der Curvenabsteckung würde ein sehr günstiges, d. i. ein ebenes und völlig freies Terrain erfordern, wenn man sie mit einem einzigen Standpunkte des Instruments (in D) ausführen wollte. Dieser Standpunkt kann aber sehr leicht verlegt und dadurch das freie Terrain, dessen man bedarf, auf einen schmalen Raum beschränkt werden. Denn nimmt man an, dass die Absteckung bis zu dem Punkte p_4 gediehen ist und dass schon der Punkt p_5 nicht mehr einvisirt werden kann, so lässt sich sicher das Instrument in p_4 aufstellen und nach D zurückvisiren. Dieses thut man auch, liest die Nonien ab und dreht die Alhidade um den Winkel $Dp_4T = p_4DT = 4\beta$ (oder $= 4\beta'$), so dass die

Visirlinie in die Richtung $p_4 T$ kommt, welche nun der neuen Tangente angehört. Schlägt man hierauf das Fernrohr durch, so kann man ausser dem Punkte T, der vorhin abgesteckt wurde, auch noch einen Punkt T ausstecken, der in der Tangente liegt, und nun die Arbeit in derselben Weise fortsetzen, wie sie in D begonnen wurde. Liesse sich das Fernrohr des Theodolithen nicht durchschlagen, so müsste man es in seinem Lager umlegen, damit die Abschlinie den noch abzusteckenden Punkten zugewendet wird. Gienge aber beides nicht an, so müsste die Alhidade genau um 180° gedreht werden, wodurch die Visirlinie, wenn das Instrument und die Arbeit fehlerfrei sind, wiederum in die Richtung $p_4 T'$ gebracht würde. Es versteht sich übrigens von selbst, dass zu den Ablesungen der Nonien, welche für die Visirlinie $p_4 T'$ gelten, zunächst wieder nur der einfache, dann der zwei-, drei-, vier- und fünffache Winkel β zu addiren ist, und eben so versteht es sich von selbst, dass, wenn die Absteckung in dem Punkte D' begonnen hätte und folglich von der Rechten gegen die Linke fortgeschritten wäre, die Vielfachen des Winkels β von den Ablesungen der Nonien des Horizontalkreises abzuziehen gewesen wären.

3) Vergleichung der vorhergehenden Methoden des Curvenabsteckens.

Ohne Zweifel verdient bei jeder Messung diejenige Methode den Vorzug, welche unter gegebenen Umständen am sichersten und einfachsten zu einer völlig genügenden Lösung der vorgelegten Aufgabe führt. Es ist daher, weil die äusseren Umstände sehr verschieden seyn können, keine Methode als die absolut besste oder schlechteste zu bezeichnen, sondern es kann nur mit Bezug auf gleiche Lokalverhältnisse von besseren oder schlechteren Methoden die Rede seyn.

Ist das Terrain fest und nicht sehr durchschnitten, so verdienen die unter Nr. 1, a und Nr. 1, b auseinander gesetzten Coordinaten-Methoden entschieden den Vorzug vor jeder anderen Methode, und zwar desshalb, weil die Absteckung eines jeden Curvenpunktes unabhängig von der eines anderen geschieht und daher der Fehler, welcher bei einem Punkte begangen wurde, sich nicht auf alle folgenden Punkte überträgt. Diese Unabhängigkeit der Curvenpunkte von einander kommt bei keiner anderen Methode vor. Denn bei der Methode 1, c, α (Seite 45) hängen die Punkte p_3 und p_4, obwohl sie durch Coordinaten abgesteckt werden, doch von dem

Punkte p_2 ab, weil durch diesen die Tangente gelegt wird, auf die sich die Absteckung von p_3 und p_4 gründet; und was von p_3 und p_4 in Bezug auf p_2 gilt, lässt sich auch von p_5 und p_6 in Bezug auf p_4, von p_7 und p_8 in Bezug auf p_6 u. s. w. sagen. Bei der auf Seite 47 unter Nr. 1, c, β dargestellten Methode springt die Abhängigkeit jedes folgenden Punktes von dem vorhergehenden von selbst in die Augen, und auch bei der auf Polarcoordinaten gegründeten Methode (S. 49) erkennt man diese Abhängigkeit leicht, da jeder folgende Punkt von dem vorher gehenden aus abgeschnitten wird.

Wenn aber eine Curve entweder auf einem hohen Damme, oder in einem tiefen Einschnitte, oder in einem stark abfallenden, oder von vielen Bäumen, Häusern und dergleichen besetzten Terrain abzustecken ist, so verursacht das Abmessen der Coordinaten nach Nr. 1, a und Nr. 1, b nicht bloss sehr viele Mühe, sondern auch eine Unsicherheit wegen der schiefen Flächen, auf denen horizontale Entfernungen zu bestimmen sind. In solchen Fällen ist es daher besser, sich einer unter Nr. 1, c erklärten Methode oder des in Nr. 2 beschriebenen Verfahrens zu bedienen. Namentlich ist das letztere zu empfehlen, das sich, wenn man ein gutes Winkelmessinstrument besitzt, nicht nur leicht, sondern auch mit hinreichender Genauigkeit, selbst unter schwierigen Terrainverhältnissen, ausführen lässt.

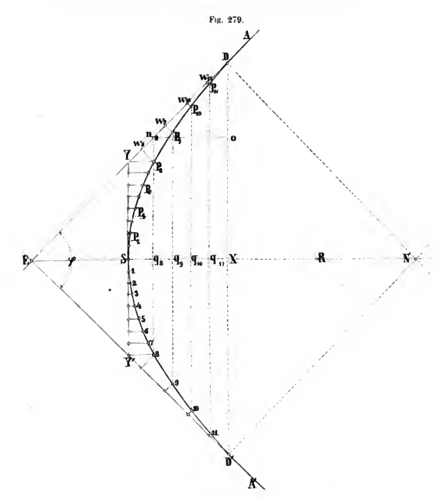
§. 245.

Aufgabe. Es sind die beiden Tangenten und Berührungspunkte einer Parabel von bekanntem Parameter gegeben: man soll den zwischen jenen Punkten liegenden Parabelbogen ausstecken.

Es wird in allen Fällen genügen, wenn man die vorliegende Aufgabe mit Hilfe eines rechtwinklichen Coordinatensystems löst und dabei folgende Axen annimmt: für die Bogenstücke zu beiden Seiten des Scheitels die Ordinatenaxe Y Y' und für die Curvenzweige an den Berührungspunkten die beiden Tangenten DE und D'E der Parabel. Sind in Fig. 279 die Berührungspunkte D, D', der Scheitel S und die Axenschnittpunkte Y, Y' nach §. 242 und 243 bestimmt, so handelt es sich zunächst um die Berechnung der Coordinaten der Bogenstücke $S p_8$ und S 8, welche mit Hilfe der Axe Y Y' abgesteckt

werden sollen. Da aber beide Bögen einander gleich sind und für den einen gilt, was für den andern wahr ist, so werden wir fortan nur von einer Hälfte der abzusteckenden Parabel reden.

Fig. 279.



Für den Bogen Sp_8 und die Axen SX, SY ist die Gleichung der Parabel

$$y^2 = 2rx,$$

woraus man für irgend einen Punkt p die Abscisse

$$x = \frac{y^2}{2r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (219)$$

erhält. Die Ordinaten $y_1, y_2, y_3 \ldots\ldots y_8$ der Punkte $p_1, p_2, p_3 \ldots$ p_8 werden so angenommen, dass ihre Unterschiede $y_1 - y_0$, $y_2 - y_1$, $y_3 - y_2 \ldots\ldots y_8 - y_7$ einander gleich und so gross werden, wie es der kleinste Krümmungshalbmesser (r) der Parabel erfordert und die Coordinatentabelle Nr. IX für Kreisbögen andeutet. Die Absteckung der berechneten Coordinatenwerthe geschieht selbstverständlich gerade so wie bei Kreisbögen.

Für den Curvenzweig $D p_8$ und die Axen DE, DN kann man entweder eine neue Gleichung der Parabel entwickeln, oder aber auf folgende Weise die Formeln zur Berechnung der Coordinaten herstellen.

Heissen die Abscissen der Punkte $p_8, p_9, p_{10}, p_{11} \ldots$ nach einander $\xi_8, \xi_9, \xi_{10}, \xi_{11} \ldots$ und die zugehörigen Ordinaten $\eta_8, \eta_9, \eta_{10}, \eta_{11} \ldots$, so ist für p_8:

$$\eta_8 = w_8 p_8 = n_8 p_8 \cos {}^1\!/_2\, \varphi \text{ und}$$
$$\xi_8 = w_8 D = n_8 D + n_8 p_8 \sin {}^1\!/_2\, \varphi.$$

Um die Linie $n_8 D$ auszudrücken, denke man sich $n_8 o$ parallel zu SX gezogen und, wie früher geschehen, die Abscisse von D oder $SX = c'$ gesetzt, so ist

$$n_8 o = q_8 X = c' - x_8 = n_8 D \cos {}^1\!/_2\, \varphi,$$

und hieraus die gesuchte Länge von

$$n_8 D = \frac{c' - x_8}{\cos {}^1\!/_2\, \varphi} = \varepsilon_8 \quad \ldots\ldots \quad (220)$$

Eben so leicht ist $n_8 p_8$ zu finden; denn da $n_8 p_8 = n_8 q_8 - p_8 q_8 = n_8 q_8 - y_8$ und aus den beiden ähnlichen Dreiecken ESY und $E q_8 n_8$, in welchen $ES = c'$, $SY = d'$ bekannt und $E q_8 = c' + x_8$ ist, $n_8 q_8$ sich ergibt, so erhält man nach einer einfachen Rechnung:

$$n_8 p_8 = d' \left(1 + \frac{x_8}{c'}\right) - y_8 = \delta_8 \quad \ldots \quad (221)$$

Setzt man die Werthe von δ_8 und ε_8 in die Ausdrücke für η_8 und ξ_8, so gehen dieselben über in

$$\left.\begin{aligned} \eta_8 &= \delta_8 \cos {}^1\!/_2\, \varphi \text{ und} \\ \xi_8 &= \varepsilon_8 + \delta_8 \sin {}^1\!/_2\, \varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (222)$$

Um η und ξ zu berechnen, wird man demnach zuerst für beliebige Werthe von x die zugehörigen Werthe von δ und ε herstellen und diese in die voranstehenden Ausdrücke einsetzen. Man hat es dadurch zwar nicht in seiner Gewalt, die Abscissenunter-

schiede $\xi_8 - \xi_9$, $\xi_9 - \xi_{10}$ u. s. w. einander gleich zu machen; es ist aber dafür um so leichter, die Coordinaten irgend eines aus der Gleichung $y^2 = 2rx$ bestimmten Punktes der Parabel für die Axen DE und DN anzugeben.

Beträgt z. B. der kleinste Krümmungshalbmesser (r) am Scheitel einer Parabel 960 Fuss und der Winkel (φ), den die beiden Tangenten DE, D'E bilden, 124° 28', so sind zur Absteckung dieser Curve, deren Gleichung

$$y^2 = 2 \times 960\ x = 1920\ x$$

ist, folgende Rechnungen nöthig.

Die Entfernung der Berührungspunkte D und D' vom Schnittpunkt E erhält man nach Gleichung (199) gleich

$$a' = \frac{r \cot \frac{1}{2}\varphi}{\sin \frac{1}{2}\varphi} = \frac{960 \cot 62^0\ 14'}{\sin 62^0\ 14'} = 571',2;$$

der Abstand des Scheitels S vom Punkte E ist nach Gleichung (204) gleich

$$c' = \frac{1}{2} r \cot^2 \frac{1}{2}\varphi = 133',06$$

und das Axenstück SY = SY' nach Gleichung (205) gleich

$$d' = c \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi = 252',72.$$

Lässt man die auf SY gezählten Ordinaten von 30 zu 30 Fuss wachsen, so erhält man nach Gleichung (219) für den Punkt

p_1 die Ordinate $y_1 = 30'$ und die Abscisse $x_1 = 0,468$
p_2 „ „ $y_2 = 60'$ „ „ „ $x_2 = 1,880$
p_3 „ „ $y_3 = 90'$ „ „ „ $x_3 = 4,218$
⋮ ⋮ ⋮
p_8 „ „ $y_8 = 240'$ „ „ „ $x_8 = 30,000.$

Wenn von dem Punkte p_8 an die Absteckung von der Tangente DE aus geschieht, so kann man jetzt die auf der Axe SX gemessenen Abscissen wieder von 30 zu 30 Fuss wechseln lassen, so dass $Sq_8 = x_8 = 30'$; $Sq_9 = x_9 = 60'$; $Sq_{10} = x_{10} = 90'$; $Sq_{11} = x_{11} = 120'$ und $SX = x_{12} = c' = 133',06$ wird. Setzt man diese Werthe von x nach und nach in die Gleichung $y^2 = 2rx$, so erhält man die zugehörigen Ordinaten $y_8 = 240'$; $y_9 = 339',41$; $y_{10} = 415',69$; $y_{11} = 480',00$; $y_{12} = DX = 505,44$; und mit Benützung dieser Coordinatenwerthe findet man aus Gleichung (221):

$$\delta_8 = 252,72 + 1,9\ x_8 - y_8 = 69',72;$$
$$\delta_9 = 252,72 + 1,9\ x_9 - y_9 = 27',31;$$
$$\delta_{10} = 252,72 + 1,9\ x_{10} - y_{10} = 8',02;$$

$$\delta_{11} = 252{,}72 + 1{,}9\ x_{11} - y_{11} = 0',72;$$
$$\delta_{12} = 252{,}72 + 1{,}9\ c' - y_{12} = 0{,}00;$$

und aus der Gleichung (220):

$$\varepsilon_8 = 2{,}1465\ (c' - x_8) = 221',22;$$
$$\varepsilon_9 = 2{,}1465\ (c' - x_9) = 156',81;$$
$$\varepsilon_{10} = 2{,}1465\ (c' - x_{10}) = 92',43;$$
$$\varepsilon_{11} = 2{,}1465\ (c' - x_{11}) = 28',03;$$
$$\varepsilon_{12} = 2{,}1456\ (c' - x_{12}) = 0{,}00.$$

Nunmehr ergeben sich die gesuchten Coordinaten der Punkte p_8 bis p_{12} nach Gleichung (221) sehr einfach, nämlich

für p_8 die Abscisse $\xi_8 = 282',90$ und die Ordinate $\eta_8 = 32',48$ [1]
„ p_9 „ „ $\xi_9 = 180',86$ „ „ „ $\eta_9 = 12',72$
„ p_{10} „ „ $\xi_{10} = 99',40$ „ „ „ $\eta_{10} = 3',74$
„ p_{11} „ „ $\xi_{11} = 28',54$ „ „ „ $\eta_{11} = 0',33$
„ p_{12} „ „ $\xi_{12} = 0{,}00$ „ „ „ $\eta_{12} = 0{,}00.$

Werden die Abscissenunterschiede $\xi_8 - \xi_9$, $\xi_9 - \xi_{10}$ zu gross, um die Curve genau abstecken zu können, so darf man selbstverständlich nur die auf den Hauptdurchmesser SX bezogenen Abscissen (x) um weniger als 30 Fuss, welche wir hier angenommen haben, wachsen lassen.

Soll schliesslich noch der Krümmungshalbmesser (R) der Parabel in dem Berührungspunkte D bestimmt werden, so dient dazu die bekannte Gleichung

$$R = \frac{n^3}{(\frac{1}{2}\ p)^2} = \frac{n^3}{r^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (223)$$

in welcher n die Normale (DN) des Berührungspunktes und r den halben Parameter bezeichnet. Drückt man die Normale durch die Subnormale (welche constant und $= \frac{1}{2}\ p = r$ ist) und den Winkel $\frac{1}{2}\ \varphi$ aus, so wird $n \sin \frac{1}{2}\ \varphi = r$ und demzufolge

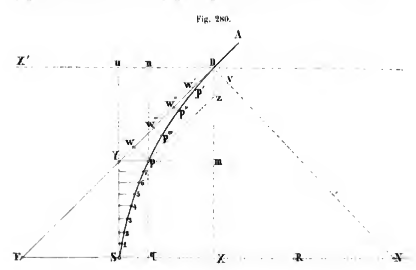
$$R = \frac{r}{\sin^3 \frac{1}{2}\ \varphi} = 1385{,}7 \text{ Fuss} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (214)$$

Man kann die Formel, welche zur Berechnung der Coordinaten ξ, η dienen, auch so einrichten, dass sie von den Coordinatenwerthen x, y unabhängig werden, was die in Gleichung dargestellten Ausdrücke nicht sind.

[1] Da der Punkt p_8 schon durch die auf die Axe SY bezogenen Coordinaten x_8, y_8 bestimmt ist, so dienen die auf DE bezogenen Werthe von ξ_8 und η_8 bloss zur Controle der Rechnung und Messung.

Zu dem Ende ist es nöthig, die Gleichung der Parabel für die rechtwinkeligen Axen DE, DN zu entwickeln und daraus die zu gegebenen Werthen von ξ gehörigen Werthe von η zu suchen.

Fig. 280.



Es sey die Gleichung der in Fig. 280 dargestellten Parabel für die Axen SX und SY:

$$y^2 = 2rx,$$

und für irgend einen Punkt des Parabelbogens SD die Abscisse $Sq = x$ und die Ordinate $pq = y$. Will man diese Gleichung auf die rechtwinkeligen Coordinatenaxen DX' und DX, welche beziehlich SX und SY parallel sind, beziehen, so hat man nach den Lehren der analytischen Geometrie, wenn für die neuen Axen die Abscisse des Punktes $p = Dn = x_1$ und die Ordinate $pn = y_1$, ist,

$$x = c' - x_1 \text{ und } y = h - y_1$$

zu setzen, wobei c' die Abscisse und h die Ordinate der neuen Axenecke D in Bezug auf die alten Axen vorstellt.

Durch diese Substitution und mit Rücksicht darauf, dass $h^2 = 2rc'$ ist, erhält man für die Axen DX' und DX die Parabelgleichung:

$$x' = -\frac{1}{2r} y_1^2 + \frac{h}{r} y_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (225)$$

Soll diese Gleichung auf die rechtwinkeligen Axen DE und DN, welche mit den zweiten zwar den Anfang gemein haben, aber einen

Winkel $X'DE = \frac{1}{2}\varphi$ bilden, übergetragen werden, so ist, wenn die Abscisse $Dw = \xi$ und die Ordinate $wp = \eta$ gesetzt wird:

$$x' = \xi \cos \tfrac{1}{2}\varphi - \eta \sin \tfrac{1}{2}\varphi,$$
$$y' = \xi \sin \tfrac{1}{2}\varphi + \eta \cos \tfrac{1}{2}\varphi$$

zu nehmen und η oder ξ aus der Gleichung (222) zu entwickeln. Thut man diess, so wird, nach Vornahme der möglichen Vereinfachungen und wenn man $\sin \frac{1}{2}\varphi = s$ und $\cos \frac{1}{2}\varphi = c$ setzt:

$$\eta = \frac{r - c\,s^2\,\xi \pm \sqrt{r\,(r - 2\,c\,s^2\,\xi)}}{c^2\,s}.$$

Da für $\xi = o$ auch $\eta = o$ seyn muss, so folgt daraus, dass wir für unseren Zweck nur das untere Vorzeichen der Wurzel gebrauchen können; die genauen Werthe von η ergeben sich somit aus der Gleichung

$$\eta = \frac{r}{s\,c^2}\left(1 - \sqrt{1 - 2\,c\,s^2\left(\frac{\xi}{r}\right)}\right) - t\,\xi \qquad (226)$$

oder, wenn man die constanten Coefficienten

$$\frac{r}{s\,c^2} = u \text{ und } \frac{2\,c\,s^2}{r} = v$$

setzt, aus der Formel

$$\eta = u\left(1 \sqrt{1 - v\,\xi}\right) - t\,\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (227)$$

Für den Fall, dass die Abscisse ξ im Verhältniss zu r klein ist, kann man annähernd

$$\sqrt{1 - v\,\xi} = 1 - \tfrac{1}{2}(v\,\xi) - \tfrac{1}{8}(v\,\xi)^2 - \tfrac{1}{16}(v\,\xi)^3 - \tfrac{1}{26}(v\,\xi)^4$$

und in Folge dessen

$$\eta = \tfrac{1}{2}\,u\,v\,\xi\left(1 + \tfrac{1}{4}(v\,\xi) - \tfrac{1}{8}(v\,\xi)^2 + \tfrac{1}{12}(v\,\xi)^3\right) - t\,\xi$$

setzen. Da aber $\frac{1}{2}\,u\,v\,\xi = t\,\xi$ ist, so geht mit Rücksicht hierauf die letzte Gleichung über in

$$\eta = \frac{s^3}{2r}\left(1 + \tfrac{1}{12}(v\,\xi) + \tfrac{1}{3}(v\,\xi)^2\right)\xi^2 \quad . \quad . \quad (228)$$

Dieser Ausdruck liefert den Werth von η noch hinreichend genau, wenn selbst das Verhältniss von ξ zu r einem Drittel gleich kommt; ist aber dieses Verhältniss viel kleiner, so kann man auch

$$\eta = \frac{s^3}{2r}\left(1 + \tfrac{1}{2}(v\,\xi)\right)\xi^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (229)$$

nehmen. Die mit N. 228 und 229 bezeichneten Näherungsformeln erfordern, wie man sieht, nicht viel weniger Rechnung, als der

genaue Ausdruck in Nr. 226; wesshalb es immer vorzuziehen seyn wird, sich des letzteren zu bedienen.

Um die Abweichungen der nach letzten drei Gleichungen berechneten Ordinatenwerthe in einem bestimmten Falle anschaulich zu machen, stellen wir in der folgenden Tabelle die zu den früher berechneten Abscissen der Parabelpunkte p_{12}, p_{11}, p_{10}, p_9, p_8 (Fig. 279) gehörigen Ordinaten zusammen.

Punkt.	Abscisse ξ	Verhältniss $\xi : r$	Ordinate η nach der Gleichung		
			Nr. 226.	Nr. 228.	Nr. 229.
p_{12}	0	0	0	0	0
p_{11}	28.54	0,0297	0.326	0,297	0,297
p_{10}	99.40	0.1035	3,714	3,707	3,700
p_9	180,86	0.1883	12,698	12,667	12,614
p_8	282,90	0.2946	32.288	32,214	32,182

Wir beschliessen die Lehre von dem Curvenabstecken mit der Lösung der folgenden Aufgabe, welche beim Strassen- und Eisenbahnbaue häufig vorkommt.

§. 246.

Aufgabe. Es sind auf dem Felde zwei Kreisbögen von bekannten Halbmessern abgesteckt: man soll die gemeinschaftliche Tangente derselben bestimmen.

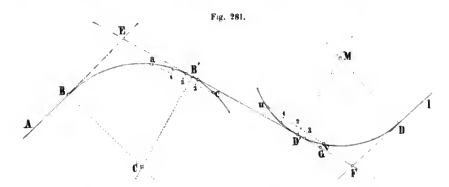
Diese Aufgabe kann auf verschiedene Weisen gelöst werden, und es ist die Verschiedenheit der Lösungen theils durch das Terrain, theils durch die Hilfsmittel der Messung, theils durch den Grad der Genauigkeit, den man erreichen will, bedingt.

1) Liegen die abgesteckten Bögen, oder wenigstens die Theile derselben, welche die gesuchten Berührungspunkte enthalten, auf ziemlich ebenem Boden, so reicht nach unseren Erfahrungen das folgende Verfahren, das sich durch seine Unmittelbarkeit und Kürze empfiehlt, völlig aus.

Man mache nämlich, wie in Fig. 281, an denjenigen Stellen der abgesteckten Bögen, welche die Berührungspunkte muthmasslich enthalten werden, alle Curvenpunkte durch Absteckstäbe sichtbar; stelle sich hierauf an einer der gegebenen Curven (DD′) in einem Punkte auf, der sicher ausserhalb der gesuchten Tangente B′D′ liegt, und bewege sich daselbst so lange seitwärts, bis man in eine Linie

kommt, welche durch die als äusserste erscheinenden zwei Pfähle der beiden Bögen bestimmt wird. Diese Linie ist entweder schon die gesuchte Tangente, oder weicht doch in keinem Falle viel davon ab. Um sich Gewissheit zu verschaffen, ob man die richtige Linie

Fig. 281.



getroffen habe, oder ob die gefundene noch zu verbessern sey, stecke man jetzt in den beiden Kreisbögen zu beiden Seiten der vorläufig erhaltenen Berührungspunkte noch einige nahe an einander gelegene Curvenpunkte ab und wiederhole mit diesen neuen Punkten das oben beschriebene Verfahren. [1] Die äussersten Stäbe in beiden Curvenästen bezeichnen jetzt mit hinreichender Genauigkeit die gesuchte Tangente (B'D').

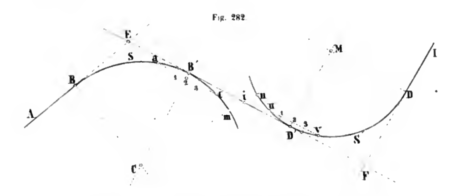
Will man eine andere Prüfung dieser Absteckung vornehmen, so verlängere man die gefundene Linie B'D', bis sie die gegebenen Tangenten AB, JD in den Punkten E und F schneidet, messe alsdann die Länge BE, DF und sehe zu, ob B'E = BE und D'F = DF ist. Finden kleine Unterschiede in diesen Längen statt, so ist es wohl erlaubt, dieselben durch Verrückung der Berührungspunkte B', D' auszugleichen, vorausgesetzt, dass man vorher die Linie B'D' mit aller Sorgfalt abgesteckt hat.

2) Liegen die abgesteckten Bogenstücke, welche durch eine gemeinschaftliche Tangente verbunden werden sollen, so getrennt, dass man beide zugleich nicht übersehen kann, so kann man sich mit Vortheil des Prismenkreuzes bedienen, um die gesuchte Berührungslinie herzustellen.

[1] Zur Absteckung nahe gelegener Curvenpunkte kann man die im Anhange unter Nr. X. mitgetheilte und daselbst erklärte Hilfstabelle gebrauchen.

Nehmen wir an, zwischen den Bogenstücken B'S und D'S' (Fig. 282) liege ein Hügel, der sich in der Richtung CM erstreckt, so kann man auf demselben eine Stelle m aussuchen, welche gestattet, die bei B' und D' wie vorhin aufgestellten Stäbe zu überschauen. Geht man nun mit dem Prismenkreuze gegen n hin vorwärts, bis man an einen Punkt i gelangt, in welchem sich die Bilder der äussersten Stäbe in den beiden Gläsern des Prismenkreuzes decken, so ist i ein Punkt der gesuchten Tangente, vorausgesetzt, dass B' und D' wirklich die äussersten Punkte der Bögen SB' und S'D' sind.

Fig. 282.



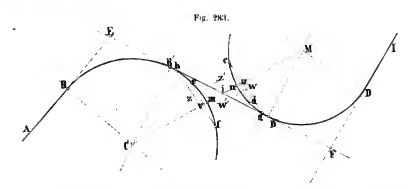
Ob diese Voraussetzung gegründet ist, erfährt man dadurch, dass man links und rechts von B' und D' mehrere nahe an einander liegende Curvenpunkte aussteckt, sich abermals in i mit dem Prismenkreuz aufstellt und zusieht, ob dort wieder dieselben zwei Stäbe wie vorhin als die äussersten erscheinen. Sind es zwei andere, so geben diese mit dem neuen Standpunkte, der sehr nahe an i liegen wird, die gesuchte Tangente.

Verlängert man dieselbe bis an die beiden anderen schon gegebenen Tangenten AB und JD, so kann man sich wie in Nr. 1 von dem Grade der Genauigkeit, womit die Tangente EF gefunden wurde, überzeugen und nöthigenfalls noch eine kleine Verbesserung in der Lage der Berührungspunkte und des Punktes bei i eintreten lassen.

3) Ein von dem vorigen verschiedenes Verfahren, das wir ebenfalls oft und mit Erfolg angewendet haben, gründet sich auf folgende Betrachtung über die Lage der gemeinschaftlichen Tangente zweier Kreisbögen.

Stellt in Fig. 283 die Linie CM die Centrale der beiden Kreisbögen und B'D' die gesuchte Tangente vor, so schneiden sich beide in einem Punkte i, der zwischen den Punkten m und n liegt, die den kürzesten Abstand der beiden Bögen von einander bezeichnen. Könnte man sich die Linie mn verschaffen, so wäre es leicht, den Punkt i abzustecken, da sich seine Entfernung von m oder n leicht berechnen lässt. Hätte man aber i, so dürfte man von dort aus nur eine Gerade iB' nach dem äussersten Punkte B' des Bogens SB' und eine zweite Gerade iD' nach dem äussersten Punkte D' des Bogens S'D' ziehen, um die verlangte Tangente zu erhalten. Die Controle der Absteckung wäre dadurch gegeben, dass man die Länge iB' und iD' aus bekannten Daten berechnete und zusähe, ob diese berechneten Entfernungen mit den wirklichen übereinstimmen oder nicht.

Fig. 283.



Die Richtung der Centralen lässt sich auf dem Felde nicht aus den Mittelpunkten C und M bestimmen, da diese gar nie abgesteckt werden; aber das Stück mn, welches nöthig ist, kann man entweder dadurch finden, dass man die Bogenlängen Dn und Bn berechnet und abmisst, oder, wenn dieses zu umständlich oder wegen der Terrainverhältnisse zu schwierig seyn sollte, dadurch, dass man sich an der Stelle, wo die Punkte m und n muthmasslich liegen, zwei parallele Sehnen cd, ef aufsucht, deren Mittelpunkte u, v einer Linie angehören, welche zu beiden senkrecht steht. Diese Sehnen findet man leicht. Denn angenommen, man habe erst cg # hf gemacht und cg in w, hf in z halbirt, so zeigen die Senkrechten ww', zz' an, dass cg und fh die gesuchten Sehnen noch nicht sind, und dass die eine gegen c, die andere aber gegen f hin

verschoben werden muss. Nach einigen Versuchen bringt man es leicht dahin, dass die in den Mittelpunkten (w, z) der Sehnen errichteten Senkrechten in eine Linie uv zusammenfallen. Von den Punkten u und v aus, wenn sie einmal gefunden sind, erhält man leicht n und m, da man aus den gegebenen Halbmessern R und r der Kreise DD' und BB' und aus der gemessenen Länge der Sehnen ed und ef leicht un und vm berechnen kann.

Da es nunmehr keine Schwierigkeit hat, die Linie mn aufzufinden, so brauchen wir nur das Stück mi = q derselben zu berechnen, um den Punkt i abstecken zu können. Es ist aber, wenn man die Secante Ci mit p und die Centrale CM, deren Länge bekannt ist, mit c bezeichnet, wegen der Aehnlichkeit der beiden rechtwinkeligen Dreiecke CiB' und MiD':

$$p = \frac{cr}{R + r},$$

und da mi = Ci — Cm ist,

$$q = p - r.$$

Setzt man ferner die Länge der Tangente B'D' = t und das Stück iB' derselben, welches durch $\sqrt{p^2 - r^2}$ gegeben ist, gleich l, so findet man aus den vorhin genannten ähnlichen Dreiecken:

$$t = \frac{lr}{R + r}.$$

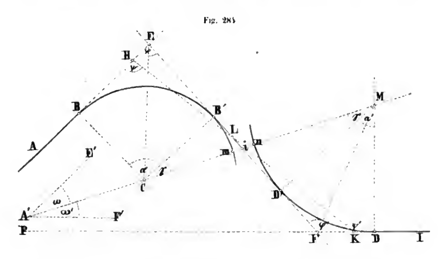
Treffen die von i aus gemessenen Längen l und t — l mit den durch Visiren gefundenen Punkten B' und D' zusammen, so kann man überzeugt seyn, dass die abgesteckte Tangente die richtige ist, ausserdem werden diese Punkte ein wenig verrückt und zwar so, dass sie gleichzeitig die von i ausgemessenen Entfernungen l und t — l darstellen und in den zugehörigen Kreisbögen liegen. Es wird hiebei selten oder gar nie vorkommen, dass diese neuen Punkte merklich ausserhalb der vorhin abgesteckten Tangentenrichtung liegen; sollte es aber der Fall seyn, so ändert sich hierdurch diese Richtung ein wenig ab, was als Verbesserung der ersten Absteckung anzusehen ist.

4) Will oder kann man keines der vorhergehenden Verfahren zur Absteckung der gesuchten Tangente anwenden, so mag man sich des folgenden bedienen, das, wenn es in Folge der Terrainverhältnisse ausführbar ist, sicher zum gewünschten Ziele führt.

Es seyen wieder dieselben Stücke gegeben, welche wir bisher

als bekannt angesehen haben, nämlich die Halbmesser R und r, die Länge der Centrale c und deren Neigungswinkel ω und ω' gegen die gegebenen Tangenten A'B' und ID. Denkt man sich, wie in Fig. 284, die gesuchte Tangente B'D' gezogen und bis an die gegebenen Tangenten verlängert, so ist der Schnittpunkt E von den Berührungspunkten B und B', der Schnittpunkt F aber von den Berührungspunkten D und D' gleich weit entfernt. Kann man nun

Fig. 284.



die Winkel φ und φ' bestimmen, so lässt sich erstens EB' = EB und FD' = FD berechnen, zweitens der Punkt E von B aus und F von D aus abmessen, drittens an BE der Winkel φ und an DF der Winkel φ' antragen, und endlich viertens durch Abmessung der Länge EB' der Punkt B', so wie durch Abmessung von D'F der Punkt D' bestimmen, womit die Aufgabe gelöst ist. Um aber den Winkel φ zu finden, bedenke man, dass aus dem Vierecke BEB'C

$$\varphi = 180^0 - \alpha$$

und aus dem rechtwinkeligen Dreiecke ABC

$$\alpha = 90^0 + \omega - \gamma$$

folgt. Da sich der Winkel γ aus dem Dreiecke Ci B' durch die Gleichung

$$\cos\gamma = \frac{r}{p} = \frac{R + r}{c}$$

ergibt, so erhält man den gesuchten Winkel

$$\varphi = 90^0 + \gamma - \omega.$$

In gleicher Weise findet man den Winkel

$$\varphi' = 90^0 + \gamma - \omega'.$$

Es ist desshalb für den einen Bogen die Länge der Tangente

$$BE = B'E = r \cot \tfrac{1}{2} \varphi$$

und für den zweiten Bogen die Tangente

$$DF = D'F = R \cot \tfrac{1}{2} \varphi'.$$

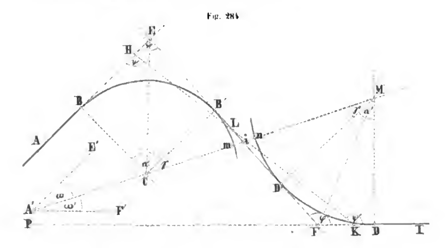
Misst man diese Längen von B und D aus auf den zugehörigen Tangentenrichtungen ab, so erhält man die Schnittpunkte E und F; stellt man dann daselbst einen Theodolithen auf und macht damit den Winkel $BEB' = \varphi$, sowie den Winkel $DFD' = \varphi'$, so müssen die beiden Winkelschenkel EL und FL in eine Gerade zusammenfallen, welche die gesuchte Tangente ist und deren Berührungspunkte B' und D' erhalten werden, wenn man $EB' = EB$ und $FD' = FD$ macht.

Die Messung ist genügend geprüft, wenn man sich von dem Zusammenfallen der in E und F abgesteckten Richtungen EL und FL, sowie davon überzeugt hat, dass die wirkliche Entfernung der Punkte B'D' mit dem aus der Gleichung

$$t = (R + r) \operatorname{tg} \gamma$$

berechneten Abstande $B'D' = t$ übereinstimmt.

Fig. 28.



5) Legen sich der Ausführung des eben beschriebenen Verfahrens Schwierigkeiten in den Weg, indem etwa die Schnittpunkte E und F unzugänglich sind, oder indem von ihnen nach B' und D'

hin keine Linie abgemessen werden kann, so stecke man die gesuchte Tangente dadurch ab, dass man zuerst eine beliebige Gerade herstellt, welche die beiden gegebenen Tangenten in H und K schneidet; zweitens von diesen Schnittpunkten aus die Winkel ψ und ψ', welche die Gerade HK mit den Tangenten AB und ID bildet, sowie die Längen HB = e und KD = e' genau misst; drittens wie in der vorigen Nummer die Entfernungen BE = r cot $\frac{1}{2}\varphi$ und DF = R cot $\frac{1}{2}\varphi'$ bestimmt; viertens die Abstände

$$HE = BE - BH = r \cot \tfrac{1}{2}\varphi - e = i,$$
$$KF = DF - DK = R \cot \tfrac{1}{2}\varphi' - e' = i',$$

und aus den Dreiecken HLE und KLF die Seiten

$$HL = f = \frac{i \sin \varphi)}{\sin (\psi - \varphi)}$$
$$KL = f' = \frac{i \sin \varphi'}{\sin (\psi' - \varphi')}$$

berechnet; fünftens von H oder K aus den Punkt L durch direkte Längenmessung bestimmt; und endlich dortselbst den Winkel

$$\delta = \psi - \varphi$$

sowohl an LH als LK anträgt. Hierdurch ist die Richtung der Tangente EF gegeben und es wird die Lage derselben sofort dadurch geprüft, dass man sich überzeugt, ob sie die äussersten Punkte B' und D' der beiden Kreisbögen BB' und DD' berührt oder nicht. Sollten die beiden Kreise von der Linie ELF geschnitten oder beide gar nicht getroffen werden, der hierdurch sich kundgebende Messungsfehler aber nur gering seyn: so darf man nur den Winkel δ etwas grösser oder kleiner annehmen, um die gesuchte Richtung genauer zu erhalten.

Will man sich von der richtigen Lage der so erhaltenen Berührungspunkte weiter überzeugen, so berechne man ihre Abstände von L, messe dieselben auf der Geraden EF von dem Scheitelpunkte L aus ab und sehe zu, ob die eingemessenen Endpunkte B' und D' mit den durch Visiren erhaltenen zusammentreffen oder nicht. Die Entfernungen LB' und LD', welche man hiezu bedarf, findet man leicht, denn es ist

$$EL = \frac{f \sin \psi}{\sin \varphi}, \quad FL = \frac{f \sin \psi'}{\sin \varphi'}$$

und folglich nach der Figur

$$LB' = EL - EB' = \frac{f \sin \psi}{\sin \varphi} - (e + i);$$

$$LD' = FL - FD' = \frac{f' \sin \psi'}{\sin \varphi'} - (e' + i').$$

Wir haben die vorstehenden Fälle nur für Kreisbögen durchgeführt; es wird aber einleuchten, dass sich die hier mitgetheilten Methoden, mit Ausnahme der dritten, auch auf Parabeln anwenden lassen, wenn man nur die vorkommenden Rechnungen entsprechend abändert.

4) Das Ausmessen gerader und krummer Linien.

§. 247.

Das Ausmessen oder die Bestimmung der Länge einer beliebigen Linie kann entweder mittelbar oder unmittelbar geschehen: unmittelbar durch Anwendung der im vierten Abschnitte des ersten Bandes beschriebenen Längenmesser, und mittelbar durch geeignete Messoperationen, welche auf Grund gemessener Linien und Winkel die gesuchte Länge durch Zeichnung oder Rechnung liefern. Die Ausführung der unmittelbaren Messungen mit Messstäben, Messlatten, Ketten und Distanzmessern ist bereits bei der Erklärung des Gebrauchs dieser Instrumente so weit erörtert worden, als es nöthig ist, sich in allen vorkommenden Fällen helfen zu können, wesshalb dieser Abtheilung der Längenmessungen nur noch beigefügt zu werden braucht, wie man mit Messstangen die Länge einer Grundlinie für ein Dreiecknetz, das einer grösseren Landesvermessung zu Grunde liegt, bestimmt. Dagegen müssen die mittelbaren Ausmessungen gerader und krummer Linien, von denen noch keine Rede war, hier vorzugsweise berücksichtigt werden.

§. 248.

Aufgabe. Die beiden Endpunkte einer sehr langen geraden Linie, die über festes und ebenes Terrain führt, sind durch steinerne Signale dauerhaft bezeichnet: man soll diese Linie mit Messstangen ausmessen und auf den Horizont reduciren.

Zur Ausführung der hier verlangten Arbeit gehören folgende Verrichtungen:

1) das Abstecken von Zwischenpunkten der gegebenen Geraden;

2) die Herstellung entsprechender Unterlagen der Messstangen;

3) der Vollzug der unmittelbaren Messung der Linie, und

4) die Berechnung der horizontalen Entfernung der gegebenen Endpunkte.

Zu 1. Das Abstecken der Zwischenpunkte, welches zum Zwecke hat, die Unterlagen der Messstangen und diese selbst genau in die Richtung der auszumessenden Geraden zu bringen, geschieht mit Hilfe eines Theodolithen, der centrisch und horizontal über dem einen Endpunkte aufgestellt und auf den anderen Endpunkt eingerichtet wird. Bewegt sich in Folge dieser Aufstellung die Absehlinie des Fernrohrs in der gegebenen Geraden, so ist es nach §. 235 leicht, einzelne Punkte derselben anzugeben.

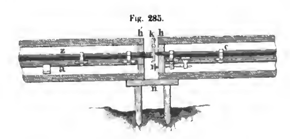
Diese Punkte werden durch starke Pfähle bezeichnet, die man 3 bis 4 Fuss tief in den Boden schlagen, einige Zolle über dessen Oberfläche horizontal abschneiden und auf dem Kopfe mit Nägeln versehen lässt, welche genau in der Visirebene des Fernrohrs stehen. Man wird diese Pfähle nicht zu weit auseinander stellen, damit sich leicht von einem zum andern eine Schnur ziehen lässt, welche die Mittellinie der Unterlagen und Messstangen bezeichnet. Da es auf langen Strecken schwer ist, die Signale in die Absehlinie einzuwinken, so versteht es sich von selbst, dass man sich die Arbeit des Absteckens der Zwischenpunkte erleichtert, wenn man erst einige Hauptpunkte der ganzen Linie bestimmt und von diesen aus die Zwischenpunkte einrichtet.

Um die Aufstellung des Theodolithen auf den Hauptpunkten jederzeit schnell und sicher vornehmen zu können, ist es gut, wenn man um dieselben drei Pfähle im gleichseitigen Dreieck schlagen, horizontal abschneiden und mit Löchern versehen lässt, in welche die Fussspitzen des Stativs passen. Hierdurch bringt man nicht nur sofort die Alhidadenaxe des Theodolithen in die gegebene Gerade, sondern ist auch vor jeder Verrückung des Instruments sicher.

Zu 2. Die Unterlagen der Messstangen sind entweder fortlaufende Stege von starken Brettern, die an den Enden und in der Mitte unterstützt werden, oder auch bloss kleine Blöcke, die (wie in Fig. 285) aus zwei etwa drei Zoll starken und eben so viele Fuss tief in den Boden gerammten Pfählen und einem Brettstücke (n) bestehen, das horizontal darauf genagelt ist. Damit die Messstangen, deren hölzerne Kisten (h, h′) auf die in der Figur angedeutete Weise über die Böcke

zu liegen kommen, eine nahezu wagrechte Lage erhalten, müssen die Böcke (n, n) durch Nivelliren in Ebenen gebracht werden, welche entweder ganz oder nahehin horizontal sind. Hat nun das Terrain eine Steigung gegen den Horizont, welche die Herstellung einer einzigen Horizontalebene zwischen den gegebenen Endpunkten nicht gestattet, so dürfen allerdings die Böcke in mehreren Horizontalebenen liegen, wenn nur die Abstufungen so angebracht sind, dass

Fig. 285.

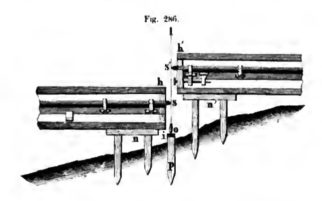


man durch einen feinen Senkel den Endpunkt des vorhergehenden Massstabs zum Anfange des folgenden machen kann, wie dieses in Fig. 286 angedeutet ist. Was die Höhenlage der Ebene des ersten und letzten Stegs betrifft, so bestimmt sich diese durch die Höhenlage der Endpunkte der auszumessenden Linie in der Weise, dass es leicht möglich seyn muss, die Kanten der Messstangen in die Lothlinien dieser Punkte einzustellen.

Zu 3. Nach diesen Vorbereitungen geschieht die Messung der Linien in folgender Weise. Die Messstange Nr. 1 — wir wollen vier solcher Stangen annehmen, und zwar von der Bessel'schen Construction Bd. I, §. 162 — wird durch einen Senkel mit ihrer wagrechten Schneide genau auf den Anfangspunkt A eingestellt, und entweder mit Hilfe eines Theodolithen, der auf einem der in Nr. 1 genannten Hauptpunkten steht, oder nach den geraden Linien, welche man vorher schon über die Böcke gezogen hat, in die gerade Linie AB gerichtet. Hierauf legt man die Stange Nr. 2 hinter Nr. 1 so, dass die wagrechte Schneide derselben, der vorhergehenden lothrechten gegenüber und von dieser so weit absteht, dass der Abstand durch den geometrischen Keil gemessen werden kann. Auch diese Stange wird wie die erste und alle folgenden genau in die auszumessende gerade Linie eingerichtet. Sind alle vier Stangen aufgelegt, so schiebt man die Keile der Messstangen und Metallthermometer ein, stellt

die Libellen wagrecht und liest an Nr. 1 ab: erstens die Angabe der Stellschraube an der Libelle, zweitens den Keil am Metallthermometer, und drittens den Keil zwischen den Stangen Nr. 1 und Nr. 2. Sind dieselben drei Ablesungen auch an der Stange Nr. 2 und am Keile zwischen Nr. 2 und Nr. 3 gemacht, so nimmt man die erste Stange weg und legt sie so an Nr. 4 an, wie vorher Nr. 4 an Nr. 3. Hierauf folgt die Ablesung an Nr. 3 mit Wiederholung der Ablesung

Fig. 286.



des Keils zwischen Nr. 2 und Nr. 3. Ist dieses geschehen, so wird die Stange Nr. 2 versetzt und so fortgefahren, wie angefangen wurde, wobei man darauf sieht, dass zur Zeit der Ablesung immer alle vier Stangen in der geraden Linie liegen.

Muss die Messung der Linie in Folge der Tageszeit oder aus anderen Ursachen unterbrochen werden, so ist es nöthig, den Endpunkt des abgemessenen Stückes mit aller Genauigkeit so zu versichern, dass sich an ihn die weitere Messung leicht wieder anknüpfen lässt.

Dieses geschieht dadurch, dass man mit Latten mehrere Messstangenlagen voraus abmisst, an dem so bestimmten Ruhepunkte einen starken Pfahl von Eichenholz fest in die Erde rammt und denselben der Bodenfläche gleich und wagrecht abschneidet. Auf diesem Pfahl wird eine Vorrichtung festgeschraubt, welche gestattet, eine mit einem kleinen Punkte versehene Metallplatte nach zwei sich senkrecht schneidenden Richtungen zu verschieben und, wenn sie die rechte Lage hat, festzustellen. Der Punkt dieser Platte wird in das Loth gebracht, welches von der Schneide der letzten Messstange herabhängt und aus einem ganz dünnen Silberdrath und einem genau

abgedrehten Metallkegel besteht. Zum Schutze gegen den Luftzug wird dieses Loth mit einem Glascylinder umgeben, und während der Unterbrechung der Messung ist der Ruhepunkt mit einem hölzernen Kästchen und dieses mit Erde und Steinen bedeckt.

Die Fortsetzung der Messung beginnt mit Einrichtung derselben Stange, welche beim Schlusse die letzte war, in ihre frühere Lage, wobei der Senkel genau wieder einspielen muss. Es ist klar, dass auf diese Weise die Dicke des Silberfadens keinen Einfluss auf die Länge der Linie ausübt, so lange sich die Höhenlage des Stegs nicht ändert. Wird aber diese eine andere, so kommt die Dicke des genannten Fadens mit in Rechnung, weil in diesem Falle die Schneide des vorhergehenden unteren Stabs von der Schneide des folgenden höheren in horizontaler Richtung um die Dicke des Drathes absteht. (Fig. 286.)

Die Länge der zu messenden Linie wird nie oder doch nur ganz zufällig so beschaffen seyn, dass das Ende der letzten Messstange genau auf den zweiten Endpunkt (B) der Linie trifft; es wird desshalb auch die letzte Stange um mehr oder weniger von diesem Punkte abstehen, und dieser Abstand ist alsdann noch auszumitteln. Dazu dient entweder ein Pariser Fuss, wenn die Messstangen Vielfache der Toise sind, oder ein aliquoter Theil des Meters, wenn die Messstangen darnach abgeglichen wurden, oder auch irgend ein genauer Massstab, welcher sich zwischen dem Endpunkt B der zu messenden Linie und der letzten Messstange auf einer horizontalen Ebene und in der vorgeschriebenen Richtung mit Hilfe von Metallplatten in der Weise abschieben lässt, wie wir dieses in §. 161 (Seite 308 des ersten Bandes) beschrieben haben. Der Rest, welcher nach dem Abschieben noch bleibt, wird durch leicht zu erfindende Mittel auf einem feingetheilten Massstabe gemessen.

Zu 4. Die Reduction der gemessenen Linie auf den Horizont erfordert, dass erstens alle Messstangenlängen für eine und dieselbe Temperatur, nämlich die Normaltemperatur des Urmasses ausgedrückt werden; dass man zweitens aus den Angaben der Libellenschrauben die Neigungswinkel der Stangen gegen den Horizont bestimmt; hiermit drittens die Länge (Reductionsgrösse) berechnet, welche von jeder Stangenlänge abzuziehen ist; und dass man endlich viertens alle reducirten Längen mit dem horizontalen Endstücke, das durch besondere Massstäbe gemessen wurde, so wie mit den Fadendicken des Senkels, wenn dieser so angewendet wurde, dass die Drahtdicke

berücksichtigt werden muss; und endlich mit den zwischen den Messstangen eingeschobenen Keildicken zusammenstellt.

Die Bessel'schen Messstangen sind so abgeglichen, dass, wenn man in den Ausdrücken für ihre Längen, welche auf Seite 316 des ersten Bandes enthalten sind, und wonach

$$\begin{aligned} \text{Stange Nr. } 1 &= 1728{,}8152 - 0{,}54033\ a_1 \\ \text{„ Nr. } 2 &= 1729{,}5153 - 0{,}55976\ a_2 \\ \text{„ Nr. } 3 &= 1729{,}0454 - 0{,}57575\ a_3 \\ \text{„ Nr. } 4 &= 1729{,}0909 - 0{,}58103\ a_4 \end{aligned}$$

ist, statt a_1, a_2, a_3, a_4 die beobachteten Keildicken am Metallthermometer in Linien einsetzt, die Längen dieser Stangen ebenfalls in Linien und für die Normaltemperatur der Toise erhalten werden. Wir können somit die Länge jeder Stange für diese Temperatur als bekannt ansehen, da wir alle Grössen zu ihrer Berechnung haben. Ist diese Länge $= l$, so ist nur zu zeigen, wie man diese reducirt.

Nennt man die Angabe der Stellschraube (m) an der Libelle (Fig. 168) für die horizontale Lage der Messstange h, und weiss man durch Versuche, dass einer ganzen Umdrehung der Schraube der Neigungswinkel φ entspricht, so wird, da alle hier vorkommenden Winkel sehr klein sind, einer anderen Angabe u der Schraube ein Neigungswinkel

$$\psi = (u-h)\,\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (230)$$

entsprechen. Ob dieser Winkel ein Höhen- oder Tiefenwinkel ist, hat begreiflicherweise auf die Reduction gar keinen Einfluss und desshalb braucht auch sein Vorzeichen nicht beachtet zu werden.

Ist die Stange l unter dem Winkel ψ gegen den Horizont geneigt, so ist die Länge ihrer Horizontalprojection $l \cos \psi$ und folglich die Reductionsgrösse

$$v = l - \cos\psi = 2\,l \sin^2 {}^1\!/_2\,\psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (231)$$

Wegen der Kleinheit des Winkels ψ kann man unbedenklich $\sin^2 {}^1\!/_2\,\psi = {}^1\!/_4 \sin^2 \psi$ und daher

$$v = {}^1\!/_2\, l \sin^2 \psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (232)$$

setzen. Will man jedoch den Winkel ψ nicht erst besonders rechnen, so lässt er sich dadurch sofort in den Ausdruck für v bringen, dass man den Winkel φ durch die Erhebung l ausdrückt, um welche ein Stangenende über das andere käme, wenn die Messstange der Schraube m folgte und diese eine ganze Umdrehung machte.

Unter dieser Annahme ist

$$\sin \varphi = \frac{e}{l} \text{ und } \varphi = \frac{e}{l \sin 1''};$$

da aber auch

$$\sin \psi = \psi \sin 1'' = (u - h) \frac{e}{l}$$

ist, so wird, wenn man diesen Werth in die Gleichung (232) substituirt, weiter noch

$$v = \frac{e^2}{2l} (u - h)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (233)$$

An den Bessel'schen Messstangen war die Grösse e für die Stange Nr. 1 = 7,7505 Linien, für Nr. 2 = 7,598 Linien, für Nr. 3 = 7,768 Linien und für Nr. 4 = 7,957 Linien. Berücksichtigt man ferner, dass man für l den mittleren Werth setzen kann, welcher sich aus allen beobachteten Keildicken (u) am Metallthermometer ergibt, so ist für die Berechnung der Reductionsgrösse der Quotient $e^2 : 2l$ für jede Stange eine constante Grösse e und daher auch

$$\log v = \log e + 2 \log (u - h) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (234)$$

Wie die Endergebnisse der Rechnung zusammenzustellen sind, bedarf keiner Erläuterung; nur die Bemerkung sey noch gestattet, dass man entweder jede einzelne Keildicke, welche den Abstand zweier Messstangen von einander bezeichnet, sofort zu l addirt und folglich auch mit reducirt; oder dass man diese Reduction weglässt und einfach nur die Summe aller Keildicken der Summe aller reducirten Massstablängen beifügt. Die auf den Horizont reducirte Länge der Linie AB stellt offenbar einen grössten Kreisbogen der Erdkugel vor, und es gehört zu demselben ein Halbmesser R, welcher sich wie folgt ergibt. Bezeichnet nämlich r den Halbmesser der Erde bis zum Meeresspiegel, f die Höhe des Ortes A und f' die Höhe des Ortes B über der Meeresfläche, so ist offenbar $\frac{1}{2}(f + f')$ die mittlere Höhe der Linie AB über dem Meere und daher

$$R = r + \tfrac{1}{2}(f + f') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (235)$$

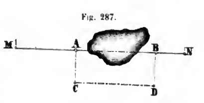
Mit Hilfe dieses Halbmessers kann man den Kreisbogen zwischen A und B auch auf den Meereshorizont reduciren, wovon später die Rede ist.

§. 249.

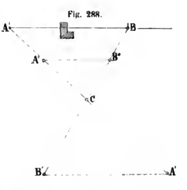
Aufgabe. Eine gerade Linie, deren Endpunkte fest bezeichnet sind, kann nicht unmittelbar gemessen werden: man soll ihre horizontale Länge mittelbar bestimmen.

Die Lösung dieser Aufgabe wird nach den obwaltenden Umständen verschieden ausfallen. Wir werden deren mehrere nach einander behandeln.

1) Die gegebene Linie AB sey nicht sehr lang, man kann sich in jedem Endpunkte aufstellen und von einem zum anderen sehen. (Fig. 287).



In diesem Falle erhält man die gesuchte Länge am einfachsten, indem man in den Punkten A und B Senkrechte (AC, BD) zu AB absteckt, diese einander gleich macht und die dadurch erhaltene Linie CD, welche der gegebenen parallel und gleich ist, unmittelbar misst. Sollte die Absteckung einer Parallelen zu AB aus irgend welchen Ursachen unmöglich oder doch erschwert seyn, so stelle man sich durch Annahme eines beliebigen Punktes C ein Dreieck ABC her, messe in demselben die Winkel bei A und B nebst einer der Seiten AC oder CB und berechne aus den gemessenen drei Stücken die gesuchte Seite AB.



2) Die nicht sehr lange gerade Linie AB sey zwar an ihren Endpunkten zugänglich, kann aber von ihnen aus nicht übersehen werden. Wählt man (Fig. 288) einen beliebigen Punkt C, der so liegt, dass von ihm aus noch nach A und B gesehen und gemessen werden kann, so bestimme man unmittelbar die Seiten CB = a, AC = b und den Winkel ACB = C des Dreiecks ABC und berechne daraus zuerst

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A+B).$$

hierauf die Winkel A und B selbst, und mit diesen die Seite

$$AB = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Will oder muss man die Winkelmessung umgehen, so verlängere man die durch den Punkt C bestimmten Seiten AC und CB rück-

wärts so weit, dass $A'C = AC$ und $B'C = BC$ wird, und messe hierauf die Linie $A'B'$, welche der AB gleich ist.

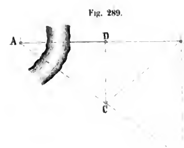
Sollte die Verlängerung der Seiten AC und BC nicht möglich seyn, so halbire man entweder diese Seiten in A'' und B'', wodurch $A''B'' = \frac{1}{2} AB$ wird, oder theile sie so, dass $A''B''$ der AB parallel läuft, messe $A''B'' = e$, $BC = a$, $B''C = d$ und berechne die gesuchte Länge AB, aus der Proportion, welche zwischen dieser und den gemessenen Grössen stattfindet.

3) Ein Endpunkt der Geraden AB sey unzugänglich, man kann ihm aber von dem zweiten Endpunkte aus sehen.

In diesem Falle nimmt man (nach Fig. 289) einen Punkt C beliebig, aber so an, dass man von ihm aus nach A und B sehen und nach B messen kann; misst die Länge der Linie $BC = a$ und die Winkel $ABC = B$ und $BCA = C$ und berechnet hieraus die Seite

$$AB = \frac{a \sin C}{\sin (B + C)}.$$

Fig. 289.



Einfacher lässt sich die vorliegende Aufgabe dadurch lösen, dass man mit Hilfe des Prismenkreuzes einen Punkt C sucht, der mit A und B einen rechten Winkel ACB bildet, hierauf eine Senkrechte CD auf AB errichtet, $BC = a$, $BD = e$ misst und AB aus der Gleichung

$$AB = \frac{a^2}{e}$$

berechnet.

Ausserdem kann man in B und D zwei Senkrechte zu AB errichten und diese durch eine Gerade AE abschneiden, $BE = m$, $DC = n$, $BD = p$ messen und aus einer leicht zu bildenden Proportion die unbekannte Seite

$$AB = \frac{m p}{m - n}$$

bestimmen. (Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass die Linien BE und DC bloss desshalb senkrecht zu AB genommen wurden, weil dieses der kürzeste Weg ist, sie parallel zu machen; denn nur das Gleichlaufen dieser Linien ist hier nothwendig.)

4) Es sey wieder ein Punkt A der Geraden AB unzugänglich, und von B aus kann man nicht nach A sehen.

Man nehme einen Punkt C so an, dass man nach A und B visiren und nach B messen kann; errichte auf BC eine Senkrechte AD, welche durch den Punkt A geht, messe $BC = a$, $CD = d$ und den Winkel $BCA = C$, berechne zunächst die Seite

$$AC = b = \frac{d}{\cos C},$$

Fig. 290.

hierauf nach der in Nr. 2 dieses Paragraphen angewendeten trigonometrischen Formel die Winkeldifferenz $A - B$, mit dieser und der bekannten Winkelsumme $A + B$ die Winkel A und B selbst, schliesslich aber

$$AB = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Sollten sich der Herstellung der Senkrechten AD Schwierigkeiten in den Weg legen, so kann man die Linie AD, so wie sie das Terrain erlaubt, zuerst annehmen, dann eine durch B gehende Senkrechte auf AD fällen, und diese so weit verlängern, bis man an einen Punkt C kommt, von dem aus A und B sichtbar sind und BC unmittelbar gemessen werden kann.

5) Die gegebene Linie AB sey ganz und gar unzugänglich, aber das sie umgebende Terrain gestatte alle erforderlichen Messoperationen.

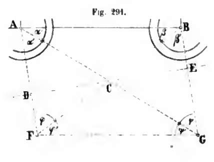


Fig. 291.

Hätte man zur Lösung dieser Aufgabe keine anderen Hilfsmittel als Absteckstäbe, Kette und Winkelspiegel oder Prismenkreuz, so nehme man eine beliebige Gerade DE an, errichte zu ihr die beiden Senkrechten AD und BE, halbire den Abstand DE ihrer Fusspunkte in C, suche die Durchschnitte von AD, BC und von BE, AC in F und G auf und messe schliesslich die Linie FG, so ist die Aufgabe gelöst; denn es ist

FG = AB, weil, dem Aufbau der Figur gemäss, das Dreieck FCG das Dreieck ABC deckt.

Besitzt man einen Theodolithen, Spiegelsextanten oder Spiegelkreis, so kann man von zwei Standpunkten F und G aus die Winkel $AFB = \varphi$, $BFG = \varphi'$ und $AGB = \psi'$, $BGA = \psi$, sowie die horizontale Entfernung dieser Standpunkte $FG = g$ messen; mit diesen Grössen aus dem Dreiecke AFG die Seiten

$$AF = b \quad , \quad AG = c$$

und aus dem Dreieck BFG die Seiten

$$BF = d \quad , \quad BG = e$$

berechnen, und schliesslich die gesuchte Länge AB aus den Dreiecken ABF und ABG, in welcher je zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bekannt sind, bestimmen. Die vier Werthe, welche sich für AB ergeben, nämlich:

$$AB = \frac{b \sin \varphi}{\sin \beta} = \frac{d \sin \varphi}{\sin (\alpha + \alpha')} = \frac{e \sin \psi}{\sin \alpha} = \frac{c \sin \psi}{\sin (\beta + \beta')}$$

liefern zugleich eine Controle der Messung und Berechnung. Bei nur geringen Abweichungen dieser Werthe kann man das Mittel aus allen für AB nehmen.

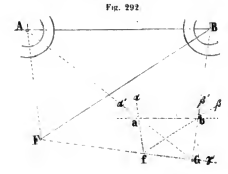


Fig. 292

Will man zur Bestimmung von AB den Messtisch anwenden, so stelle man denselben in einem beliebigen Punkte F, der nach A, B, G zu visiren und nach G zu messen gestattet, horizontal auf, projicire mit der Lothgabel den Punkt F in f auf das Messtischblatt, visire nach einander die Punkte A, B, G an und ziehe die entsprechenden Visirlinien $f\alpha$, $f\beta$, $f\gamma$. Hierauf messe man die Länge FG auf dem Felde, trage sie verjüngt = fg auf der Linie $f\gamma$ von f aus ab und versetze nun den Messtisch so nach G, dass g lothrecht über G und γf in die Visirebene GF kommt, während das Tischblatt selbst horizontal ist. Visirt man nun nach A und zieht die Linie $g\alpha'$, so erhält man den Schnittpunkt a, und wenn von g nach B visirt und die Linie $g\beta'$ gezogen wird, so ergibt sich der Schnitt b. Hiemit ist aber das Viereck abgf hergestellt

welches ABGF ähnlich ist und die Länge der Seite AB liefert, wenn man ab mit demselben Massstabe misst, nach welchem fg abgetragen wurde.

Dass die Genauigkeit dieses Verfahrens geringer ist als die des vorigen, bedarf wohl keiner weitern Erörterung.

6) Die zu messende Gerade AB sey sehr lang, und es befinden sich zwischen den Endpunkten mehrere Hindernisse, welche das Visiren und eine unmittelbare Messung in der Richtung AB unmöglich machen.

In diesem Falle muss die Linie AB nach einer der in §. 236, Nr. 1 bis 3, angegebenen Methoden abgesteckt werden. Diese Methoden sind aber alle so beschaffen, dass sie nicht bloss die Entfernungen der Zwischenpunkte der Linie AB von gewissen Hilfslinien, sondern auch die Entfernungen dieser Punkte unter einander durch Rechnung finden lassen. Man braucht also nur die für die Absteckung gemessenen Grössen nach Anleitung der zugehörigen Figuren richtig zu verbinden, um die gesuchte Länge AB durch Rechnung zu erhalten. Da aber diese Rechnungen weiter nichts als die Lösung einfacher trigonometrischer Aufgaben erfordern, so überlassen wir sie lediglich dem eigenen Nachdenken des Lesers.

§. 250.

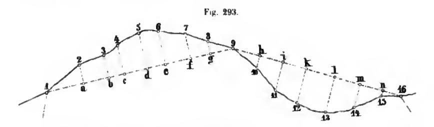
Aufgabe. Irgend eine krumme Linie ist auf dem Felde gegeben: man soll dieselbe aufnehmen und ausmessen.

Da eine krumme Linie fortwährend ihre Richtung ändert, so leuchtet von selbst ein, dass sie im Allgemeinen nicht so genau als eine gerade Linie aufgenommen und ausgemessen werden kann. Denn diese Aufnahme und Ausmessung ist nur dadurch möglich, dass man an die Stelle der Curve eine gebrochene Linie setzt, welche mit jener so nahe als möglich zusammenfällt. Diese gebrochene Linie allein wird aufgenommen und ihrer horizontalen Länge nach bestimmt.

Ist die aufzunehmende Linie nicht bereits abgesteckt, wie es bei regelmässigen Curven für Eisenbahnen oder Strassen der Fall ist, so bezeichne man die aufzunehmenden Punkte 1, 2, 3, 4. . . . . durch numerirte Markpflöcke, welche so weit auseinander stehen, dass die dadurch entstehende gebrochene Linie der vorhin ausgesprochenen Bedingung möglichst genügt.

Hierauf lege man in die krummlinige Figur zwei oder mehr unter sich zusammenhängende gerade Linien (wie z. B. in Fig. 293. die Geraden 1,9 und 9,16) so, dass sie von den aufzunehmenden Punkten nicht zu weit abliegen, und dass sich auf ihnen mit der Messkette oder mit Massstäben leicht messen lässt. Ist dieses geschehen, so mache man einen Handriss von der ganzen Figur und bestimme die gegenseitige Lage der Hilfslinien (1,9 und 9,16), durch Messung ihrer horizontalen Längen und der Winkel (1,9,16), welche sie mit einander bilden.

Fig. 293.



Schliesslich suche man mit dem Prismenkreuze die Fusspunkte a, b, c, d, e . . . der senkrechten Ordinaten der Punkte 2, 3, 4, 5, 6 . . . messe die Abscissen 1a, 1b, 1c, 1d . . . schreibe die gefundenen Längen in dem Handrisse bei a, b, c, d, e . . . ein, messe alsdann auch die Ordinaten und trage ihre Längen ebenfalls in die Zeichnung deutlich über.

Mit diesen Grössen kann man die krumme Linie 1, 2, 3, 4, 5 . . . 16 annähernd zeichnen und aus der Zeichnung lässt sich ihre Länge entweder abmessen oder berechnen, wenn man es nicht vorzieht, diese Längenbestimmung auf dem Felde unmittelbar zu machen, indem man die Sehnen 12, 23, 34, 45, 56 . . . misst und addirt.

B. Messung der Winkel und Dreiecke.

§. 251.

Nachdem im ersten Bande schon gelehrt worden ist, wie man mit der Kreuzscheibe, dem Winkelspiegel, dem Winkelprisma und dem Prismenkreuze rechte Winkel absteckt; mit Hilfe des Messtischapparats die Horizontalprojection schiefer Winkel graphisch darstellt; und mit Theodolithen, Spiegelkreisen und Bussolen beliebige Winkel nach Graden und ihren Unterabtheilungen unmittelbar ausmisst: so

hat sich die gegenwärtige Abtheilung in Bezug auf Winkel nur mehr mit den mittelbaren Bestimmungen derselben und mit dem Einflusse der regelmässigen Beobachtungsfehler auf unmittelbare Winkelmessungen, in Bezug auf Dreiecke aber mit deren Aufnahme durch den Theodolithen und den Messtisch, mit der Ausgleichung der gemessenen Dreieckswinkel, mit den Folgen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler und mit der Bestimmung derjenigen Gestalt der Dreiecke zu beschäftigen, welche diesen Fehlern den geringsten Einfluss auf die zu berechnenden Stücke eines Dreiecks gestatten. Man könnte hier auch sofort die Anlage und Berechnung der Dreiecknetze für grössere Terrainaufnahmen abhandeln; wir ziehen es aber vor, diesen Gegenstand erst in dem Capitel über Landesvermessungen so weit zu erörtern, als es dem Zwecke dieses Buchs entspricht.

1) Mittelbare Winkelmessungen.

§. 252.

Es kommt sehr oft vor, dass Horizontalwinkel nicht unmittelbar gemessen werden können. Dergleichen Fälle treten bei Curvenabsteckungen ein, wenn sich die beiden Tangenten in einem unzugänglichen Punkte schneiden (§. 242); oder bei Landesvermessungen, wenn einzelne Punkte des Dreiecknetzes, womit die aufzunehmende Fläche überspannt werden muss, durch Signale bezeichnet sind, welche entweder keinen oder nur einen unsichern Standpunkt gewähren; oder bei Winkelmessungen mit dem Sextanten oder dem Spiegelkreise, wenn nicht zufällig die beiden den Winkel bestimmenden Punkte mit dem Orte des Instruments in einer wagrechten Ebene liegen; oder endlich bei Winkelbestimmungen, die in Ermangelung von Winkelmessern mit Massstäben, Messketten, Distanzmessern, Nivellirinstrumenten u. dgl. vorgenommen werden müssen. Zu zeigen, wie man in diesen und ähnlichen Fällen durch geeignete Messoperationen und Rechnungen die gesuchten Winkel findet, ist die Aufgabe der nächstfolgenden Paragraphen.

§. 253.

Aufgabe. Die Grösse eines Horizontalwinkels, dessen Scheitel unzugänglich ist, durch Messungen in der Nähe dieses Scheitels zu bestimmen.

Diese Aufgabe kommt bei der Anlage von Dreiecknetzen öfter

vor und ist den Geometern unter der kürzeren Bezeichnung: „einen Winkel zu centriren," bekannt. Ist nämlich in den Figuren 294 bis 297 der zu messende Winkel durch ACB vorgestellt und kann derselbe nicht in C gemessen werden, so wählt man hiezu einen um C herum liegenden Punkt D, misst den Winkel ADB nebst einigen Hilfsgrössen und berechnet daraus den Winkel ACB. Den Inbegriff dieser Arbeiten nennt man das Centriren des Winkels ADB auf den Scheitel C.

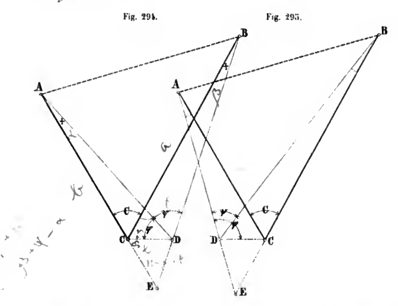


Fig. 294. Fig. 295.

Dieses Centriren fordert, dass die Längen der Winkelschenkel AC = b und BC = a, die Seite CD = e und die Winkel ADB = ψ und CDA = φ bekannt seyen. Bei einer Triangulirung kennt man aber immer die Seiten a und b aus den anstossenden Dreiecken, und die Winkel φ und ψ können unmittelbar gemessen werden, da man den Standpunkt D so wählen wird, dass man ungehindert nach A, B, C visiren kann. Dagegen lässt sich die Grösse der Excentricität e nur selten unmittelbar bestimmen; wesshalb sie in den meisten Fällen mittelbar dadurch gefunden wird, dass man in einem Hilfsdreiecke CDE eine Seite DE nebst den zwei anliegenden Winkeln sehr genau misst und hieraus CD = e berechnet.

Da der Punkt D um C herum jede beliebige Lage haben kann,

so wird sich der Ausdruck für den gesuchten Winkel $ACB = C$ je nach der Lage von D verschieden gestalten, wenn man jedem der in die Rechnung eintretenden Winkel einen positiven Werth beilegt; setzt man dagegen fest, dass der Winkel ADB stets mit $+\psi$, der Winkel ADC stets mit $+\varphi$, der Winkel CAD aber mit $\pm\alpha$ und CBD mit $\pm\beta$ bezeichnet werde, je nachdem der Schenkel DA und beziehungsweise DB rechts oder links von CA und beziehlich von CB liegt: so fallen alle Ausdrücke für C, wie man aus den beigedruckten Figuren leicht selber finden wird, in den einen zusammen:

$$C = \psi + \beta - \alpha \quad \ldots\ldots \quad (236)$$

Fig. 296. Fig. 297.

Man braucht daher auch nur diesen einzigen Ausdruck zu berücksichtigen. Nun ist aber nach Fig. 294:

$$\sin \alpha = \frac{e}{b} \sin \varphi,$$

$$\sin \beta = \frac{e}{a} \sin (\varphi + \psi);$$

folglich, weil α und β immer nur sehr kleine Winkel sind, auch

$$\alpha = \frac{e \sin \varphi}{b \sin 1''} \text{ Sekunden},$$

$$\beta = \frac{e \sin (\varphi + \psi)}{a \sin 1''} \text{ Sekunden};$$

und daher der gesuchte Winkel

$$C = \psi + \frac{e}{\sin 1''}\left[\frac{\sin(\varphi + \psi)}{a} - \frac{\sin \varphi}{b}\right] \quad . \quad . \quad (237)$$

Die Grösse $\beta - \alpha = \delta$, um welche ψ verbessert werden muss, um C zu geben, lässt sich in dem Falle, wo man auch die Winkel $CAB = A$ und $ABC = B$ an der Seite $AB = c$ des Dreiecks ABC kennt, so darstellen, dass sie für die logarithmische Berechnung bequemer wird; denn da nach Fig. 294:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin(B + C)}{\sin B},$$

und nach der letzten Gleichung:

$$\delta = \frac{e}{a \sin 1''}\left[\sin(\varphi + \psi) - \frac{a}{b}\sin\varphi\right] \quad . \quad . \quad . \quad (238)$$

so wird mit Rücksicht darauf, dass $\sin(B + C) = \sin(B + \psi)$ gesetzt werden darf, die Verbesserung

$$\delta = \frac{e \sin \psi \sin(B - \varphi)}{a \sin B \sin 1''} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (239)$$

Das Vorzeichen dieses Ausdruckes für δ hängt nur davon ab, ob der Winkel ψ grösser oder kleiner ist als B; ist nämlich $B > \varphi$, so wird δ positiv, ausserdem aber negativ. Nun ist nach den Figuren 294 und 295 der Winkel $\varphi = B$, wenn D auf dem Kreise ABC liegt; ferner ist $\varphi > B$, wenn sich D innerhalb dieses Kreises befindet; und es ist $\varphi < B$, wenn D ausserhalb des Kreises ABC liegt. Es wird somit $\delta = 0$, wenn D ein Punkt des Kreises ABC ist, und es erlangt δ einen positiven oder negativen Werth, je nachdem D ausser- oder innerhalb des genannten Kreises liegt. Die Grösse δ wird aber auch dann noch null, wenn ein Winkelschenkel (a) im Vergleich zur Excentricität (e) unendlich gross ist, oder wenn die beiden Winkelschenkel ausserordentlich lang sind. Würden also die beiden Punkte A und B oder nur einer von ihnen Sterne bedeuten, so fiele die Verbesserung δ, als verschwindend klein, weg.

Manche Geodäten messen den dritten Winkel eines Dreiecks selbst dann ausserhalb des Scheitels, wenn nichts die centrische Aufstellung des Theodolithen hindert. Als Grund dieses Verfahrens geben sie die grössere Unbefangenheit an, welche der Beobachter besitze, wenn er das von seiner direkten Messung erwartete Resultat nicht im Voraus kennt.[1] Wir unterlassen es, ausführlicher zu unter-

[1] Dieses Resultat ist ihm aber bekannt, da er schon vorher die Winkel bei A und B gemessen und vorläufig $C = 180° - A - B$ berechnet hat.

suchen, welches Gewicht auf dieses aus Misstrauen in die eigene oder eine fremde Person entspringende Verfahren zu legen sey, und bemerken bloss, dass uns eine unmittelbare Messung immer lieber ist als eine mittelbare.

Da sich der Winkel C aus A und B durch Rechnung finden lässt, so mag vielen die Messung bei C als überflüssig erscheinen; bei gewöhnlichen Dreieckmessungen ist dieses allerdings der Fall, aber bei grösseren Triangulirungen soll der Controle der Messung wegen jeder Winkel eines Dreiecks für sich und, wo es angeht, unmittelbar gemessen werden.

§. 254

Aufgabe. Ein schiefer Winkel und die Neigung seiner Schenkel gegen den Horizont ist gegeben: man soll die Grösse seiner Horizontalprojection berechnen.

Die Bestimmung dieser Projection wird von den Geometern mit dem kürzeren Ausdrucke: „einen Winkel auf den Horizont zu reduciren,“ bezeichnet. Soll der schiefe Winkel ACB (Fig. 298) reducirt werden, so denke man sich durch seinen Scheitel C eine Horizontalebene und durch jeden Schenkel CA, CB eine Vertikalebene gelegt. Diese Vertikalebenen schneiden sich selbst in der lothrechten Geraden CC′ und die Horizontalebene nach den Linien CA′, CB′, welche die gesuchte Horizontalprojection A′CB′ des gegebenen schiefen Winkels ACB vorstellen. Denkt man sich ferner um den Scheitel C eine Kugelfläche vom Halbmesser = 1 beschrieben, so wird diese von der Ebene des schiefen Winkels nach dem grössten Kreise AB, von der Horizontalebene nach A′B′, und von den Vertikalebenen nach den Bögen CAA′, CBB′ geschnitten; es entstehen folglich zwei sphärische Dreiecke, die beide den gesuchten Winkel enthalten, nämlich das gleichschenkelige Dreieck A′B′C′ und das schiefwinkelige ABC′.

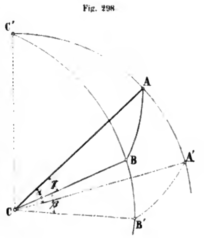


Fig. 298

Von dem letzteren sind die drei Seiten bekannt; denn es ist $AB = c = \gamma$ = dem gemessenen schiefen Winkel ACB; $AC' = b = 90^0 - \alpha$ = dem Complement des Neigungswinkels α des Schenkels CA; $BC' = a = 90^0 - \beta$ = dem Complement des Neigungswinkels β des Schenkels CB.

Man findet folglich den Winkel $A'CB' = C' = \gamma'$ aus der bekannten Grundformel der sphärischen Trigonometrie:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$

wenn man darin $a = 90^0 - \beta$, $b = 90^0 - \alpha$, $c = \gamma$ und $C = \gamma'$ setzt. Nach dieser Substitution und einer einfachen Umformung ergibt sich schliesslich

$$\cos \frac{\gamma'}{2} = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma)}{\cos \alpha \cos \beta}} \quad . \quad . \quad (240)$$

Will man den Winkel γ' nicht hieraus berechnen, so setze man in der aus der vorigen Grundformel folgenden Gleichung:

$$\cos \gamma = \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma' \quad . \quad . \quad . \quad (241)$$

den bekannten Quotienten

$$\frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \gamma} = \cos \delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (242)$$

und bestimme mit Benützung des hieraus berechneten Hilfswinkels δ den Winkel γ' aus der Gleichung:

$$\cos \gamma' = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \delta \ \operatorname{sos} \gamma}{\cos \alpha \ \cos \beta}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (243)$$

welche sich sehr einfach entwickelt.

Obwohl die Formeln (240) und (243) zur Berechnung des Winkels γ' aus γ und den Reductionselementen α und β sehr einfach sind, so kann man sich doch in dem Falle, wo α und β sehr kleine Winkel bezeichnen, noch bequemer einer Näherungsformel bedienen, deren Entwickelung wir hiermit andeuten.

Aus Gleichung (241) folgt ohne Weiteres:

$$\cos \gamma - \cos \gamma' = \sin \alpha \sin \beta - \cos \gamma' (1 - \cos \alpha \cos \beta).$$

Setzt man, was unter der eben gemachten Annahme erlaubt ist, $\sin \alpha = \alpha \sin 1''$, $\sin \beta = \beta \sin 1''$ und das Product

$$\cos \alpha \cos \beta = 1 - \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2) \sin^2 1'',$$

wobei α und β in Sekunden auszudrücken sind: so erhält man zunächst

$$\cos \gamma - \cos \gamma' = [\alpha\beta - \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2) \cos \gamma'] \sin^2 1''.$$

Da aber $\cos \gamma - \cos \gamma' = 2 \sin \frac{1}{2}(\gamma - \gamma') \sin \frac{1}{2}(\gamma + \gamma')$ und

genau genug $2 \sin \frac{1}{2} (\gamma - \gamma') = (\gamma - \gamma') \sin 1''$, $\sin \frac{1}{2} (\gamma + \gamma') = \sin \gamma$ und $\frac{1}{2} \cos \gamma' = \frac{1}{2} \cos \gamma$ ist, so folgt schliesslich die Reductionsgrösse

$$\varrho = \gamma - \gamma' = \frac{\alpha \beta - \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2) \cos \gamma}{206265 \sin \gamma} \text{ Sekunden}, \quad (244)$$

welche für $\gamma = 90^0$ übergeht in

$$\varrho' = \frac{\alpha \beta}{206265} \text{ Sekunden},$$

und für $\alpha = 0^0\ 34'\ 22''$ und $\beta = 1^0\ 40' = 100' = 6000''$ die Verbesserung $\varrho' = 60''$ liefert.

In den vorausgehenden Entwickelungen wurden α und β als Höhenwinkel und desshalb beide als positive Grössen angesehen; erscheint nun einer oder der andere als Tiefenwinkel, so ist er als negative Grösse zu behandeln und zu berücksichtigen, dass $\sin (-\alpha) = -\sin \alpha$, $\cos (-\alpha) = \cos \alpha$, $\operatorname{tg} (-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$ und $\operatorname{cotg} (-\alpha) = -\operatorname{cotg} \alpha$ ist. Werden α und β zugleich negativ, so ändern sich selbstverständlich die Ausdrücke Nr. 240 bis 244 gar nicht.

Sind α und β Höhenwinkel, so können sie eben so wie der Winkel γ mittelst des Spiegelkreises oder des Spiegelsextanten unter Anwendung eines Quecksilber- oder Glashorizonts nach §. 146 gemessen werden; als Tiefenwinkel sind sie aber auf andere Weise zu bestimmen, wozu sich im Allgemeinen drei Wege darbieten. Entweder kann man nämlich den Tiefenwinkel in einen Höhenwinkel verwandeln, indem man die Neigung des Schenkels nicht von C, sondern von A oder B aus misst; oder man bestimmt den Tiefenwinkel durch einen Theodolithen; oder endlich man sucht den Höhenunterschied zwischen C und A = p oder zwischen C und B = q durch Nivelliren und die horizontalen Längen CA = m und CB = n durch mittel- oder unmittelbare Messung, und berechnet die absolute Grösse von α oder β aus den Gleichungen:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{m} \text{ oder } \operatorname{tg} \beta = \frac{q}{n}.$$

Könnte man den Winkel γ nicht mit einem Theodolithen oder Spiegelinstrumente messen, so liesse sich seine Horizontalprojection γ' dadurch finden, dass man in den Schenkeln CA und CB zwei Punkte D und E absteckt, in dem dadurch gebildeten Dreiecke CDE die drei Seiten c, d, e und ihre Neigungswinkel oder sofort die

Horizontalprojectionen c', d', e' dieser Seiten misst und aus letzteren nach der bekannten trigonometrischen Formel:

$$(d' e')^2 \sin^2 \gamma = 4 s (s-c') (s-d') (s-e'),$$

in welcher $s = \frac{1}{2} (c' + d' + e')$ ist, den Winkel γ' berechnet.

2) Von dem Einflusse der regelmässigen Beobachtungsfehler auf die Winkelmessungen.

§. 255.

Keine Messung ist ganz fehlerfrei, wenn sie auch mit den vorzüglichsten Instrumenten und unter den günstigsten äusseren Bedingungen von dem geschicktesten Geometer ausgeführt wurde; denn aus der Unvollkommenheit unserer Sinne und mathematischen Werkzeuge, aus unberechenbaren Einflüssen der Witterung, Beleuchtung, Temperatur etc., oder aus anderen zufälligen Störungen, die der Beobachter kaum wahrnimmt, entspringen immer gewisse, wenn auch ganz kleine Abweichungen von der absolut richtigen Grösse, die wir messen wollen. Diese Abweichungen heissen zufällige oder unvermeidliche Fehler und werden in dem fünften Kapitel dieses Abschnitts besonders betrachtet. Es gibt aber auch Messungsfehler, welche durch geschickte Behandlung vorzüglicher Instrumente und geeignete Messoperationen vermieden werden können, oder deren Einfluss auf die Beobachtungsresultate sich berechnen und dadurch ausgleichen lässt. Diese Fehler heissen im Gegensatze zu den zufälligen Fehlern constante oder regelmässige Fehler, weil sie unter denselben Umständen stets in gleicher Grösse auftreten und aus den sie veranlassenden Ursachen berechnet werden können. Von diesen Fehlern ist hier die Rede.

Die regelmässigen oder constanten Fehler, welche bei der Winkelmessung vorkommen, können verschiedene Ursachen haben; zu den am häufigsten auftretenden Fehlerquellen sind aber folgende zu rechnen:

1) die excentrische Aufstellung des Theodolithen oder des Messtisches;

2) die Excentricität der Alhidade des Theodolithen oder der Kippregel;

3) die Excentricität des Fernrohrs am Theodolithen oder an der Kippregel;

4) die schiefe Lage der Limbus- oder Messtischebene;

5) die Neigung der Visirebene gegen das Loth;
6) die unrichtige Lage der anzuvisirenden Punkte.

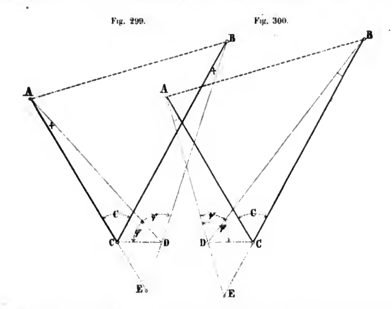
Bei den nachfolgenden Berechnungen der Einflüsse dieser Fehlerquellen auf die unmittelbaren Winkelmessungen wird vorausgesetzt, dass immer nur eine Quelle vorhanden sey, aus der Fehler entspringen, während alle übrigen als nicht vorhanden angesehen werden. Nach der Grösse ihres Einflusses wird sich selbstverständlich die Sorgfalt zu richten haben, welche auf ihre Vernichtung zu wenden ist.

§. 256.

Aufgabe. Die Grösse des Einflusses der excentrischen Aufstellung des Theodolithen oder Messtisches auf die Messung eines Horizontalwinkels zu bestimmen.

Der Messungsfehler, welcher hier behandelt wird, besteht darin, dass beim Theodolithen die Alhidadenaxe und beim Messtische der auf dem Blatte gegebene Scheitelpunkt des Winkels nicht in das Loth des natürlichen Winkelscheitels gestellt wird. Denkt man sich dieses Loth bis zum Horizontalkreise des Theodolithen oder bis zur

Fig. 299. Fig. 300.



Messtischebene verlängert, so wird der Abstand seines Schnittpunktes von dem Durchgangspunkt der Alhidadenaxe oder von dem Bildpunkte

des Winkelscheitels die Grösse der Excentricität der Aufstellung des einen oder des andern Instruments bezeichnen.

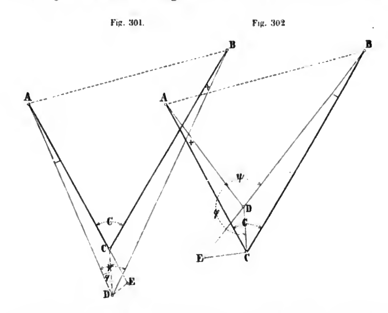
Ist in Fig. 299 der Punkt C die Projection des natürlichen Winkelscheitels und D der Durchgangspunkt der Alhidadenaxe auf dem Horizontalkreise oder der Bildpunkt des Winkelscheitels auf dem Messtischblatte, stellt also die Linie CD = e die Excentricität der Aufstellung des Winkelmessers vor: so wird statt des auf dem Felde gegebenen Horizontalwinkels ACB = C der Horizontalwinkel ADB = ψ gemessen und es besteht folglich der Einfluss der excentrischen Aufstellung des Instruments in dem Unterschiede der Winkel C und ψ, d. h. es ist der gesuchte Fehler

$$\delta = C - \psi = \beta - \alpha, \quad \ldots \ldots \quad (245)$$

wobei α den sehr kleinen Winkel CAD und β den ebenfalls sehr kleinen Winkel CBD bezeichnet.

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem in Nro. 236 aus den Figuren 294 bis 297 abgeleiteten, so findet man zwischen beiden eine völlige Uebereinstimmung. Auch hier kann der Punkt D rings

Fig. 301. Fig. 302



um C herum liegen, wesshalb bezüglich der Lage der Reductionswinkel α und β die vier Fälle möglich sind, welche jene hier wiederholten Figuren darstellen und welche sich in dem obigen Aus-

drucke zusammenfassen lassen, wenn man α oder β positiv oder negativ nimmt, je nachdem die Schenkel DA oder DB rechts oder links von CA oder CB liegen. Mit Bezug auf die in §. 253 enthaltenen Entwickelungen und namentlich nach Gl. (238) erhält man daher

$$\delta = \frac{e}{a \sin 1''} \left[\sin(\varphi + \psi) - \frac{a}{b} \sin \varphi\right] \text{Sek.} \quad . \quad . \quad (246)$$

Der Einfluss δ der excentrischen Aufstellung des Instruments wird null:

a) wenn $C = \psi$ oder $\beta = \alpha$ ist, d. h. wenn der Punkt D auf dem Kreise ABC liegt, und

b) wenn die Winkelschenkel im Vergleich zur Excentricität sehr lang sind;

und er wird bei unveränderlichem Werthe der Grössen a, b, c am grössten:

a) wenn $\psi = 90^0$ und $\varphi = 0$, d. h. wenn sich der Standpunkt des Instruments, wie Fig. 303 zeigt, auf dem Schenkel AC befindet und der zu messende Winkel nahezu ein rechter ist, und

b) wenn $\psi = 90^0$ und $\varphi = 90^0$, d. h. wenn sich der Standpunkt D' auf dem Schenkel CB befindet und der zu messende Winkel ebenfalls nahezu ein rechter ist.

Fig. 303.

In dem ersteren dieser beiden Fälle wird der Fehler

$$\delta = \delta_1 = + \frac{e}{a \sin 1''} \text{Sek.}, \quad . \quad (247)$$

und in dem zweiten Falle erhält man

$$\delta = \delta_2 = - \frac{e}{b \sin 1''} \text{Sek.} \quad . \quad (248)$$

Würde also die Excentricität e einen Decimalzoll betragen und wäre der Winkelschenkel $a = b = 206{,}2$ Fuss $= 2062$ Decimalzoll, so erhielte man für beide Fälle den Fehler

$$\delta = \pm \frac{206265}{2062} = \pm 100 \text{ Sek.}$$

Wenn sich ein solcher Fehler auch noch bei einer Messtischaufnahme ertragen lässt, so kann er doch nimmermehr bei einer Winkelmessung mit dem Theodolithen geduldet werden; wesshalb auf die

centrische Aufstellung dieser Instrumente, wozu im ersten Bande Anleitung gegeben ist, grosse Sorgfalt verwendet werden muss.

§. 257.

Aufgabe. Den Fehler in der Winkelaufnahme zu berechnen, welcher aus der Excentricität der Alhidade entspringt.

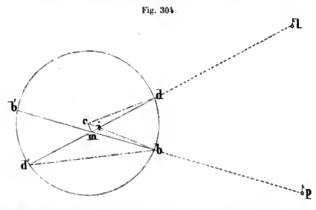
Wird der Horizontalwinkel durch einen Theodolithen gemessen, so ist die Grösse dieses Fehlers bereits aus der Instrumentenlehre bekannt, welche in §. 135 die Entwickelung der Formel

$$f = 412530 \cdot \frac{e}{r} \sin {}^1/_2\, \varphi' \cos (\omega - {}^1/_2\, \varphi') \text{ Sek.} \quad . \quad (249)$$

enthält, worin mit Bezug auf Fig. 304 folgende Bezeichnungen gebraucht sind:

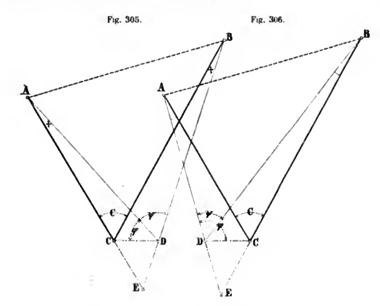
e für die Excentricität (cm) der Alhidade;
ω „ den Neigungswinkel (dcm) der Linien cm und cd;
r „ den Halbmesser (cb, cd) des Limbus, und
φ' „ den am Nonius abgelesenen Winkel (bcd).

Fig. 304



Der Werth von f kann, wie auf S. 262 des ersten Bandes dargethan ist, selbst für eine Excentricität der Alhidade von nur $^1/_{20}$ Linie über 3 Minuten betragen, also sehr gross werden. Dieser Einfluss lässt sich aber einfach beseitigen, wenn am Theodolithen zwei sich gegenüberstehende Nonien angebracht sind und abgelesen werden; wesshalb hier wiederholt auf die Wichtigkeit zweier Nonien am Theodolithen und deren gleichzeitige Benützung aufmerksam gemacht wird.

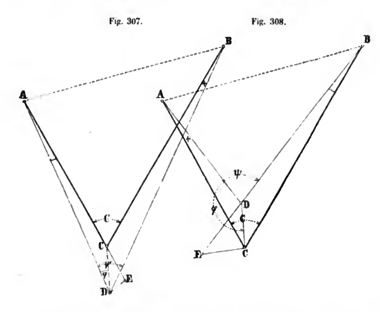
Bei Messtischaufnahmen tritt die Oberfläche des Tischblattes an die Stelle des Limbus, der Bildpunkt des Winkelscheitels an die Stelle des Kreismittelpunkts, und die Linealkante der Kippregel an die Stelle der Alhidade. Legt man nämlich diese Kante nicht genau an den abgebildeten Scheitelpunkt des Winkels an, so ist eine Excentricität der Alhidade vorhanden und es ist ihre Grösse gleich dem Abstande des gegebenen Scheitelpunkts von dem Scheitel, der sich durch die Aufnahme des Winkels ergibt.



Stellt in den vier Figuren 305 bis 308 der Punkt C den auf dem Messtische abgebildeten Winkelscheitel und ACB den aufzunehmenden Winkel vor, so erhält man, wenn das Lineal nicht in C, sondern entfernt davon angelegt wird, statt des Winkels ACB = C den Winkel ADB = ψ. Verbindet man D mit C, so ist CD die Excentricität e des Lineals der Kippregel und $\delta = C - \psi$ der hieraus entspringende Fehler des Winkels C. Nennt man wieder die kleineren Winkel bei A und B beziehlich α und β, so ist nach den genannten Figuren, und da im Uebrigen die Bezeichnungen und Entwickelungen des §. 253 gelten, hier wie dort der Fehler

$$\delta = \frac{e}{a \sin 1''} \left[\sin (\varphi + \psi) - \frac{a}{b} \sin \varphi \right] \text{Sek.} \quad . \quad . \quad (250)$$

Es gelten somit alle Folgerungen, welche im vorigen Paragraph in Bezug auf die excentrische Aufstellung aus dieser Gleichung gezogen wurden, auch für die Grösse des Einflusses der Excentricität der Alhidade. Wenn hiernach die grössten Werthe von δ durch die Ausdrücke Nr. 247 und 248 gegeben sind, so sieht man leicht ein, dass eine geringe Excentricität der Linealkante der Kippregel der Grösse des zu messenden Winkels nicht schadet; denn wenn e sogar eine Decimallinie betrüge und $a = b = 206{,}2$ Fuss wäre, so würde



δ nur 10 Sekunden ausmachen. Etwas anderes aber ist es, wenn mit diesem Apparate zusammenhängende Aufnahmen zu machen sind. Würde man hiebei die Linealkante nicht genau an die gegebenen Scheitelpunkte der Winkel anlegen, so entstünden in der gegenseitigen Entfernung einzelner Punkte Fehler, welche der Excentricität des Kippregellineals, mit dem Massstabe der Aufnahme gemessen, gleichkämen: bei der Verjüngung von 1:5000 würde somit die Excentricität von $^1/_{10}$ Decimallinie einem Fehler von 5 Fuss und folglich die Excentricität $e = 0,'01$ Fuss einem Fehler von 50 Fuss entsprechen. Das scharfe Anlegen des Lineals der Kippregel an die voraus bestimmten Winkelscheitel kann somit für Messtischaufnahmen nicht genug empfohlen werden.

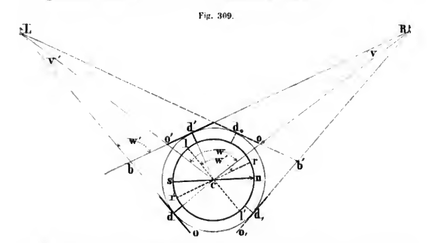
§. 258.

Aufgabe. Zu bestimmen, wie gross der aus der Excentricität des Fernrohrs entspringende Fehler eines mit Theodolith oder Kippregel gemessenen Horizontalwinkels ist.

Denkt man sich durch die vertikale Alhidadenaxe des Theodolithen oder durch die horizontale Linealkante der Kippregel eine Vertikalebene gelegt, welche mit der Fernrohraxe parallel läuft, so ist der Abstand der letzteren Axe von der gedachten Ebene entweder null oder nicht. In dem ersteren Falle hat das Fernrohr des Instruments keine Excentricität, im letzteren aber heisst der Abstand der Fernrohraxe von jener Ebene die Excentricität des Fernrohrs oder der Absehlinie.

Die Wirkung einer solchen Excentricität des Theodolithen kann in folgender Weise beurtheilt und berechnet werden.

Fig. 309.



Es sey in der vorstehenden Figur c die horizontale Projection der Alhidadenaxe, od die gleichnamige Projection der Fernrohraxe und $cd = e$ die Excentricität des Fernrohrs des Theodolithen. Ist mit diesem über c horizontal gestellten Instrumente der Winkel LcR zu messen, so wird das Fernrohr zuerst die Richtung od nach L und hierauf die Richtung o'd' nach R erhalten, wodurch statt des Winkels $LcR = w$ der Winkel $LbR = dcd' = w'$ gemessen wird. Der aus der Excentricität des Fernrohrs entspringende Fehler δ entspricht nun offenbar dem Unterschiede dieser Winkel und ist daher, wenn man

die kleinen Winkel bRc = v und dLc = v' setzt, durch die Gleichung gegeben:

$$\delta = w - w' = v' - v.$$

Haben die Winkelschenkel cR, cL die Längen l, l', und berücksichtigt man, dass l sin v = l' sin v' = e und genau genug

$$v = \frac{e}{l \sin 1''} \text{ und } v' = \frac{e}{l' \sin 1''}$$

ist: so erhält man sofort, übereinstimmend mit der Formel (96), den Fehler

$$\delta = \frac{e}{\sin 1''}\left(\frac{1}{l'} - \frac{1}{l}\right) = 206265\ e\left(\frac{1}{l'} - \frac{1}{l}\right) \text{ Sek.} \quad (251)$$

Dieser Fehler wird null, wenn die Winkelschenkel gleich lang sind, und um so grösser, je mehr der Unterschied der Schenkellängen beträgt. Da sein Einfluss bedeutend werden kann und die Vernichtung desselben durch Berechnung umständlich und nicht immer möglich ist (insofern manchmal l und l' unbekannt sind): so ist jeder gute Theodolith so eingerichtet, dass jener Einfluss durch ein entsprechendes Messverfahren auf Null gebracht werden kann; und dieses Verfahren besteht nach der Entwickelung auf S. 207 und der Bemerkung auf S. 243 des ersten Bandes darin, dass man den Winkel mit entgegengesetzten Lagen des Fernrohrs zweimal misst, und aus den beiden Messungsresultaten das Mittel nimmt.

Die Excentricität der Visirebene der Kippregel hat, wie leicht einzusehen, keine andere Wirkung, als dass der auf dem Messtischblatte gezeichnete Winkel gegen den in der Natur um die Grösse der Excentricität parallel verschoben erscheint; und diese Verschiebung schadet nichts, wenn die ganze Aufnahme mit ein und derselben Kippregel durchgeführt wird. Würde dagegen eine Messtischaufnahme mit zwei verschiedenen Kippregeln gemacht, deren Fernrohr-Excentricitäten e und e' sind, so entstünden durch den Anschluss der beiden Theilaufnahmen in den gegenseitigen Entfernungen der nicht mit einer und derselben Kippregel aufgenommenen Punkte Fehler, welche auf der Zeichnung die Grösse e — e' oder e + e' hätten, je nachdem e und e' gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen besässen; in Wirklichkeit aber würden die Fehler

$$\delta = m\,(e \mp e') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (252)$$

seyn, wenn m die Verjüngung der Aufnahme bezeichnet.

Ein schlimmerer Feind als die Excentricität der Visirebene ist

die schiefe Lage dieser Ebene gegen die Linealkante; da aber der Parallelismus zwischen jener Ebene und dieser Kante nach §. 113 Nr. 5 jeden Augenblick geprüft und hergestellt werden kann, so erscheint es überflüssig, die Folgen eines so leicht zu vermeidenden Fehlers weiter zu untersuchen.

§. 259.

Aufgabe. Man soll den Fehler eines Horizontalwinkels, der bei schiefer Lage der Limbus- oder Messtischebene aufgenommen wird, berechnen.

Dieser Fehler rührt weniger davon her, dass der durch die Absehlinie des Fernrohrs auf den Limbus oder das Messtischblatt senkrecht projicirte Winkel nicht in einer Horizontalebene liegt, als davon, dass die projicirenden Ebenen nicht vertikal sind und vermöge der Einrichtung des Theodolithen und der Kippregel nicht vertikal seyn können, so lange die Limbus- und Messtischebenen geneigt sind. Könnte man trotz dieser Neigung die anvisirten Winkelschenkel durch Vertikalebenen projiciren, so dürfte die schiefe Lage der Instrumentenebene schon ziemlich gross seyn, wenn ein auffallender Winkelfehler entstehen sollte, wie aus den Formeln des §. 254 hervorgeht, nach welchen in diesem Falle der in Rede stehende Fehler zu beurtheilen wäre.

Um einen klaren Begriff von der Entstehung des zu berechnenden Fehlers zu geben, denken wir uns den gegebenen Naturwinkel W, dessen beide Schenkel in einer gegen den Horizont geneigten Ebene liegen, durch eine in dieser Ebene gezogene und durch den Winkelscheitel gehende gerade Linie in zwei Theile u und v zerlegt und jeden dieser Theile sowie den ganzen Winkel auf eine durch die Theilungslinie gehende Horizontalebene projicirt. Jeder Theilwinkel u und v hat einen wagrechten und einen geneigten Schenkel, und es ist klar, dass die Betrachtungen, welche man für einen derselben anstellt, auch für den anderen gelten. Erfährt man auf diese Weise den Fehler δ in der Horizontalprojection φ des Winkels u, so gilt ein ähnlicher Ausdruck δ' für den Fehler der Projection ψ des Winkels v; der Fehler Δ in der Horizontalprojection Ω des Winkels W, welcher $= u \pm v$ ist, wird somit $= \pm (\delta \pm \delta')$ seyn, je nach der Lage der Winkelschenkel. Die Verbindung der Werthe von δ und δ' ist in einem bestimmten Falle nicht schwierig, und da

es hier überhaupt nur darauf ankommt, zu erfahren, ob aus einer schiefen Lage der Limbus- oder Messtischebene bedeutende Messungsfehler entspringen können, so genügt es, hier einen schiefen Winkel u zu betrachten, dessen einer Schenkel horizontal ist.

Zu dem Ende denken wir uns durch diesen Schenkel die unter dem Winkel γ gegen den Horizont geneigte Limbus- oder Messtischebene gelegt und darauf den Winkel u, dessen geneigter Schenkel mit dem Horizont den Winkel α bilden soll, während seine Ebene unter dem Winkel ε dagegen geneigt ist, senkrecht projicirt, wie es durch die Visirebene in der That geschieht. Nennt man diese Projection φ' und die wahre φ, so ist der Fehler des Winkels φ gleich

$$\delta = \varphi' - \varphi,$$

und es kommt nur mehr darauf an, denselben durch die gegebenen Grössen φ, α, γ anszudrücken.

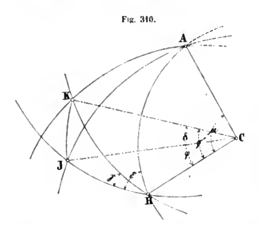


Fig. 310.

Stellt in Fig. 310 der Punkt C den Scheitel, CH den wagrechten und CA den geneigten Schenkel des Winkels ACH = u vor; bezeichnet ferner die Linie CI die Horizontalspur einer durch CA gelegten Vertikalebene und CK den Schnitt einer zweiten durch CA gehenden senkrechten Ebene mit dem Limbus oder der Messtischoberfläche; und denkt man sich endlich um den Punkt C mit dem Halbmesser r = 1 eine Kugelfläche beschrieben, welche die Horizontalebene nach dem grössten Kreisbogen HJ, die Limbusebene nach dem grössten Kreise HK und die beiden projicirenden Ebenen nach den grössten Kreisbögen AJ und AK schneidet: so ist offenbar

$$\begin{aligned} \text{arc } AH &= \text{ang } ACH = u, \\ \text{arc } JH &= \text{ang } JCH = \varphi, \\ \text{arc } KH &= \text{ang } KCH = \varphi', \\ \text{arc } JK &= \text{ang } JCK = \delta, \end{aligned}$$

$$\text{arc } JA = \text{ang } JCA = \alpha,$$
$$\text{W. } AHJ = \varepsilon, \text{ W. } JHK = \gamma,$$

und es folgt aus dem rechtwinklichen sphärischen Dreiecke AJH:

$$\cot \varepsilon = \sin \varphi \cot \alpha, \quad \ldots \ldots \quad (253)$$

$$\operatorname{tang} \varphi = \cos \varepsilon \operatorname{tang} u, \quad \ldots \ldots \quad (254)$$

während man aus dem ebenfalls rechtwinklichen sphärischen Dreiecke AKH erhält:

$$\operatorname{tang} \varphi' = \cos (\varepsilon - \gamma) \operatorname{tg} u \quad \ldots \ldots \quad (255)$$

Mit Hilfe dieser drei Gleichungen kann man den Fehler $\delta = \varphi' - \varphi$ vollständig berechnen; denn da α und φ gegeben sind, so sucht man aus Gleichung (253) den Winkel ε, mit diesem erhält man aus Gleichung (254) den Winkel u, und hiermit endlich aus (255) den Winkel φ'. Soll jedoch die Auflösung der beiden ersten Gleichungen umgangen und φ' sofort aus φ, α, γ gefunden werden, so eliminire man aus der letzten Gleichung mit Hilfe der zwei vorausgehenden die Grössen u und ε, wodurch sich ergibt:

$$\operatorname{tg} \varphi' = \cos \gamma \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \alpha \sin \gamma \sec \varphi \quad \ldots \quad (256)$$

Nach einer bekannten trigonometrischen Formel ist

$$\operatorname{tg} (\varphi' - \varphi) = \frac{\operatorname{tg} \varphi' - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \varphi' \operatorname{tg} \varphi};$$

entwickelt man also den letzteren Ausdruck durch Substitution des Werthes von $\operatorname{tg} \varphi'$ und setzt:

$$\operatorname{tg} \alpha \sin \gamma - \sin \varphi (1 - \cos \gamma) = p, \quad \ldots \quad (257)$$

so erhält man die zur Berechnung des gesuchten Fehlers dienende Gleichung:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{p \cos \varphi}{1 + p \sin \varphi} \quad \ldots \ldots \quad (258)$$

Setzt man beispielsweise $\varphi = 30^0$, $\gamma = 1^0$, $\alpha = 10^0$, so wird $p = 0{,}00302$ und $\delta = 0^0\, 8'\, 57''$. Betrüge der Winkel φ dagegen 60^0 und läge die eine Hälfte desselben über, die andere unter der Horizontalebene CHJ, so wäre für die zweite Hälfte ebenfalls $\delta' = 0^0\, 8'\, 57''$ und folglich der ganze Fehler $\Delta = \delta + \delta' = 0^0\, 17'\, 54''$.

Für $\varphi = 90^0$ wird $\delta = 0$, und für $\varphi = 0$ erhält man

$$\operatorname{tg} \delta = p = \operatorname{tg} \alpha \sin \gamma \quad \ldots \ldots \quad (259)$$

In dem letzteren Falle liegt der Winkel φ in einer Vertikalebene. Wäre nun der eine Schenkel unter 45^0 gegen den Horizont geneigt, während der andere wagrecht ist, so erhielte man $\operatorname{tg} \delta = \sin \gamma$ oder sehr nahe $\delta = \gamma$; d. h. es würde das Instrument bei einer Neigung

seines Horizontalkreises von einem Grad auch den Horizontalwinkel φ, welcher null ist, gleich einem Grad angeben.

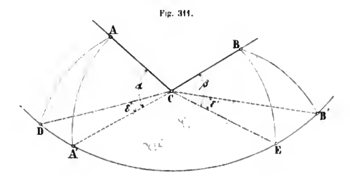
Man entnimmt hieraus zur Genüge, wie nachtheilig die schiefe Lage der Limbus- oder Messtischebene werden kann, und wie sorgfältig sie demnach zu vermeiden ist. Wer sich über diesen Einfluss noch ausführlicher unterrichten will, mag eine hierauf bezügliche Abhandlung des Prof. Matzka in Grunert's Archiv Bd. 13, S. 113 bis 137 nachlesen.

§. 260.

Aufgabe. Den Fehler in der Aufnahme eines Horizontalwinkels zu berechnen, welcher aus der schiefen Lage der Visirebene gegen die Limbus- oder Messtischebene entspringt.

Die Ebene des Limbus oder des Messtisches wird jetzt als horizontal vorausgesetzt, die Visirebene aber bilde in Folge der geneigten Lage der Drehaxe des Fernrohrs mit der vertikalen Alhidadenaxe einen Winkel γ. Der zu messende Winkel heisse ACB und habe zwei über die horizontale Limbus- oder Messtischebene, welche wir uns im Scheitel C denken, erhobene Schenkel.

Fig. 311.



In Fig. 311 stelle die aus C beschriebene Kreisfläche $DA'EB'$ den Limbus oder das Messtischblatt, AC den einen, BC den anderen Winkelschenkel vor, und AC sey unter dem Winkel α, BC unter β gegen den Horizont geneigt. Denkt man sich um den Scheitel C eine Kugel vom Halbmesser $CD = CE = 1$ beschrieben, so wird diese von der Limbusebene nach dem grössten Kreise $DA'EB'$, von den Visirebenen ACD, BCE nach den grössten Bögen AD, BE, und

von den Vertikalebenen ACA', BCB' nach den grössten Bögen AA' CB', geschnitten, und es stellt $A'CB' = \varphi$ den richtigen, $DCE = \psi$ aber den falschen Horizontalwinkel vor. Der Schenkel CD, welchen die Visirebene ACD projicirt, ist um den Winkel $DCA' = \varepsilon$ und der Schenkel CE, welcher aus der Visirebene BCE entspringt, um den Winkel ε' fehlerhaft; folglich ist der Gesammtfehler δ in dem vorliegenden Falle $= \varepsilon - \varepsilon'$. Läge dagegen der Schenkel CB unter der Limbusebene, so würde der Fehler $\delta' = \varepsilon + \varepsilon'$ seyn, wie man sich leicht selber klar machen kann.

Betrachtet man die rechtwinklichen sphärischen Dreiecke ADA' und BEB', so sieht man sofort, dass dieselben zur Berechnung der Fehlerwinkel ε und ε' geeignet sind. Denn es ist in ADA' der Bogen $A'D = \varepsilon$, arc $AA' = \alpha$, Winkel $AA'D = 90^0$ und Winkel $ADA' = 90^0 - \gamma$, wenn γ der Neigungswinkel der Visirebene gegen das Loth ist; folglich findet man

$$\sin \varepsilon = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma.$$

Im Dreiecke BEB' ist der Bogen $EB' = \varepsilon'$, arc $BB' = \beta$, Winkel $BB'E = 90^0$ und Winkel $BEB' = 90^0 - \gamma$; mithin auch

$$\sin \varepsilon' = \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma.$$

Berücksichtigt man, dass ε und ε' immer nur kleine Winkel sind, und dass desshalb

$$\varepsilon = 206265 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma \text{ und}$$
$$\varepsilon' = 206265 \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma \text{ Sek.}$$

gesetzt werden darf, so wird der gesuchte Winkelfehler

$$\delta = 206265 \operatorname{tg} \gamma (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (260)$$

wobei zu bemerken ist, dass α und β positiv zu nehmen sind, wenn sie Höhenwinkel, und negativ, wenn sie Tiefenwinkel vorstellen. Ist also der Schenkel CB geneigt, mithin β negativ, so wird

$$\delta = \delta' = 206265 \operatorname{tg} \gamma (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) \quad . \quad . \quad . \quad (261)$$

Setzt man in dem letzteren Falle $\alpha = +20^0$, $\beta = -20^0$, so folgt für $\gamma = 1^0$ der Fehler $\delta' = \varepsilon + \varepsilon' = 2621$ Sek. $= 47$ Minuten. Dieser Fehler gilt für jeden Horizontalwinkel, also auch für einen, der sehr nahe an Null liegt; woraus zu entnehmen ist, wie vielmal grösser der Fehler als der gemessene Winkel werden kann, und wie nothwendig es ist, durch sorgfältige Berichtigung des Theodolithen und der Kippregel die schiefe Lage der Visirebene zu vermeiden. Da bei Messtischaufnahmen diese Lage auch dann eintritt, wenn das Lineal der Kippregel durch unterliegende Sandkörnchen u. s. w. einseitig

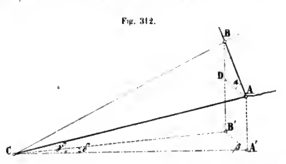
erhoben wird, so ist hiebei weiter noch auf die Reinheit des aufgespannten Papiers und beziehungsweise der Tischoberfläche zu achten.

§. 261.

Aufgabe. Zu bestimmen, wie gross die wegen der unrichtigen Lage der Zielpunkte entstehenden Fehler der Horizontalwinkel werden.

Die Zielpunkte sind durch Signale gegeben, welche entweder aus Stangen, Pfeilern, Pyramiden u. dergl. bestehen. Kommt es nun vor, dass z. B. ein Stangensignal schief statt lothrecht steht und man visirt nicht den Fusspunkt dieses Signals an, so hat man einen unrichtigen Zielpunkt benützt und dadurch einen Fehler in den gemessenen Winkel gebracht. Dasselbe geschieht, wenn eine lothrechte cylindrische Säule oder eine polirte Kugel nicht in der Richtung eines Durchmessers, sondern seitwärts anvisirt wird.

Fig. 312.



1) Stellt die Linie CA in Fig. 312 einen Winkelschenkel, C den Scheitel des Winkels und den Mittelpunkt des Instruments, AB aber die schiefe Signalstange vor, und geht die Visirlinie nach dem Punkte B statt nach A: so erhält man nicht die richtige Projection CA' des Schenkels CA, sondern die falsche CB', wodurch in den Horizontalwinkel ein Fehler $A'CB' = \delta$ kommt, welcher lediglich von dem Signale AB herrührt. Ist dasselbe unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigt und heisst h die Entfernung des Punktes B von A, so ist die Horizontalprojection von AB oder

$$AD = A'B' = h \cos \alpha;$$

nennt man ferner l die Länge des Schenkels CA und γ dessen Neigungswinkel gegen den Horizont, so ist $CA' = l \cos \gamma$; und wird endlich der Winkel CA'B', unter welchem die projicirende Ebene ACA' gegen die Signalebene ABD geneigt ist, mit β bezeichnet:

so kennt man in dem Dreiecke A'B'C drei Stücke und kann folglich den Winkel δ desselben finden. Es wird nämlich genau

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{h \cos \alpha \sin \beta}{l \cos \gamma - h \cos \alpha \cos \beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (262)$$

und, wenn man h cos α cos β gegen das weit grössere Product l cos γ vernachlässigt, näherungsweise

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{h \cos \alpha \sin \beta}{l \cos \gamma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (263)$$

Berücksichtigt man ferner noch, dass δ nur ein kleiner Winkel ist und folglich tg $\delta = \delta \sin 1''$ gesetzt werden darf, so ergibt sich schliesslich mit hinreichender Genauigkeit der Fehler

$$\delta = \frac{h \cos \alpha \sin \beta}{l \cos \gamma \sin 1''} \text{ Sek.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (264)$$

In so ferne der Werth dieses Ausdruckes bloss von β abhängt, wird er am grössten, wenn $\beta = 90^0$ ist, d. h. wenn die Visirebene senkrecht zur Signalebene steht; lässt man ihn nur von γ abhängen, so wird er am kleinsten für $\gamma = o$ und am grössten für $\gamma = 90^0$. Setzt man $\gamma = o$ und $\beta = 90^0$, so findet man

$$\delta = \frac{h \cos \alpha}{l \sin 1''}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (265)$$

woraus zu entnehmen, dass δ mit der Höhe (h) des anvisirten falschen Punktes (B) und mit dem Neigungswinkel (α) der Signalstange wächst, dagegen aber mit der Länge des Winkelschenkels abnimmt.

2) Wenn eine als Signal dienende runde Säule (B, Fig. 313) nicht in der Richtung der Visirebene (CB) von der Sonne beleuchtet ist, so wird man das Fadenkreuz des bei C befindlichen Fernrohrs nicht auf die Mitte M der sichtbaren Cylinderfläche HE, sondern auf die Mitte N des von der Sonne in der Richtung SB beschienenen und von C aus sichtbaren Theils FE dieser Fläche einstellen und dadurch einen Fehler in den Horizontalwinkel bringen, welcher dem Winkel MCN = ε entspricht.

Um ε zu berechnen bezeichnen wir mit

ω den Winkel der Sonnenstrahlen gegen die Visirebene CB; mit

r den Halbmesser FB der anvisirten Säule; mit

l die Länge des Winkelschenkels CB; und mit

φ den Winkel FCN, welcher gleich dem Winkel NCE ist.

Aus dem als gleichschenklich anzusehenden Dreiecke CFB folgt

$$\sin(\varphi - \varepsilon) = \frac{r \cos \omega}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (266)$$

und aus dem bei B rechtwinklichen Dreiecke CBF erhält man

$$\sin(\varphi + \varepsilon) = \frac{r}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (267)$$

Da nun $\varphi - \varepsilon$ und $\varphi + \varepsilon$ sehr kleine Winkel sind und daher

$$\varphi - \varepsilon = \frac{r \cos \omega}{l \sin 1''},$$

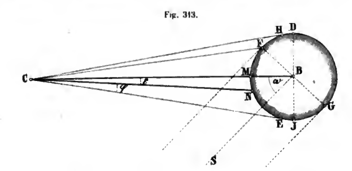
$$\varphi + \varepsilon = \frac{r}{l \sin 1''}$$

ist, so findet man aus diesen beiden Gleichungen sofort den Winkel

$$\varepsilon = \frac{r \sin^2 \frac{1}{2} \omega}{l \sin 1''} \text{ Sek.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (268)$$

und für den besonderen Fall, dass $\omega = 60^0$, $r = 0',5$ und $l = 1000'$ ist, $\varepsilon = 25{,}8$ Sekunden. Hieraus folgt, dass dieser Fehler selbst bei minder scharfen Messungen nicht immer übersehen werden darf.

Fig. 313.



3) Von der Aufnahme der Dreiecke mit dem Messtische.

§. 262.

Aus dem ersten Bande dieses Werkes ist bekannt, wie man einen gegebenen Punkt des Messtischs centrisch über einem gegebenen Punkt des Feldes aufstellt und gleichzeitig das Blatt nach einer gegebenen Richtung orientirt und in eine wagrechte Lage bringt; ferner, wie man mit dem Messtische und der Kippregel horizontale Winkel misst. Hier wird gelehrt, wie sich aus drei gemessenen Stücken eines beliebigen Dreiecks auf dem Felde ein diesem ähnliches Dreieck auf dem Messtischblatte zeichnen lässt.

Wenn man bloss nach dem Verhältniss der Seiten eines Natur-

dreiecks[1] fragt, so genügt ein ähnliches Dreieck auf dem Messtische (ein Bilddreieck) vollkommen, diese Frage zu beantworten; will man aber auch Aufschluss haben über die Grösse der Seiten oder die Fläche des Dreiecks, so muss mindestens eine Seite des Naturdreiecks bekannt und in einem bestimmten verjüngten Massstabe auf dem Messtischblatte aufgetragen seyn, damit man die anderen Seiten mit demselben Massstabe messen kann.[2] Wir nehmen an, dass die Erforschung der absoluten Grössen der Seiten und Flächen stets mit beabsichtigt werde und setzen desshalb immer eine oder zwei Seiten als gegeben voraus.

Bei der Aufnahme der Dreiecke mit dem Messtische kommen eigentlich nur drei verschiedene Fälle vor; es können nämlich entweder zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel, oder eine Seite und die beiden anliegenden Winkel, oder eine Seite, ein anliegender und ein gegenüberliegender Winkel gemessen werden, um das Dreieck daraus zu construiren. Jeder dieser Fälle wird von den praktischen Geometern kurz bezeichnet; diese Bezeichnungen sind aber sehr schwankend und meist nicht gut gewählt. Um jedoch von den gebräuchlichen Ausdrücken die besseren (wenn auch zum Theil in anderem Sinne) zu benützen, bezeichnen wir

a) durch „Vorwärtsabschneiden“ die Aufnahme eines Dreiecks aus einer Seite und den zwei anliegenden Winkeln;

b) durch „Rückwärtsabschneiden“ die Aufnahme eines Dreiecks aus einer Seite, einem anliegenden und einem gegenüberliegenden Winkel; und

c) durch „Seitwärtsabschneiden“ die Aufnahme eines Dreiecks aus zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel.

§. 263.

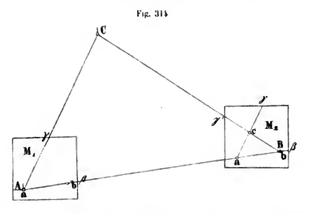
Aufgabe. Ein auf dem Felde gegebenes Dreieck mit dem Messtische durch Vorwärtsabschneiden aufzunehmen.

[1] Dieser Ausdruck wird der Kürze halber für „Dreieck auf dem Felde“ gebraucht, so wie wir ein Dreieck auf dem Messtische, das einem natürlichen ähnlich ist, das „Bilddreieck“ des letzteren nennen.

[2] Man kann zwar das Dreieck auch aufnehmen, ohne sofort die gegebene Seite in einem bestimmten verjüngten Mass aufzutragen; allein dann muss am Ende der Aufnahme deren Verjüngung erst bestimmt werden, wodurch sich der Uebelstand ergibt, dass man zur Messung der Seiten die vorhandenen verjüngten Massstäbe nicht benützen kann, sondern erst einen neuen passenden zeichnen muss.

Das Naturdreieck heisse ABC und sein Bilddreieck abc (Fig. 314). Da wir annehmen, dass es sich bloss um die Aufnahme des gegebenen Dreiecks handle, also keine der Seiten des Bilddreiecks auf dem Messtischblatte eine bestimmte Richtung gegen schon vorhandene Linien zu haben braucht: so stellen wir den Misstisch über einem der gegebenen zugänglichen Punkte (A) des Feldes so auf, dass dessen Bild (a), welches durch die Lothgabel gefunden wird, eine Lage erhält, bei welcher das Bilddreieck auf dem Messtische Platz findet, ohne dass seine Ecken zu nahe an die Ränder des Blattes

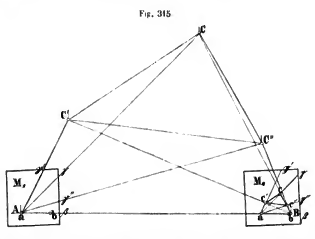
Fig. 314



fallen. Ist der Tisch horizontal gestellt und der Bildpunkt a bestimmt, so legt man an diesen das Lineal der Kippregel genau an, visirt nach B und zieht an der Kante des Lineals mit einem sehr harten Bleistifte eine äusserst feine Linie a β so lang als möglich. Auf dieser Linie muss der Punkt b liegen, und man erhält ihn, wenn die Horizontalprojection von AB gemessen und im verjüngten Masse als die Linie ab von a aus abgetragen wird. Nachdem b bestimmt ist, visirt man von a nach C und zieht wiederum eine sehr feine Linie a γ bis an den Rand des Tischblattes. Nun kommt der Messtisch von der Stellung M_1 in die M_2 über dem Punkte B und zwar dadurch, dass man b lothrecht über B und ba in die Vertikalebene BA bringt, während gleichzeitig das Tischblatt horizontal gestellt wird, was Alles nach §. 111 geschieht. Kürzer bezeichnet man dieses Verfahren, indem man sagt: es wird b centrisch mit B gestellt und der Tisch nach AB orientirt. Hat man sich überzeugt, dass bei horizontalem Tische die an βa liegende Kippregel das in A

stehende Signal schneidet, so visire man von b nach C und ziehe die Linie $b\gamma'$. Diese Linie begegnet der früher gezogenen $a\gamma$ in c und schneidet somit auf dem Messtische den nach vorne liegenden Bildpunkt c ab, der mit a und b das gesuchte Dreieck abc bildet. Denn da der Winkel $\gamma a \beta = A$ und $a b \gamma' = B$, so ist das Dreieck abc dem Dreiecke ABC, wie es seyn muss, ähnlich, und man kann folglich das absolute Mass von AC und BC erhalten, wenn man ac und bc mit demselben Massstabe misst, nach welchem ab aufgetragen wurde.

Fig. 315



Da der Punkt C jede beliebige Lage haben, sich also auch in C' oder C" befinden kann, so ist klar, dass sich diese letztern Punkte von A und B aus gerade so aufnehmen lassen wie der erstere. Werden aber drei solche Punkte von der Standlinie AB aufgenommen, so erhält man auf dem Messtische ein Dreieck cc'c", welches dem Dreiecke CC'C" ähnlich und eben so verjüngt ist wie die Grundlinie ab. Es geht hieraus zur Genüge hervor, dass es, um ein Dreieck durch Vorwärtsabschneiden aufzunehmen, nicht gerade nöthig ist, eine seiner Seiten als Standlinie zu wählen, sondern dass sich jede Gerade dazu eignet, welche nicht zu kurz ist, leicht gemessen werden kann und von ihren Endpunkten aus eine freie Aussicht nach den aufzunehmenden Dreieckspunkten gestattet. Ferner sieht man sofort ein, dass man eine beliebige Anzahl Punkte, die um die Standlinie AB vertheilt sind und von ihr aus anvisirt werden können, durch Vorwärtsabschneiden bestimmen kann, und dass somit

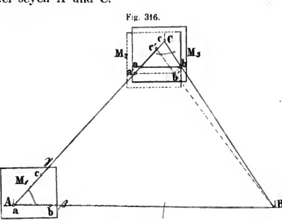
diese Methode auch zur Aufnahme von Vielecken geeignet ist. Uebrigens bedarf es wohl kaum der Erinnerung, dass man den Standpunkt A nicht eher verlässt, bis alle aufzunehmenden Eckpunkte anvisirt und die Linien $a\beta$, $a\gamma$, $a\gamma'$, $a\gamma''$ gezogen sind, und dass man in B ebenso zu verfahren habe.

§. 264.

Aufgabe. Man soll ein auf dem Felde gegebenes Dreieck mit dem Messtische durch Rückwärtsabschneiden aufnehmen.

Es sey wieder ABC (Fig. 316) das gegebene Naturdreieck und abc das gesuchte Bilddreieck. Die Seite, welche bereits gemessen und auf den Horizont reducirt ist, heisse AB, und die zu messenden Winkel seyen A und C.

Fig. 316.



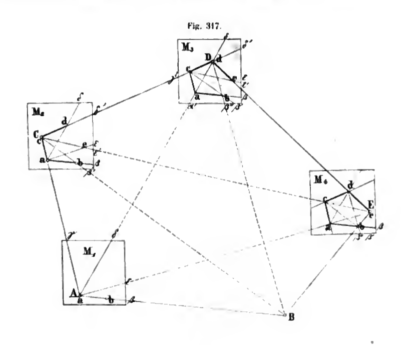
In dem Punkte A stelle man den Messtisch so auf, dass a centrisch zu A und die Platte horizontal wird. Hierauf visire man nach B und C, ziehe die Linien $a\beta$ und $a\gamma$, und trage AB in verjüngtem Masse (ab) ab. Nachdem die Messung in A vollendet ist, stelle man den Messtisch über C auf. Würde die Länge des Schenkels AC bekannt seyn, so könnte man durch Abtragen ihrer Verjüngung ac auf $a\gamma$ den Punkt c bestimmen, und es wäre die Aufgabe gelöst. Da aber AC unbekannt ist, so schätzt man diese Länge und nimmt darnach vorläufig den Punkt c an. Die weitere Arbeit besteht nun darin, zu prüfen, ob c richtig angenommen ist und, wenn dieses nicht der Fall, den richtigen Punkt c durch das Prüfungsverfahren selbst zu finden.

Zu dem Ende macht man c centrisch zu C und orientirt das Blatt M_2 nach CA, indem man die Kippregel an ac legt und die Wendeplatte des Tisches so lange dreht, bis das Fadenkreuz der Kippregel das Signal A deckt. Findet diese Deckung statt und ist der Tisch horizontal, so lege man die Linealkante genau an den Punkt b′ der Linie a′b′, welche die ab in der Stellung M_2 des Messtisches repräsentirt, an, visire nach B und ziehe die Linie b′c′. Wäre M_2 die richtige Stellung des Tisches und folglich a′c die richtige verjüngte Länge von AC, so müsste der Punkt c′ mit c zusammenfallen, da in den Dreiecken c′a′b′ und CAB zwei Seiten proportionirt und die eingeschlossenen Winkel c′a′b′ und CAB gleich wären. Fällt nun c′ nicht auf c, so ist die angenommene Linie a′c um cc′ entweder zu lang oder zu kurz, nach unserer Figur zu lang. Darum verschiebe man jetzt das Blatt in der Richtung von a′ nach c′, bis dieser neue Punkt lothrecht über C liegt, und orientire das Blatt wieder nach AC, wodurch es die Lage M_3 annimmt. Legt man nun die Linealkante an b und stellt das Fadenkreuz der Kippregel auf B ein, so wird die an dem Lineale gezogene Linie bc mit dem Punkte c′, der jetzt in c steht, zusammenfallen und das Dreieck abc vollständig bestimmt seyn; denn es ist nunmehr der Winkel bei a = dem Winkel A und der Winkel bei C = dem Winkel C. Dass das Dreieck abc in dem Massstabe gezeichnet ist, nach welchem die Seite AB aufgetragen wurde, folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke abc und ABC von selbst.

So wie der Punkt C rückwärts von AB abgeschnitten wurde, lässt sich jeder andere beliebige Punkt D, E (Fig. 317) abschneiden; folglich kann man auch durch dieses Verfahren ein Bilddreieck cde herstellen, welches einem gegebenen Naturdreiecke CDE ähnlich ist, ohne dass man eine Seite des letzteren zu kennen braucht, wenn man nur irgend eine Gerade AB hat, deren horizontale Länge bekannt ist und welche so liegt, dass sie von den drei Punkten C, D, E anvisirt werden kann, wie dieses in Fig. 317 als geschehen angenommen wurde. Es versteht sich hiebei von selbst, dass es nicht nöthig ist, dass man von C nach D, oder von D nach E, oder endlich von C nach E sehen könne; gestattet jedoch das Terrain in einer oder der anderen dieser Richtungen das Visiren, so wird man diese sich von selbst darbietende Controle der Messung nicht von der Hand weisen. Wie die einzelnen Linien der Fig. 317 in den vier Lagen

M_1, M_2, M_3, M_4 des Messtisches nach und nach entstanden sind und sich das Vieleck a b c d e, welches dem natürlichen Polygon A B C D E ähnlich ist, ergeben hat, bedarf nach den vorausgehenden Erörterungen wohl keiner besonderen Erklärung mehr.

Fig. 317.



§. 265.

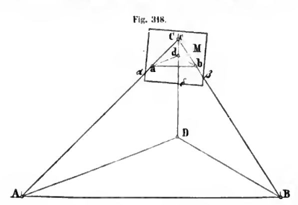
Aufgabe. Ein in der Natur gegebenes Dreieck mit dem Messtische durch Seitwärtsabschneiden aufzunehmen.

Das aufzunehmende Dreieck heisse A B C und sein Bild a b c (Fig. 318). Man messe auf dem Felde die Horizontalprojectionen zweier Seiten (A C, B C), stelle im Scheitel des Winkels (C), den sie bilden, den Messtisch horizontal, projicire diesen Winkelscheitel auf die Tischplatte, lege die Linealkante der Kippregel an die Projection (c), visire nach einander die Signale (A, B) der beiden übrigen Dreieckspunkte an und ziehe die Linien ($c\alpha$, $c\beta$), welche zu diesen Visirlinien gehören. Trägt man nun auf beiden die verjüngten Seitenprojectionen (c a, c b) a b und verbindet die Endpunkte (a, b) so ist das hierdurch entstehende Dreieck a b c dem Dreiecke A B C

ähnlich, da beide proportionirte Seiten und zwischen diesen gleiche Winkel haben.

Wäre noch ein vierter Punkt D auf dem Felde gegeben gewesen, so hätte man denselben von C aus ebenso wie A oder B aufnehmen und durch den Punkt d auf dem Messtische darstellen können. Demnach erhielte man das Bilddreieck a b d von einem Punkte C ausserhalb des Naturdreiecks A B D bloss durch wiederholte Anwendung der Methode des Seitwärtsabschneidens. Denn indem man von c nach

Fig. 318.



D visirt, die Linie c d zieht und auf derselben die Verjüngung von C D = c d abträgt, hat man eigentlich die drei Dreiecke A B C, A C D, B C D direkt durch Abmessung zweier Seiten und des eingeschlossenen Winkels, A D B aber indirekt aus den drei durch Construction sich ergebenden Stücken a d, d b, W. a d b aufgenommen.

Es ist hiernach leicht einzusehen, wie sich durch Seitwärtsabschneiden ein Vieleck aufnehmen lässt, ohne dass man den Messtisch in einem der Eckpunkte aufstellt. Damit soll aber keineswegs behauptet werden, dass diese Methode praktisch und der in §. 276 auseinandergesetzten vorzuziehen sey. Bei besondern Lokalverhältnissen kann indessen auch ein vortheilhafter Gebrauch von ihr gemacht werden, wenigstens in Beziehung auf einzelne Polygonpunkte.

4) Von der Aufnahme der Dreiecke mit dem Theodolithen.

§. 266.

Handelt es sich bei der Bestimmung der Winkel eines ebenen Dreiecks nicht um den grösstmöglichen Grad der Genauigkeit, so

genügt es, zwei Winkel dieses Dreiecks unmittelbar zu messen und den dritten zu berechnen. Es werden dann allerdings die drei Winkel nicht gleich genau seyn, indem der berechnete Winkel die algebraische Summe der Beobachtungsfehler, welche in den gemessenen Winkeln stecken, enthält; aber da diese Fehler als äusserst klein vorausgesetzt werden, so wird auch ihre Summe nicht bedeutend seyn.

Wenn dagegen das ebene Dreieck, dessen Winkel zu bestimmen sind, einen Bestandtheil eines trigonometrischen Netzes bildet, das einer grösseren Flurvermessung zu Grunde liegt; wenn also von diesem Dreiecke wieder andere Dreiecke, die an seinen Seiten liegen, unmittelbar, und jene Dreiecke, die sich an diese anschliessen, mittelbar abhängen; so unterlässt man es nicht, alle drei Winkel des Dreiecks direkt oder nöthigenfalls durch Centrirung zu messen. Indem man alsdann die beobachtete Winkelsumme mit der theoretischen von 180° vergleicht, erhält man nicht nur einen Begriff von der Genauigkeit der Messung, sondern kann auch durch Vertheilung der Differenz beider Summen auf die drei Winkel den Fehler in jedem einzelnen Winkel im allgemeinen kleiner machen, als er in dem Falle ist, wo man bloss zwei Winkel misst und den dritten berechnet.

Die unmittelbare Messung aller Winkel eines Dreiecks, welche so eben für ein ebenes Dreiecknetz gefordert wurde, ist noch strenger zu fordern, wenn die Dreiecksseiten so lang sind, dass man sie nicht mehr als gerade horizontale Linien ansehen darf, sondern als grösste Kreisbögen, und folglich das Dreieck, welches sie einschliessen, als ein sphärisches betrachten muss. In diesem Falle ist aber die Summe aller Winkel des Dreiecks grösser als 180°, und es heisst der Ueberschuss dieser Summe der sphärische Excess. Bezeichnet man diese von der Form des Dreiecks abhängende Grösse mit ε, so soll die beobachtete Winkelsumme $= 180^\circ + \varepsilon$ seyn; da sie es aber nie oder nur zufällig seyn wird, so besteht auch hier wieder eine Differenz zwischen der theoretischen und der beobachteten Winkelsumme und diese Differenz ist es, welche uns ein Urtheil über die Genauigkeit der Winkelmessungen und Gelegenheit zu einer entsprechenden Verbesserung derselben gibt. Heisst nämlich die theoretische Winkelsumme $180^\circ + \varepsilon$ und die beobachtete $180^\circ + \varepsilon'$, so ist $\varepsilon - \varepsilon'$ die Summe aller Beobachtungsfehler, welche zur Vertheilung kommt.

In welcher Weise diese Vertheilung sowohl bei sphärischen als ebenen Dreiecken zu geschehen habe, hängt davon ab, ob alle drei Winkel mit gleicher Genauigkeit gemessen sind oder nicht. Sind alle Winkel gleich genau, so wird die Differenz $\varepsilon - \varepsilon'$ gleichheitlich vertheilt; ist aber die Genauigkeit verschieden, so vertheilt man die Grösse $\varepsilon - \varepsilon'$ mit Rücksicht auf diese Genauigkeit nach der Methode der kleinsten Quadrate, wovon im §. 268 so weit die Rede ist, als es die Anwendung dieser Methode auf den vorliegenden Fall erfordert.

§. 267.

Aufgabe. Man soll den sphärischen Excess eines geodätischen Dreiecks bestimmen.

Obwohl die Seiten eines Dreiecks, das einem trigonometrischen Netze für eine Landes- oder Gradmessung angehört, in Wirklichkeit keine grössten Kreise einer Kugel, sondern richtiger Vertikalschnitte des Erdsphäroids und, ganz streng genommen, geodätische Linien sind: so pflegt man doch den sphärischen Excess eines solchen Dreieckes so zu berechnen, als ob es ein Kugeldreieck wäre, und man ist dazu berechtigt, weil der hieraus entspringende Fehler ganz unmerklich wird, indem selbst die grössten geodätischen Dreiecke nur einen ausserordentlich kleinen Theil der Erdoberfläche umschliessen.

Wir werden zunächst den sphärischen Excess aus den drei Seiten eines beliebigen Dreiecks (das also kein geodätisches zu seyn braucht) bestimmen und hierauf zeigen, wie man daraus den Excess der Erddreiecke findet, wenn entweder auch drei Seiten, oder zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel, oder eine Seite und zwei ihr anliegende Winkel bekannt sind.

Bezeichnen a, b, c die gegebenen Seiten und A, B, C die ihnen gegenüberliegenden Winkel des sphärischen Dreiecks ABC, dessen Excess

$$\varepsilon = A + B + C - 180^0$$

gesucht wird, so kann man nach Gent (Grunerts Archiv Bd. 20, S. 358) aus den Gauss'schen Formeln:

$$\cos {}^1/_2 (A + B) \cos {}^1/_2 c = \cos {}^1/_2 (a + b) \sin {}^1/_2 C,$$

$$\sin {}^1/_2 (A + B) \cos {}^1/_2 c = \cos {}^1/_2 (a - b) \cos {}^1/_2 C$$

zunächst die folgenden Gleichungen bilden:

$$\frac{\cos {}^1/_2 (A + B) \mp \cos (90^0 - {}^1/_2 C)}{\sin {}^1/_2 C} = \frac{\cos {}^1/_2 (a + b) \mp \cos {}^1/_2 c}{\cos {}^1/_2 c},$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(A+B) \mp \sin (90^0 - \frac{1}{2} C)}{\cos \frac{1}{2} C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b) \mp \cos \frac{1}{2} c}{\cos \frac{1}{2} c}$$

und hieraus durch einfache Zerlegungen der Zähler die nachstehenden Relationen ableiten, in denen

$$a + b + c = 2s \text{ und } A + B - C + 180^0 = \omega$$

gesetzt ist und ε den gesuchten sphärischen Excess bedeutet:

$$\sin \tfrac{1}{4} \varepsilon \sin \tfrac{1}{4} \omega \cos \tfrac{1}{2} c = \sin \tfrac{1}{2} s \sin \tfrac{1}{2} (s - c) \sin \tfrac{1}{2} C,$$
$$\cos \tfrac{1}{4} \varepsilon \cos \tfrac{1}{4} \omega \cos \tfrac{1}{2} c = \cos \tfrac{1}{2} s \cos \tfrac{1}{2} (s - c) \sin \tfrac{1}{2} C,$$
$$\sin \tfrac{1}{4} \varepsilon \cos \tfrac{1}{4} \omega \cos \tfrac{1}{2} c = \sin \tfrac{1}{2} (s - a) \sin \tfrac{1}{2} (s - b) \cos \tfrac{1}{2} C,$$
$$\cos \tfrac{1}{4} \varepsilon \sin \tfrac{1}{4} \omega \cos \tfrac{1}{2} c = \cos \tfrac{1}{2} (s - a) \cos \tfrac{1}{2} (s - b) \cos \tfrac{1}{2} C.$$

Dividirt man die erste dieser Gleichungen durch die zweite und die dritte durch die vierte, so folgt:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{4} \varepsilon \operatorname{tg} \tfrac{1}{4} \omega = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} s \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (s - c),$$
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{4} \varepsilon \cot \tfrac{1}{4} \omega = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (s - a) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (s - b),$$

und wenn man diese beiden Gleichungen mit einander multiplicirt, so erhält man zur Berechnung des sphärischen Excesses irgend eines Kugeldreiecks den zuerst von Lhuilier aufgefundenen Ausdruck:

$$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{4} \varepsilon = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} s \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (s - a) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (s - b) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (s - c) \; . \; (248).$$

Um von der Grösse des sphärischen Excesses der geodätischen Dreiecke eine bestimmte Anschauung zu geben, denken wir uns ein gleichseitiges Kugeldreieck und berechnen daraus Excesse für verschiedene Werthe der Seiten nach der Gleichung

$$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{4} \varepsilon = \operatorname{tg} \tfrac{3}{4} a \operatorname{tg}^3 \tfrac{1}{4} a \quad . \; . \; . \; . \quad (249)$$

welche aus der vorhergehenden folgt, wenn man $a = b = c$ setzt. Nimmt man

$a = 15$ geogr. Meilen $= 1^0 0'$ an, so wird $\varepsilon = 27{,}2$ Sekunden;
$a = 10$ „ „ $= 0^0 40'$ „ „ „ $\varepsilon = 12{,}1$ „
$a = 5$ „ „ $= 0^0 20'$ „ „ „ $\varepsilon = 3{,}0$ „
$a = 1$ „ „ $= 0^0 4'$ „ „ „ $\varepsilon = 0{,}12$ „

Hieraus erhellt vorläufig zur Genüge, dass man bei Erddreiecken, deren Seiten weniger als eine Meile oder auch nur weniger als 30000 Fuss betragen, gar keine Rücksicht auf den sphärischen Excess zu nehmen braucht, und dieselben folglich als ebene Dreiecke behandeln kann.

Da die Seiten a, b, c der geodätischen Dreiecke stets nur einen sehr kleinen Theil eines grössten Kreises der Erdkugel ausmachen, und meistentheils die halbe Summe aller drei Seiten kleiner als ein Erdgrad, d. h. kleiner als 15 Meilen ist, so darf, wenn man unter

r den Halbmesser der Erdkugel und unter a, b, c, s die wirklichen Längen der Seiten versteht, in dem Ausdrucke (248)

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} s = \frac{s}{2r};\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (s - a) = \frac{s - a}{2r};\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (s - b) = \frac{s - b}{2r}$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (s - c) = \frac{s - c}{2r};\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{4} \varepsilon = \tfrac{1}{4} \varepsilon \operatorname{tg} 1''$$

gesetzt und jener Ausdruck dadurch in den folgenden verwandelt werden:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}}{r^2 \operatorname{tg} 1''} \quad . \; . \; . \quad (250)$$

Nun ist aber aus der ebenen Trigonometrie bekannt, dass die Fläche f eines ebenen Dreiecks, welches die Seiten a, b, c hat, der Quadratwurzel aus s (s — a) (s — b) (s — c) gleich ist; führt man daher in die letzte Gleichung f ein, so wird für ein Dreieck, dessen Seiten im Verhältniss zur Kugel, auf der es liegt, klein sind, also für ein geodätisches Dreieck, der sphärische Excess:

$$\varepsilon = \frac{f}{r^2 \operatorname{tg} 1''} \text{ Sekunden} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (251)$$

Während der vorletzte Ausdruck dazu dient, den Excess aus den drei Seiten des Dreiecks zu berechnen, kann man nunmehr auch leicht drei andere Stücke des Dreiecks, aus denen sich f berechnen lässt, zur Bestimmung von ε benützen.

Sind nämlich zwei Seiten a, b und der von ihnen eingeschlossene Winkel C′ eines ebenen Dreiecks A B C bekannt, so ist

$$f = \tfrac{1}{2}\, a b \sin C';$$

in dem vorliegenden Falle ist aber nicht C′, sondern der Winkel C bekannt, welcher um $\tfrac{1}{3}\,\varepsilon$ grösser ist als C′. Bedenkt man jedoch, dass selbst bei Dreiecken, deren Seiten 5 Meilen lang sind, $\tfrac{1}{3}\,\varepsilon$ nur ungefähr 1 Sekunde beträgt und dass folglich bei gleichseitigen Dreiecken die Fläche f, wenn man C statt C′ setzt, nur in dem Verhältnisse von sin 60° 0′1″ zu sin 60° zu gross wird, und dass sich mithin auch ε nur um $\tfrac{1}{300000}$ seines eigenen Werthes zu gross darstellt: so kann man nicht mehr zweifeln, dass unbeschadet der Genauigkeit, welche sich durch die feinsten Mittel noch erreichen lässt,

$$f = \tfrac{1}{2}\, a b \sin C$$

gesetzt werden darf.[1] Nimmt man aber f so, wie hier steht, so wird

[1] Was wir hier an einem besondern Falle gezeigt haben, lässt sich auch allgemein beweisen; wir halten aber diesen Beweis hier um so weniger für nöthig, als er zugleich mit dem Legendre'schen Satze gegeben wird (§. 303).

$$\varepsilon = \frac{n b \sin C}{2r^2 \operatorname{tg} 1''} \text{ Sekunden} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (252)$$

Kennt man in einem sphärischen Dreiecke ABC eine Seite c und die beiden anliegenden Winkel A und B, so ist aus dem vorhin angegebenen Grunde der Flächeninhalt des durch die drei Punkte A, B, C gelegten ebenen Dreiecks genau genug durch

$$f = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin (A + B)}$$

ausgedrückt, und es lässt sich folglich der sphärische Excess, wenn C, A, B gegeben sind, aus der Gleichung

$$\varepsilon = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2r^2 \sin (A + B) \operatorname{tg} 1''} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (253)$$

berechnen. (Eine andere Ableitung der Ausdrücke Nr. 250 und 251 aus der Lhuilier'schen Gleichung (Nr. 248) enthält Crelle's Journal d. Math. Bd. 50, S. 39.)

§. 268.

Aufgabe. Die drei Winkel eines sphärischen Dreiecks sind mit ungleicher Genauigkeit gemessen worden, man soll die unvermeidlichen Beobachtungsfehler nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgleichen.

Wir nehmen an, der Winkel A des Dreiecks ABC sey durch mfache, der Winkel B durch nfache und der Winkel C durch pfache Wiederholung gemessen worden; die Ergebnisse dieser Messungen seyen α, β, γ und es betrage die Summe dieser drei beobachteten Winkel $180^0 + \varepsilon'$; der sphärische Excess sey nach der Formel (253), welche eine Seite des Dreiecks als bekannt voraussetzt, gleich ε berechnet, und man habe folglich die Summe $\varepsilon - \varepsilon'$ der unvermeidlichen Beobachtungsfehler auszugleichen.

Sind A, B, C die gesuchten Winkelwerthe, d. h. diejenigen berechneten Werthe, welche allen Beobachtungen am bessten entsprechen und von den absolut richtigen am wenigsten abweichen: so sind die Fehler zwischen den beobachteten und berechneten Winkelwerthen folgende:

$$v_1 = A - \alpha;\; v_2 = B - \beta;\; v_3 = C - \gamma.$$

Da aber die Summe der drei Winkel

$$A + B + C = 180^0 + \varepsilon$$

seyn muss, so wird man

$$v_3 = C - \gamma = 180^0 + \varepsilon - \gamma - A - B$$

setzen und nun A und B so bestimmen, dass die Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten Fehlerquadrate:

$$m\,(A - \alpha)^2 + n\,(B - \beta)^2 + p\,(\varphi - A - B)^2, \quad (254)$$

in welcher der constante Ausdruck

$$180^0 + \varepsilon - \gamma = \varphi$$

gesetzt ist, ihren kleinsten Werth erlangt.

Die Werthe von A und B, welche diese Function zu einem Minimum machen können, ergeben sich nach den Regeln der Differentialrechnung aus den beiden Gleichungen:

$$m\,(A - \alpha) - p\,(\varphi - A - B) = 0$$
$$n\,(B - \beta) - p\,(\varphi - A - B) = 0.$$

Löst man dieselben nach A und B auf, berücksichtigt, dass

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0 + \varepsilon' \text{ und } 180^0 + \varepsilon - A - B = C$$

ist, und setzt der Kürze wegen

$$mn + mp + np = z,$$

so findet man schliesslich die ausgeglichenen Winkel:

$$A = \alpha + \frac{np}{z}\,(\varepsilon - \varepsilon'),$$
$$B = \beta + \frac{mp}{z}\,(\varepsilon - \varepsilon'), \quad \ldots\ldots \quad (255)$$
$$C = \gamma + \frac{mn}{z}\,(\varepsilon - \varepsilon');$$

denn man überzeugt sich durch die zweiten Ableitungen der Function (254) leicht davon, dass sie durch diese Werthe von A und B zu einem Minimum gemacht wird. Addirt man die letzten drei Gleichungen, so kommt, wie es seyn muss,

$$A + B + C = \alpha + \beta + \gamma + \varepsilon - \varepsilon' = 180^0 + \varepsilon.$$

Wäre das Dreieck, in welchem die Winkelsumme $\alpha + \beta + \gamma = 180^0 + \varepsilon'$ gemessen wurde, ein ebenes Dreieck, so würde man bei der Ausgleichung wie vorhin verfahren, aber selbstverständlich den Excess $\varepsilon = 0$ nehmen.

Die ausgeglichenen Winkel würden alsdann folgende Werthe haben:

$$A = \alpha - \frac{np}{z}\,\varepsilon',$$
$$B = \beta - \frac{mn}{z}\,\varepsilon', \quad \ldots\ldots\ldots \quad (256)$$
$$C = \gamma - \frac{mn}{z}\,\varepsilon'.$$

Es versteht sich von selbst, dass, wenn durch die Messung $\alpha + \beta + \gamma = 180^0 - \varepsilon'$ gefunden worden wäre, die Verbesserungen an den sphärischen Winkeln α, β, γ beziehlich

$$\frac{np}{z}\,(\varepsilon + \varepsilon'),\quad \frac{mp}{z}\,(\varepsilon + \varepsilon'),\quad \frac{mn}{z}\,(\varepsilon + \varepsilon')$$

und an den Winkeln des ebenen Dreiecks

$$+\,\frac{np}{z}\,\varepsilon',\ +\,\frac{mp}{z}\,\varepsilon',\ +\,\frac{mn}{z}\,\varepsilon'$$

betragen müssten.

Sind die Genauigkeiten oder die Gewichte aller Winkelbeobachtungen einander gleich, d. h. ist

$$m = n = p,$$

so beträgt, wie man sich leicht überzeugt, die Verbesserung jedes sphärischen Winkels $\frac{1}{3}\,(\varepsilon \mp \varepsilon')$ und jedes ebenen Winkels $\mp \frac{1}{3}\,\varepsilon'$, d. h. die Summe der unvermeidlichen Beobachtungsfehler wird auf die drei Winkel gleichheitlich vertheilt. Es ist folglich diese Vertheilungsart auch in der Methode der kleinsten Quadrate begründet.

Beispiel. In einem Dreiecke ABC, dessen Seite $AB = c = 24187{,}5$ Toisen ist, wurde unter übrigens gleichen Umständen der Winkel bei

A nach	10 maliger	Wiederholung	$= 71^0\ 48'\ 34{,}''3 = \alpha$
B „	20 „	„	$= 48^0\ 27'\ 12{,}''8 = \beta$
C „	12 „	„	$= 59^0\ 44'\ 22{,}''5 = \gamma$

gemessen. Man soll diese Winkel nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgleichen.

Zuerst ist der sphärische Excess ε nach der Formel

$$\varepsilon = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2r^2 \sin (A + B) \operatorname{tg} 1''}$$

zu berechnen. In diesem Ausdrucke ist bekannt:

$$c = 24187{,}5;\ r = 3266608;\ \frac{1}{\operatorname{tg} 1''} = 206265''.$$

Die Winkel A und B könnte man zwar nehmen, wie sie gemessen wurden: da jedoch $\alpha + \beta + \gamma = 180^0\ 0'\ 9{,}''6$ gegeben ist, so sind die Werthe von A und B, welche um den dritten Theil von $\varepsilon' = 9{,}''6$ d. i. um $3''$ verkleinert sind, zur Berechnung des sphärischen Excesses am geeignetsten, nämlich:

$$A' = 71^0\ 18'\ 31{,}''1;\ B' = 58^0\ 47'\ 9{,}''6.$$

Setzt man alle diese Werthe in den Ausdruck für ε ein und vollzieht die Ausrechnung, so findet man den Excess

$$\varepsilon = 4{,}65 \text{ Sekunden.}$$

Nun kann man nach Gleichung (255) die Werthe von A, B, C bestimmen; da aber hier $\varepsilon' > \varepsilon$, so schreibt man die dort erhaltenen Ausdrücke besser so:

$$A = \alpha - \frac{np}{z}(\varepsilon' - \varepsilon),$$

$$B = \beta - \frac{mp}{z}(\varepsilon' - \varepsilon),$$

$$C = \gamma - \frac{mn}{z}(\varepsilon' - \varepsilon).$$

Nach den gegebenen Werthen ist

$$np = 240;\ mp = 120;\ mn = 200;$$

$$z = np + mp + mn = 560;$$

folglich sind die Verbesserungen von α, β, γ oder

$$v_1 = -2{,}''12;\ v_2 = -1{,}''06;\ v_3 = -1{,}''77;$$

und somit die verbesserten Winkel:

$$A = 71^0\ 48'\ 32{,}''18;$$

$$B = 48^0\ 27'\ 11{,}''74;$$

$$C = 59^0\ 44'\ 20{,}''73.$$

Die Summe dieser drei Winkel beträgt $180^0\ 0'\ 4{,}''65$, wie es seyn muss.

5) Von dem Einflusse der unvermeidlichen Beobachtungsfehler auf Dreiecksberechnungen.

§. 269.

Ein Dreieck ist durch drei Stücke bestimmt, wenn sich darunter eine Seite befindet. Sind diese Stücke mit mathematischer Genauigkeit gegeben, so werden auch die übrigen Stücke mit dieser Genauigkeit gefunden; enthalten aber die gegebenen Stücke kleine Fehler, so müssen nothwendig auch die aus ihnen berechneten Stücke des Dreiecks mehr oder minder fehlerhaft werden. Es ist nun für den praktischen Geometer wichtig, zu wissen: innerhalb welcher Grenzen die berechneten Stücke eines Dreiecks falsch sind, wenn die Fehlergrenzen der Messungsresultate bekannt sind, und für welche Form der Dreiecke der Einfluss der Beobachtungsfehler möglichst klein wird.

Bei der nachfolgenden Untersuchung dieser Fragen wird voraus-

gesetzt, dass die Messungsfehler nicht von einem schlechten Zustande der Instrumente oder von der Ungeschicklichkeit oder Nachlässigkeit des Geometers herrühren, sondern dass sie zu den unvermeidlichen Fehlern gehören, also möglichst klein sind (s. §. 255). Werden nun zwei so kleine Grössen mit einander multiplicirt, so kann ihr Product gegen jedes andere Product, das aus einer gemessenen Grösse und deren Zuwachs oder Abnahme hervorgeht, vernachlässigt werden, so wie die zweite Potenz der Fehlergrösse verschwindend klein ist gegen ihre erste Potenz.

Unter dieser Voraussetzung, und da es sich bei Betrachtung der Folgen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler doch nur um annähernde Resultate handelt, ist es gestattet, die Aenderung, welche eine Function von gemessenen und desshalb fehlerhaften Grössen erleidet, wenn letztere um ihre Fehler verbessert werden, dadurch zu finden, dass man jene Function nach den einer geringen Veränderlichkeit fähigen Grössen differentiirt.

Sind z. B. die Grundlinie x und die Höhe y eines Parallelogramms beziehlich um Δx und Δy zu klein gemessen worden, also ihre wahren Längen $x + \Delta x$ und $y + \Delta y$, so ist der wahre Flächeninhalt des Parallelogramms

$$(x + \Delta x)(y + \Delta y) = xy + x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\, \Delta y,$$

während der aus den Messungsresultaten hervorgehende xy ist. Die Aenderung nun, welche der Ausdruck xy erleidet, indem man $x + \Delta x$ für x und $y + \Delta y$ für y setzt, ist mit Rücksicht auf die Bemerkung über die Grösse des Products $\Delta x\, \Delta y$:

$$\Delta(xy) = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = x\Delta y + y\Delta x.$$

Vergleicht man aber dieses Ergebniss mit dem, welches aus der Differentiirung des Products xy hervorgeht, so unterscheidet es sich von letzterem nur dadurch, dass hier Δ steht, wo dort d; und dieser Unterschied rührt lediglich davon her, dass die Fehler Δx, Δy keine unendlich kleinen Grössen sind und zu seyn brauchen, obwohl sie immerhin als sehr klein zu denken sind.

Fragen wir also nach der Aenderung, welche das Verhältniss zweier Linien x und y erleidet, wovon die eine um Δx und die andere um Δy fehlerhaft ist, so können wir, den oben ausgesprochenen Satz anwendend, sofort die Aenderung angeben; es ist nämlich

$$\Delta\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\Delta x - x\Delta y}{y^2}.$$

Die Fehler Δx und Δy können ebensowohl positiv als negativ seyn und es kann $+ \Delta x$ mit $+ \Delta y$, $+ \Delta x$ mit $- \Delta y$, $- \Delta x$ mit $+ \Delta y$ und $- \Delta x$ mit $- \Delta y$ zusammentreffen, wesshalb auch der vorstehende Ausdruck 4 verschiedene Werthe annehmen kann, nämlich:

$$\frac{y \Delta x - x \Delta y}{y^2}, \quad \frac{y \Delta x + x \Delta y}{y^2}, \quad - \frac{y \Delta x + x \Delta y}{y^2}, \quad - \frac{y \Delta x - x \Delta y}{y^2},$$

wobei selbstverständlich Δx und Δy nur mehr absolute Werthe vorstellen.

Bewegt sich also der wahre Werth der Linie x zwischen $x + \Delta x$ und $x - \Delta x$, jener der Linie y aber zwischen $y + \Delta y$ und $y - \Delta y$, so kann der wahre Werth des Verhältnisses beider von dem Verhältnisse $x : y$ ebensowohl um die Grösse

$$\pm \frac{y \Delta x + x \Delta y}{y^2}$$

als um die Grösse

$$\pm \frac{y \Delta x - x \Delta y}{y^2}$$

verschieden seyn. Die äussersten Grenzen des Verhältnisswerthes sind demnach

$$\frac{x}{y} + \frac{y \Delta x + x \Delta y}{y^2} \text{ und } \frac{x}{y} - \frac{y \Delta x + x \Delta y}{y^2}.$$

Stellen Δx und Δy Fehler vor, welche bei Winkelmessungen unvermeidlich waren, so sind dieselben, wenn sie mit den Winkeln, denen sie angehören, unmittelbar verglichen werden, auch in derselben Masseinheit, worin diese gegeben sind, auszudrücken, so dass, wenn in einem Winkel x von 37° 40′ 20″ ein Fehler Δx von 5″ vorkäme, der absolute Werth von $\Delta x = 5''$ wäre, während der von $x = 135620''$ ist. Der relative Fehler würde demnach seyn:

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{5}{135620} = \frac{1}{27124}.$$

Ist aber ein Winkel nicht unmittelbar, sondern durch irgend eine trigonometrische Function d. h. durch das Verhältniss zweier Linien gegeben, so muss auch sein Fehler durch ein solches Verhältniss ausgedrückt werden. Das passendste Verhältniss gibt in diesem Falle, da der Fehler immer nur klein seyn darf, der Kreisbogen, welcher den Winkelfehler misst, zu dem Halbmesser 1 des Kreises. Hienach ist ein Fehler von 1 Sekunde gleich

$$\frac{2\pi}{360.60.60} = \frac{1}{206265}, \quad \ldots\ldots \quad (257)$$

und der Fehler von einer Minute gleich

$$\frac{2\pi}{360.60} = \frac{60}{206265} = \frac{1}{3438} \quad \ldots\ldots \quad (258)$$

Hätte man den Ausdruck $\sin x \, \Delta x$ zu berechnen, in welchem $x = 37^0\, 40'\, 20''$ ist und Δx einem absoluten Fehler von $5''$ entspricht, so würde man erst

$$\log \sin x = \log (\sin 37^0\, 40'\, 20'') = 0{,}78614 - 1$$

und hierauf

$$\log \left(\frac{5}{206265}\right) = \log \left(\frac{1}{41253}\right) = 0{,}38455 - 5$$

berechnen, darnach

$$\log (\sin x \, \Delta x) = 0{,}17069 - 5$$

und hieraus endlich

$$\sin x \, \Delta x = 0{,}0000148 \quad \ldots\ldots \quad (259)$$

bestimmen.

Nach dieser Vorbereitung wird das Nachfolgende leicht zu verstehen und anzuwenden seyn.

§. 270.

Aufgabe. Ein Dreieck ist durch Vorwärtsabschneiden aufgenommen worden; man soll bestimmen, welchen Einfluss die Beobachtungsfehler auf die berechneten Seiten haben, und bei welchen Formen des Dreiecks dieser Einfluss am kleinsten wird.

Das Dreieck heisse ABC, die gemessene Seite sey c und die beiden anliegenden ebenfalls gemessenen Winkel seyen A und B. Die Messungsfehler sollen $\pm \Delta C$, $\pm \Delta B$ seyn. Es fragt sich, innerhalb welcher Grenzen die berechneten Werthe der Seiten a und b unsicher sind.

Betrachten wir zuerst die Seite a und nehmen wir an, alle Beobachtungsfehler seyen positiv, also die Seite um ΔC, der Winkel A um ΔA und der Winkel B um ΔB zu klein gemessen, so dass die richtigen Werthe beziehlich $C + \Delta C$, $A + \Delta A$ und $B + \Delta B$ sind. Sucht man die Seite a aus den durch Beobachtung gefundenen Grössen C, A und B, so dient dazu die bekannte Gleichung:

$$a = \frac{c \sin A}{\sin (A + B)} \quad \ldots\ldots \quad (260)$$

Würde man nun in diesem Ausdrucke $C + \Delta c$ für c, $A + \Delta A$ für A, und $B + \Delta B$ für B setzen, so fände man einen zweiten Werth von a und dessen Unterschied von dem ersten gäbe den Fehler in der Seite a. Diesen Fehler erhält man aber unmittelbar, wenn man die vorstehende Gleichung in dem Sinne differentiirt, welcher im §. 262 angedeutet wurde.

Zur Vereinfachung dieses Geschäfts kann man die Gleichung (260) auch so schreiben:

$$\log a = \log c + \log \sin A - \log \sin (A + B),$$

und daraus durch Differentiiren erhalten:

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta c}{c} + \frac{\Delta A}{\operatorname{tg} A} - \frac{\Delta A + \Delta B}{\operatorname{tg} (A + B)} \quad . \quad . \quad (261)$$

Der Ausdruck rechts liefert, wie man sieht, das Verhältniss des Fehlers in der Seite a zu dieser Seite selbst. Wären beide Winkel fehlerfrei gewesen, so würde

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta c}{c}$$

d. h. die berechnete Seite a in demselben Verhältnisse falsch seyn, als die gemessene Seite c. Wäre dagegen die Seite c ohne Fehler, so erhielte man

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta A}{\operatorname{tg} A} - \frac{\Delta A + \Delta B}{\operatorname{tg} (A + B)},$$

oder, wenn man $A + B = 180^0 - C$ setzt und berücksichtigt, dass $\operatorname{tg} (180^0 - C) = - \operatorname{tg} C$ ist:

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta A}{\operatorname{tg} A} + \frac{\Delta A + \Delta B}{\operatorname{tg} C} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (262)$$

Hiernach wird der Werth des Fehlers Δa um so grösser, je kleiner tg C, d. h. je spitzer der Winkel C ist, und es wird bei unverändertem A der Fehler Δa um so kleiner, je mehr sich der Winkel C einem rechten nähert, oder darüber hinaus geht.

Aehnliche Fragen lassen sich viele stellen und leicht beantworten; es wird aber nicht nöthig seyn, länger dabei zu verweilen.

Sind die Fehler ΔC, ΔA, ΔB mit negativen oder verschiedenen Vorzeichen versehen, so darf man nur, um den Werth von $\Delta a : a$ zu erhalten, in der rechten Seite der Gleichung (261) diese Vorzeichen einführen. Stellt man alle möglichen Werthe des Verhältnisses $\Delta a : a$ her, so wird einer den grössten absoluten Werth haben, und da dieser Werth sowohl positiv als negativ seyn kann,

so gibt derselbe den Spielraum an, innerhalb dessen sich der relative Fehler $\Delta a : a$ bewegen kann.

Dass dieselben Betrachtungen, welche für die Seite a angestellt werden können, auch für b gelten, versteht sich von selbst. Es wird demnach auch

$$\frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta c}{c} + \frac{\Delta B}{\operatorname{tg} B} - \frac{\Delta A + \Delta B}{\operatorname{tg}(A + B)} \quad . \quad . \quad (263)$$

seyn. Fragt man, unter welcher Bedingung

$$\frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta a}{a}$$

wird, so liefern die Gleichungen (261) und (263) sofort die Antwort: wenn $B = A$ ist.

Fragt man weiter, unter welcher Bedingung der Fehler in der berechneten Seite b am kleinsten wird, vorausgesetzt, dass Δc null oder constant ist, so ist die Antwort darauf dieselbe, welche aus der Gleichung (262) für die Seite a hervorging.

Stellt man jetzt die Frage auf: wie muss ein durch Vorwärtsabschneiden aufzunehmendes Dreieck beschaffen seyn, wenn dasselbe den Messungsfehlern unter allen Verhältnissen den geringsten Einfluss auf die zu berechnenden Seiten gestatten soll? so kann man sich die Antwort: dass es gleichseitig oder doch nahezu gleichseitig seyn muss, leicht selber bilden. Denn nimmt man es aus der Seite c auf, so soll für a und b der Winkel C sich so viel als möglich 90^0 nähern, wird es aus a aufgenommen, so gilt dieselbe Forderung für den Winkel A, um die Fehler in b und c möglichst klein zu machen; und macht man endlich die Seite b zur Basis, so soll, um Δa und Δc möglichst klein zu erhalten, der Winkel B sich so weit es angeht, 90^0 nähern. Da es aber nicht möglich ist, dass alle drei Winkel zugleich 90^0 nahe kommen, und da die Fehler Δa, Δb, Δc um so grösser werden, je spitzer die Winkel C, B, A sind: so ist es offenbar das Vortheilhafteste, wenn $A = B = C = 60^0$ und mithin das Dreieck gleichseitig ist.

§. 271.

Aufgabe. In einem durch Rückwärtsabschneiden aufgenommenen Dreiecke sind die gemessenen Stücke nicht fehlerfrei; es soll angegeben werden, um wie viel die daraus berechneten Seiten falsch sind, und welches die besste Form des Dreiecks für diese Art der Aufnahme ist.

Heisst das Dreieck ABC und sind die gemessenen Stücke: die

Seite C, der Winkel A und der Winkel B: so findet man aus diesen Stücken die Seite a aus der Gleichung

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (264)$$

welche für die logarithmische Berechnung folgende Gestalt annimmt:

$$\log a = \log c + \log \sin A - \log \sin C.$$

Ist die Seite c mit dem Fehler $\pm \Delta c$, der Winkel A mit dem Fehler $\pm \Delta A$ und der Winkel C mit dem Fehler $\pm \Delta C$ behaftet, berücksichtigt man aber vorläufig nur die positiven Werthe der Fehler, so erhält man durch Differentiiren der letzten Gleichung den relativen Fehler der berechneten Seite a gleich

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta c}{c} + \frac{\Delta A}{\operatorname{tg} A} - \frac{\Delta C}{\operatorname{tg} C} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (265)$$

Führt man in dem Ausdrucke rechts alle möglichen Verbindungen der Vorzeichen von Δc, ΔA und ΔC ein, so wird man den grössten absoluten Werth von $\Delta a : a$ finden und damit auch die grösste Abweichung des aus den gemessenen Stücken berechneten Werthes der Seite a von ihrem wahren Werthe. Da der Ausdruck

$$\frac{\Delta A}{\operatorname{tg} A} - \frac{\Delta C}{\operatorname{tg} C} = 0$$

ist, wenn die relativen Fehler der gemessenen Winkel einander gleich sind, so folgt, dass in diesem Falle die Seite a in demselben Masse falsch erhalten wird, als die Seite c fehlerhaft gemessen wurde. Wäre C fehlerfrei und hätte man in A und C Fehler begangen, welche sich ihrer absoluten Grösse nach wie die Tangenten von A und C verhielten, ihrer Lage nach aber beide positiv oder beide negativ wären: so würden sich die Wirkungen dieser Fehler gegenseitig vernichten und man fände die Seite a gerade so, wie sie fehlerfreie Stücke geliefert hätten.

Sind Δc und ΔA positiv, so wird für $A < 90^0$ und $C < 90^0$

$$\frac{\Delta A}{a} = \pm \left(\frac{\Delta c}{c} + \frac{\Delta A}{\operatorname{tg} A} + \frac{\Delta C}{\operatorname{tg} C} \right) \quad . \quad . \quad (266)$$

je nachdem der Fehler ΔC negativ oder positiv ist. Dieser Fehler ist — in soferne er von dem Vorzeichen abhängt — der grösste, welcher in der Seite a vorkommen kann und es beträgt somit die Schwankung der Grenzen des Werthes von a:

$$2 \left(\frac{\Delta c}{c} + \frac{\Delta A}{\operatorname{tg} A} + \frac{\Delta C}{\operatorname{tg} C} \right).$$

Ist der Fehler $\Delta A = \Delta C$, so wird, wenn diese Fehler in gleichem Sinne begangen wurden, der Fehler in a, so weit er von den Winkeln abhängt, null, so bald diese Winkel einander gleich sind. Geht man nun nicht davon aus, dass gerade die Seite c zur Aufnahme des Dreiecks diene, sondern stellt man es frei, welche Seite man dazu wählen mag, so ist klar, dass, wenn der Aufnahme die Seite b zu Grunde gelegt und c gesucht wird, die Winkel B und C ebenfalls einander gleich seyn müssen, wenn die Grösse von c durch die Winkelmessung nicht berührt werden soll. Hat man aber die Bedingung $A = C$ und $B = C$, also $A = B = C$, so folgt von selbst, dass wiederum das gleichseitige oder ein diesem nahekommendes Dreieck dasjenige ist, welches den Messungsfehlern den geringsten Einfluss auf die zu berechnenden Stücke gestattet.

§. 272.

Aufgabe. Zu bestimmen, wie gross die aus den Beobachtungsfehlern entspringenden Fehler in den berechneten Stücken eines durch Seitwärtsabschneiden aufgenommenen Dreiecks werden und welches für diese Art der Aufnahme die zweckmässigste Form des Dreiecks ist.

Die gemessenen Stücke des Dreiecks ABC seyen die Seiten a, b und der Winkel C. Zur Berechnung der Seite c dient die bekannte Gleichung:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos C.$$

Differentiirt man diese Gleichung in dem früher angegebenen Sinne, so erhält man:

$$c\Delta c = a\Delta a + b\Delta b - (a\Delta b + b\Delta a)\cos C + ab\sin C\Delta C \quad (267)$$

oder, wenn man die Gleichung mit c^2 dividirt und dafür den ursprünglichen, in a, b, c gegebenen, Ausdruck setzt:

$$\frac{\Delta c}{c} = \frac{(a - b\cos C)\,\Delta a + (b - a\cos C)\,\Delta b + ab\sin C\,\Delta C}{a^2 + b^2 - 2\,ab\cos C} \quad (268)$$

In diesem Ausdrucke kommen nur die wirklich gemessenen Grössen a, b, C vor. Führt man aber auch die übrigen c, A, B ein und berücksichtigt, dass $a - b\cos C = c\cos B$ und $b - a\cos C = c\cos A$ ist, so erhält man aus (268) ohne Mühe die Gleichung:

$$\frac{\Delta c}{c} = \frac{a\cos B}{c}\,\frac{\Delta a}{a} + \frac{b\cos A}{c}\,\frac{\Delta b}{b} + \frac{b\sin A}{c}\,\Delta C \quad (269)$$

Sind die Seiten a und b mit gleicher relativer Genauigkeit gemessen, so ist, da nach der Figur $a \cos B + b \cos A = c$, der relative Fehler in der Seite c gleich

$$\frac{\varDelta c}{c} = \frac{\varDelta a}{a} + \frac{b \sin A}{c} \varDelta C.$$

Setzt man in Gleichung (267) den Winkel $C = 180^0$, so wird

$$c \varDelta c = (a + b)(\varDelta a + \varDelta b),$$

und da in diesem Falle das Dreieck in eine Gerade von der Länge $a + b = c$ übergeht, so folgt, wie es seyn muss,

$$\varDelta c = \varDelta a + \varDelta b.$$

Nimmt man $C = o$ an, so wird

$$c \varDelta c = (a - b)(\varDelta a - \varDelta b)$$

und da hier $c = a - b$ ist, so erhält man

$$\varDelta c = \varDelta a - \varDelta b;$$

ein Ergebniss, dessen Richtigkeit auch ohne diese Entwickelung einleuchten würde.

Wären die Seiten fehlerfrei gemessen, also $\varDelta a$ und $\varDelta b$ null, so folgte aus (267) die Gleichung

$$c \varDelta c = a b \sin C \varDelta C,$$

d. h. der Fehler in der berechneten Seite würde in diesem Falle dem Winkelfehler proportional seyn.

Will man ausser dem Fehler in der Seite c auch die Fehler in den Winkeln A und B bestimmen, so gehören dazu drei Gleichungen, während wir bisher bloss eine, nämlich die aus der Grundgleichung hervorgegangene (Nr. 267) behandelten. Eine der beiden anderen Gleichungen, in welchen die Winkel A und B vorkommen, ist die bekannte Relation

$$a \sin B = b \sin A,$$

woraus durch Differentiiren folgt:

$$a \cos B \varDelta B + \sin B \varDelta a = b \cos A \varDelta A + \sin A \varDelta b; \quad (270)$$

und die dritte Gleichung ergibt sich aus der ebenfalls gegebenen Summe der drei auf 180^0 ausgeglichenen Winkel, nämlich aus

$$A + B + C = 180^0.$$

Differentiirt man diese Gleichung, so kommt

$$\varDelta A + \varDelta B + \varDelta C = o \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (271)$$

Sucht man aus den Gleichungen (270) und (271) die Werthe von $\varDelta A$ und $\varDelta B$ durch einfaches Substituiren, so gelangt man sofort zu den Ausdrücken:

$$\Delta A = \frac{b \sin A}{c} \left(\frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta b}{b} \right) - \frac{a \cos B}{c} \Delta C \quad . \quad (272)$$

$$\Delta B = \frac{b \sin A}{c} \left(\frac{\Delta b}{b} - \frac{\Delta a}{a} \right) - \frac{b \cos A}{c} \Delta C \quad . \quad (273)$$

Man entnimmt hieraus, dass die Fehler in den berechneten Winkeln A und B um so kleiner werden, je grösser die Seite c im Verhältnisse zu a und b, d. h. je grösser der eingeschlossene Winkel ist. Dieses Resultat ist, wie man in der folgenden Abtheilung C sehen wird, sehr günstig für die Aufnahme der Vielecke aus ihrem Umfange, weil hiebei meist stumpfwinkelige Dreiecke aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen (stumpfen) Winkel aufzunehmen sind.

Haben die Messungen der Seiten a und b eine gleiche Genauigkeit, d. h. ist $\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b}$, und sind die Messungsfehler in einerlei Sinn begangen worden, so wird

$$\Delta A = - \frac{a \cos B}{c} \Delta C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (274)$$

$$\Delta B = - \frac{b \cos A}{c} \Delta C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (275)$$

Addirt man diese beiden Ausdrücke und berücksichtigt, dass $a \cos B + b \cos A = c$ ist, so kommt, wie es seyn muss,

$$\Delta A + \Delta B + \Delta C = 0.$$

Werden die beiden Winkel A und B einander gleich, so ist $a \cos B = b \cos A = \frac{1}{2} c$ und daher

$$\Delta A = \Delta B = - \frac{1}{2} \Delta C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (276)$$

Soll ein Dreieck so angeordnet werden, dass, wenn man es nach und nach von allen drei Endpunkten aus durch Seitwärtsabschneiden aufnimmt, die Summe aller Folgen der Beobachtungsfehler auf die berechneten Stücke möglichst klein wird, so ist dazu abermals nur ein gleichseitiges oder diesem nahe kommendes Dreieck geeignet; denn für die Aufnahme aus der Ecke C ist es vortheilhaft, wenn die Winkel A und B und also auch die Seiten a und b gleich sind; für die Messung aus dem Punkte B werden die Folgen der Beobachtungsfehler am geringsten, wenn die Winkel A und C oder die Seiten a und c nicht von einander abweichen, und für die Aufnahme aus dem Punkte A besteht die Bedingung B = C oder b = c; allen diesen Bedingungen zugleich kann aber nur ein gleichseitiges Dreieck entsprechen.

C. Messung von Vielecken und Flurmarken.

§. 273.

Ist ein Verband von Grundstücken oder ein Flurbezirk für sich, d. i. ohne Zusammenhang mit einer grösseren Landesvermessung, aufzunehmen, so beginnt man die Messung nicht damit, dass man sofort jedes Grundstück einzeln aufnimmt und die erhaltenen Bilder in einer der Natur entsprechenden Folge aneinander reiht, sondern man überzieht erst die aufzunehmende Fläche mit einem Vielecke und knüpft an dessen genau gemessene Eckpunkte und Seiten die Aufnahme der Grundstücksgrenzen an. Der Vortheil dieses Verfahrens, wonach vom Grossen ins Kleine gearbeitet und die Controle der nachfolgenden Messungen in die vorausgegangenen Bestimmungen gelegt wird, beruht theils in der Sicherstellung gegen das Uebersehen grober Fehler in der Detailaufnahme, theils in der möglichst gleichmässigen Vertheilung der unvermeidlichen Messungsfehler, und ist jenem Vortheile vergleichbar, den ein geordneter Zusammenhang der Umfangs- und Zwischenmauern eines Gebäudes für dessen inneren Ausbau gewährt.

Es ist hier nur von solchen Vielecken die Rede, welche für kleinere Aufnahmen nöthig sind und welche demnach, auch wenn sie sich über eine Meile erstrecken sollten, als eben angesehen werden können; die grösseren, aus Dreiecken zusammengesetzten Vielecke oder die Netze, welche die Grundlage der Landes- und Gradmessungen bilden und deren horizontale Projectionen in der Regel nicht mehr auf einer Ebene, sondern nur auf der Kugelfläche richtig dargestellt werden können, werden erst in dem folgenden Abschnitte betrachtet. Auch setzen wir hier nicht immer geschlossene Vielecke als gegeben voraus, sondern verstehen darunter überhaupt eine durch gerade Linien verbundene Reihenfolge von Punkten, wie sie bei Absteckungen für technische Zwecke oft genug vorkommt.

Wir verbinden die Lehre von der Messung der Vielecke und Flurbezirke desshalb, weil jene meist nur dazu gebraucht werden, um diese ihrer Form und Grösse nach darzustellen, und weil somit die Polygonmessungen der Hauptsache nach einen Theil der Flurmessungen bilden.

1) Die Aufnahme der Vielecke und Flurbezirke.

§. 274.

Es gibt verschiedene Methoden Vielecke aufzunehmen, und man wendet je nach der Beschaffenheit des Terrains bald die eine bald die andere an; in manchen Fällen lassen sich zwei oder drei dieser Methoden vortheilhaft mit einander verbinden.

Geschieht die Aufnahme eines Vielecks von einem einzigen inner- oder ausserhalb desselben gelegenen Punkte aus, wobei die aufzunehmende Figur in Dreiecke zerlegt wird, die aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel bestimmt werden: so nennt man das angewendete Verfahren die Polarmethode.

Bezieht man alle Eckpunkte und Seiten des Vielecks auf irgend zwei feste Punkte und die dadurch bezeichnete gerade Linie, welche als Grundlinie aller Dreiecke erscheint, in die das Polygon zerlegt wird, so geschieht dessen Aufnahme nach der Abschneidmethode.

Misst man alle Seiten und Winkel des Vielecks unmittelbar und stellt dasselbe aus diesen Theilen des Umfangs dar, so bedient man sich der Umfangsmethode.

Und legt man endlich alle Punkte und folglich auch alle Seiten des Vielecks mit Hilfe von recht- oder schiefwinkeligen Coordinaten fest, so heisst diese Art der Festlegung oder Aufnahme die Coordinatenmethode.

In den folgenden Paragraphen werden zunächst diese Methoden und hierauf das Verfahren zur Aufnahme von Flurmarkungen erklärt. Es liesse sich diesen vier Methoden leicht noch eine fünfte, nämlich die Dreiecksmethode, nach welcher jedes Vieleck in ein Netz von Dreiecken, die weder eine gemeinschaftliche Spitze noch Basis haben, zerlegt wird, beifügen; wir ziehen es aber vor, diese bei grösseren Aufnahmen anzuwendende und unter dem Namen Trianguliren bekannte Methode erst in dem folgenden Capitel zu erörtern.

§. 275.

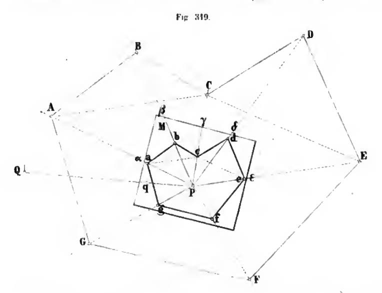
Aufgabe. Ein auf dem Felde abgestecktes Vieleck soll nach der Polarmethode aufgenommen werden.

Die Lösung dieser Aufgabe setzt immer voraus, dass der Raum, den das Vieleck umschliesst, von Hindernissen möglichst frei ist, damit man von dem gewählten oder gegebenen Standpunkte aus nach allen Endpunkten hin visiren und messen kann. Der als Pol

erscheinende Standpunkt wird am zweckmässigsten innerhalb und möglichst in der Mitte des Polygons angenommen; er kann aber auch in einer Ecke und sogar ausserhalb der aufzunehmenden Figur liegen.

Geschieht die Aufnahme mit dem Theodolithen, so stelle man denselben über dem Pole P (Fig. 319.) centrisch und horizontal auf und messe die Azimuthalwinkel aller Richtungslinien PA, PB u. s. w.

Fig 319.



bis wieder zu PA. Soll das aufzunehmende Vieleck gegen eine gegebene feste Linie, z. B. PQ, orientirt werden, so thut man am besten, alle Horizontalwinkel auf diese Linie, als den linken Schenkel eines jeden, zu beziehen, was einfach dadurch geschieht, dass man zuerst auf PQ einstellt und abliest. Besitzt man einen Repetitionstheodolithen, so wird man, um alle Azimuthe ohne Rechnung zu erhalten, beim Beginne der Messung den Nonius I des Horizontalkreises auf 0^0 stellen und den Kreis selbst so weit drehen, dass das Fadenkreuz genau auf das Signal Q einsteht. Die horizontalen Projectionen der Linien PA, PB u. s. w. werden entweder mit Messlatten oder mit der Messkette auf bekannte Weise bestimmt; ist aber das Theodolithenfernrohr, wie das in §. 178 beschriebene, zum Distanzmessen eingerichtet, so wird die Längenmessung selbstverständlich sofort mit der Winkelmessung verbunden

und gleichzeitig die Erhebung oder Senkung des Rohrs beobachtet, um die gemessenen schiefen Entfernungen nach §. 180 auf den Horizont zu reduciren. Wie aus den horizontalen Fahrstrahlen und den Azimuthalwinkeln das Vieleck zu zeichnen ist, bedarf wohl keiner Beschreibung.

Wird das Vieleck mit dem Messtische und dem Reichenbach-schen Distanzmesser aufgenommen, so stelle man, wenn das Bild pq der Orientirungslinie PQ gegeben seyn sollte, den Messtisch so auf, dass p lothrecht über P und pq in der Vertikalebene PQ liegt, wenn das Tischblatt horizontal ist und feststeht. Hierauf lege man die Linealkante des Distanzmessers an p, visire nach A, lese auf der daselbst befindlichen Distanzlatte die schiefe Entfernung APab, reducire dieselbe mittels der Tabelle Nr. II. auf den Horizont und trage die reducirte Länge von p aus in verjüngtem Masse = pa auf der feinen Linie ab, welche man an der Linealkante hinzieht. In gleicher Weise verfahre man mit den Linien PB, PC, PD .... und verbinde schliesslich die Bildpunkte a, b, c, d ...., wodurch eine dem gegebenen Vielecke ABCD .... ähnliche Figur abcd .... auf dem Messtischblatte entsteht, wie sie die Aufgabe verlangt.

Man sieht sofort ein, dass das Vieleck ABCDE .... nicht geschlossen zu seyn braucht, um nach dieser Methode aufgenommen zu werden; man überzeugt sich aber auch leicht, dass weder in der Aufnahme des geschlossenen noch des offenen Vielecks eine Controle für die richtige Messung liegt, und dass die Prüfung der letzteren nur dadurch bewirkt werden kann, dass man entweder einzelne Seiten AB, BC .... oder Diagonalen AC, CE .... des Polygons misst und vergleicht, ob sie mit ihren Bildern ab, bc .... oder ac, ce .... übereinstimmen oder nicht.

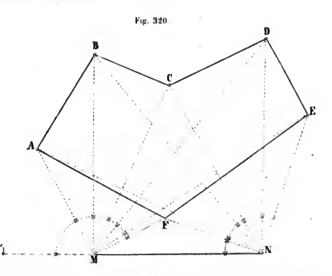
§. 276.

Aufgabe. Ein gegebenes Vieleck von einer abgemessenen Standlinie aus aufzunehmen.

Die Aufnahme kann wieder mit dem Theodolithen oder dem Messtische geschehen. In beiden Fällen ist es nöthig, die Standlinie geschickt zu wählen, wenn sie nicht durch besondere Umstände ein für allemal vorgeschrieben ist. Diese Basis kann sowohl inner- als ausserhalb des Vielecks liegen, wenn sie nur folgende Bedingungen möglichst gut erfüllt. Sie soll nämlich erstens zwei feste Endpunkte

haben, auf denen sich die Winkelmessinstrumente sicher aufstellen und alle Punkte des Vielecks anvisiren lassen; ferner soll sie so liegen, dass sie genau gemessen werden kann und die Eckpunkte durch gute Schnitte (d. h. durch Winkel, welche weder sehr spitz noch sehr stumpf sind [1]) gibt; und endlich soll die Standlinie nicht zu kurz seyn, damit wiederum die schlechten Schnitte vermieden werden. Im Allgemeinen kann man annehmen, dass eine ausserhalb des Vielecks liegende Grundlinie bessere Schnitte gibt, als eine im Vieleck sich befindende.

Fig. 320



Besitzt man zur Messung der Winkel einen Repetitionstheodolithen, dessen Fernrohr sich durchschlagen oder demgemäss umlegen lässt, so wird man bei der Aufstellung in dem Punkte M der Basis MN (Fig. 320) den Nonius I auf den Nullpunkt des Horizontalkreises einstellen und diesen selbst so drehen, dass das Fernrohr genau auf das Signal N' zeigt; hierauf wird man das Fernrohr durchschlagen und sofort nach A visiren: die Ablesung am Nonius I gibt alsdann selbstverständlich den Winkel N'MA. Nach der Einstellung auf B erhält man aus der Ablesung am Nonius I den Winkel N'MB u. s. w. f. Sind alle Winkel in M gemessen und man will die Messung nicht wiederholen, so versetzt man das Instrument nach N, stellt wieder

[1] Als sehr spitze Winkel sieht man hier schon diejenigen an, welche weniger als 20°, und als sehr stumpfe jene, welche mehr als 160° betragen.

den Nonius I auf Null und richtet durch Drehung des Horizontal- und Vertikalkreises das Fadenkreuz zuerst auf das Signal M. Ist der Horizontalkreis festgestellt, so bewegt man die Alhidade nach und nach so weit nach rechts, bis das Fadenkreuz successive auf die Punkte A, F, B, C .... trifft und wiederum alle Winkel der Visirlinien NA, NB .... mit der Basis NM gemessen sind.

Trägt man diese Winkel mit Hilfe ihrer Tangenten an die auf den Horizont reducirte Basis mn an, so bekommt man durch Verbindung der entsprechenden Schnitte das Vieleck abcdef, welches dem Vieleck ABCDEF ähnlich ist; und hiermit ist die Aufgabe gelöst.

Wie mit Hilfe des Messtisches und der Kippregel das Vieleck ABCDEF von der Standlinie MN aus aufzunehmen ist, enthält bereits der §. 263, in so ferne dort gezeigt wurde, wie drei ausserhalb der Basis liegende Punkte durch Vorwärtsabschneiden zu finden sind. Was aber für drei Punkte gilt, lässt sich auf eine beliebige Anzahl von Punkten und somit auch auf das Vieleck ABCDEF anwenden. Sollte es die Lage der Standlinie mit sich bringen, dass ein Punkt (C) des Vielecks nicht durch Vorwärtsabschneiden bestimmt werden könnte, so müssten die beiden nächstgelegenen Polygonseiten (CB, CD) abgemessen und hiermit der gesuchte Punkt (e) construirt werden. Dasselbe hätte zu geschehen, wenn der Schnitt dieses Punktes ein schlechter, also seine Bestimmung selbst unsicher wäre. Es versteht sich von selbst, dass sich der in Rede stehende Punkt auch nach §. 264 durch Rückwärtsabschneiden finden liesse, wobei irgend zwei von ihm aus gut sichtbare und schon vorher bestimmte Eckpunkte benützt werden könnten. Zur Controle der Messung kann man auch solche Punkte, welche aus guten Schnitten gefunden wurden, durch Rückwärtsabschneiden bestimmen und zusehen, ob man in beiden Fällen ein und dasselbe Resultat erhält.

§. 277.

Aufgabe. Ein Polygon nach der Umfangsmethode aufzunehmen und zum Schlusse zu bringen.

Diese Aufnahmsmethode findet vorzüglich dann ihre Anwendung, wenn das Visiren innerhalb der darzustellenden Terrainfläche durch Häuser, Bäume etc. erschwert oder unmöglich ist, also bei Aufnahme von Ortschaften, Wäldern u. dgl. Sie wird durch das Messen der

Seiten ziemlich mühsam, gewährt aber, wenn man alle Stücke des Vielecks gemessen hat, durch den mehr oder weniger genauen Schluss der aufgenommenen Figur, sofort eine Controle der Messung.

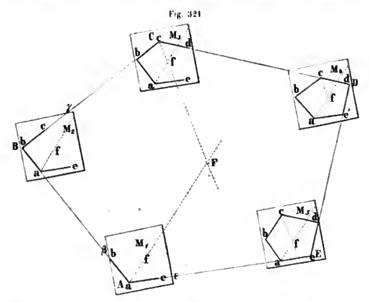
Ueber die Aufnahme des Vielecks mit Theodolithen und Messlatten ist kaum mehr zu bemerken, als dass das Messen der Winkel und Seiten mit aller Sorgfalt geschehen muss, und dass die Polygonwinkel, wenn ihre Summe nur sehr wenig von der dem Vielecke zukommenden Winkelsumme abweicht und somit die Abweichung als die Folge der unvermeidlichen Messungsfehler angesehen werden kann, vor dem ersten Auftragen der Figur durch gleichheitliche Vertheilung des Gesammtfehlers verbessert werden. Ist aber die Summe aller gemessenen Winkel auffallend verschieden von der, welche sie seyn sollte, und geht daraus hervor, dass in einem oder mehreren Winkeln grobe Messungsfehler gemacht wurden, so müssen erst diese Fehler aufgesucht und beseitigt werden, ehe man zum Auftragen des Vielecks schreitet. Wie man aber einen grösseren Fehler, wenn er nur in einem Winkel oder nur in einer Seite gemacht wurde, durch Construction oder Rechnung finden kann, lehrt der §. 278, und wie ein mit dem Theodolithen aus dem Umfange aufgenommenes Polygon durch Coordinaten zweckentsprechend aufgetragen werden kann, der §. 279, auf die für solche Fälle hiermit verwiesen wird.

Bedient man sich, wie es meist geschieht, des Messtisches zur Aufnahme des Polygons aus dem Umfange, so hat man sich vor allen Dingen aus den zweimal und mit Messlatten sehr genau gemessenen Seiten der Figur ein Bild derselben in dem Massstabe zu entwerfen, welcher der Aufnahme zu Grunde gelegt werden soll, und zuzusehen, ob dieses (allerdings nur annähernd richtige) Bild auf dem Messtische Platz findet oder nicht, und wenn ja, in welcher Lage. Sollte die gezeichnete Figur zu gross seyn, so kann man entweder einen kleineren Massstab für die Aufnahme wählen, oder aber die Aufnahme so vollziehen, dass man auf dem Messtische zwar alle Stücke des Vielecks gezeichnet erhält, aber dieses selbst erst auf einem grösseren Blatte zusammensetzen muss. Zunächst setzen wir voraus, dass die ganze Figur auf dem Blatte Platz finde.

Stellt ABCDE das auf dem Felde mit starken Pfählen, in die oben zum Einstecken von Messfahnen Löcher gebohrt sind, bezeichnete Vieleck vor und sind bereits alle Seiten desselben gemessen und auf den Horizont reducirt, so stelle man den Messtisch auf dem

Endpunkte A so auf, dass a lothrecht über A und die vorhin als passend gefundene Richtung $a\beta$ in die Richtung von AB fällt, sobald der Tisch horizontal und fest steht. Ist ausser der Richtung $a\beta$ auch die $a\varepsilon$ nach E, d. i. der Winkel BAE bestimmt, so trage man AB im verjüngten Masse = ab und AE verjüngt = ae ab. Sollte man von A aus einen Punkt F innerhalb der Figur sehen und von A nach F messen können, so ist es für die spätere Aufstellung des Tisches und die Controle der Messung gut, diesen Punkt sofort mit aufzunehmen und in der Figur als f darzustellen. Hierauf kommt

Fig. 321



der Messtisch in die zweite Lage M_2 über dem Punkte B, so nämlich, dass b lothrecht über B steht und ba nach BA orientirt ist. In B wird der Winkel CBA gemessen und die Seite BC verjüngt = bc aufgetragen. In C wird c über C gestellt nach CB orientirt, der Winkel BCD gemessen und CD verjüngt = cd abgetragen. Sollte man von C aus auch F sehen können, so visirt man, die Kippregel an c legend, hin und überzeugt sich, ob die an der Linealkante gezogene Linie cF′ durch f geht oder nicht. Gienge diese Linie nicht durch f, so müsste in dem bisherigen Verfahren ein Fehler vorgekommen seyn, der sofort aufzusuchen und zu verbessern wäre. Die Fortsetzung der Messung fordert, dass d centrisch über

D und dc in die Richtung DC gestellt werde. Hier wird nach E visirt und die Seite de′ erhalten. Trifft der Punkt e′ der Seite de′ mit dem Punkte e der Seite ae zusammen, so schliesst sich das Polygon, ausserdem sagt man: „es schliesst sich nicht.“

Findet ein Schluss der Figur statt, so kann man denselben als ein gutes Zeichen für die genaue Arbeit ansehen; man wird aber in diesem Falle gleichwohl noch den Punkt e über E bringen, den Messtisch nach ED orientiren und zusehen, ob auch der bereits gezeichnete Winkel aed dem AED gleich ist. Diese Prüfung der Messung ist desshalb gut, weil man dadurch erfährt, ob das Schliessen nicht in Folge eines gröberen Messungsfehlers, der alle unvermeidlichen Fehler ausgleicht, geschieht.

In der Regel wird sich, wenn man in dem vorletzten Punkte (D) angekommen ist, die Figur nicht schliessen, d. h. es wird, mit Beziehung auf Fig. 321, der Punkt e′ von e mehr oder weniger abstehen. Diese Erscheinung wird als das Resultat der unvermeidlichen Beobachtungsfehler angesehen, so lange der Abstand ee′ in günstigem Terrain nicht mehr als $^1/_{800}$ und in ungünstigem Terrain nicht mehr als $^1/_{400}$ des ganzen Umfangs abcde beträgt. In diesem Falle schreitet man zur Ausgleichung der unvermeidlichen Fehler, d. h. man bringt das aufgenommene Polygon zum Schluss; beträgt aber die Linie ee′ mehr als $^1/_{800}$ und beziehungsweise mehr als $^1/_{400}$ des Polygonumfangs, so bleibt nichts anderes übrig, als die ganze Messung zu wiederholen und dabei zu berücksichtigen, dass sich die unvermeidlichen Fehler besser vertheilen, wenn man die Aufnahme des Polygons nach zwei Seiten vornimmt, d. i. von A über B bis C und hierauf von E über D bis C.

Schliesst sich ein aufgenommenes Vieleck wegen der unvermeidlichen Messungsfehler nicht, so ist anzugeben, wie man zu verfahren habe, um auf eine möglichst vortheilhafte Weise den Schluss zu bewirken.

Bei den nachfolgenden empirischen Regeln, welche den praktischen Anforderungen genügen, ist vorausgesetzt, dass das Polygon von dem Punkte A aus nach zwei Seiten hin aufgenommen sey, und dass dadurch die beiden Theile desselben Abcdef und Aihgf″ (Fig. 322 bis 324) erhalten worden seyen. Wäre die Aufnahme von dem Punkte f″ aus über g und a bis nach f hin in einer Richtung vollzogen und am Ende der Abstand ff″ der Schlusspunkte erhalten

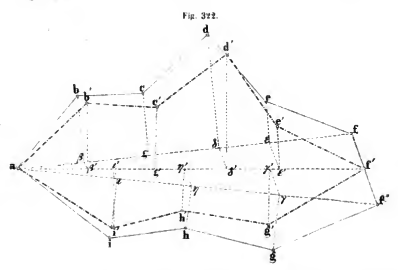
worden, so würde man das Polygon wiederum in zwei Theile abcdef und aihgf'' zerlegen, und zwar dadurch, dass man einen Punkt a sucht, der wo möglich um gleichviel Seiten von f und f'' absteht. Denkt man sich nun die Linien af und af'' gezogen; so können dieselben folgende drei Lagen gegen einander annehmen:

1) Der eine Theil des Polygons abcdef ist von dem andern af''ghi ganz getrennt, wie in Fig. 322;

2) beide Theile greifen in einander über, wie in Fig. 323 der Theil abcdef in den Theil aihgf''; und

3) die Verbindungslinien af und af'' fallen in eine Gerade, wie in Fig. 324.

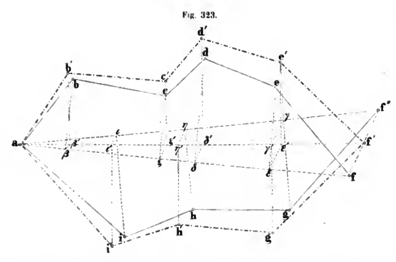
Fig. 322.



In dem ersten Falle (Fig. 322) ziehe man ff'', fälle die Senkrechten $b\beta$, $c\zeta$, $d\delta$, $e\varepsilon$, $g\gamma$, $h\eta$, $i\iota$, halbire die ff'' in f' und ziehe die Linien $\beta\beta'$, $\zeta\zeta'$, $\delta\delta'$, $\varepsilon\varepsilon'$, $\gamma\gamma'$, $\eta\eta'$, $\iota\iota'$ der ff'' parallel bis zur Halbirungslinie af'. Hierauf errichte man in den Punkten β', ζ', δ', ε', γ', η', ι', Senkrechte zu af' und mache dieselben nach einander gleich $b\beta$, $c\zeta$, $d\delta$, $e\varepsilon$, $g\gamma$, $h\eta$, $i\iota$. Werden nun die Köpfe dieser Senkrechten durch Gerade verbunden, so entsteht das Polygon ab'c'd'e'f'g'h'i'a, welches sich schliesst und von dem durch die Aufnahme unmittelbar erhaltenen nur sehr wenig unterscheidet.

In dem zweiten Falle (Fig. 323) verbinde man zuerst wieder f mit f'', halbire ff'' in f' und ziehe af'. Hierauf errichte man zu

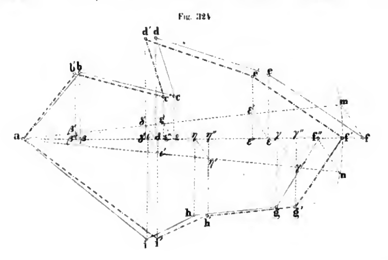
Fig. 323.



af die senkrechten $b\beta$, $c\zeta$, $d\delta$, $e\varepsilon$ und zu af″ die Perpendikel $g\gamma$ $h\eta$, $i\iota$. Von deren Fusspunkten aus ziehe man die Linien $\beta\beta'$, $\zeta\zeta'$, $\delta\delta'$, $\varepsilon\varepsilon'$, $\gamma\gamma'$, $\eta\eta'$, $\iota\iota'$ parallel zu ff″, bis sie die Linie af′ schneiden. Errichtet man nun in den Schnittpunkten die Ordinaten $\beta'b' = \beta b$, $\zeta'c' = \xi c$, $\delta'd' = \delta d$, $\varepsilon'e' = \varepsilon e$, $\gamma'g' = \gamma g$, $\eta'h' = \eta h$, $\iota'i' = \iota i$ und verbindet deren Köpfe nacheinander durch gerade Linien, so erhält man das gesuchte geschlossene Polygon ab′c′d′e′f′g′h′i′a.

In dem dritten Falle endlich (Fig. 324) halbire man wieder den Abstand ff″ in f′, beschreibe aus a mit dem Halbmesser af′ einen

Fig. 324.

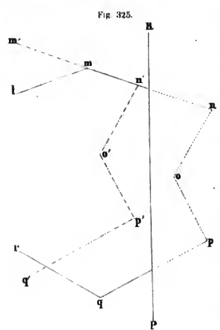


Kreisbogen und ziehe die Halbmesser am und an unter gleichen Winkeln gegen die Linie af′. Weiter fälle man zu af′ die Senkrechten $b\beta$, $c\zeta$, $d\delta$, $e\varepsilon$, $g\gamma$, $h\eta$, $i\iota$ und ziehe von deren Fusspunkten aus die Linien $\beta\beta'$, $\zeta\zeta'$, $\delta\delta'$, $\varepsilon\varepsilon'$, $\gamma\gamma'$, $\eta\eta'$, $\iota\iota'$ mit fm und f″n parallel, bis die Hilfslinien am und an geschnitten werden. In den Schnittpunkten errichte man wieder Senkrechte zu af′ und mache $\beta''b' = \beta b$, $\zeta''c' = \zeta c$, $\delta''d' = \delta d$, $\varepsilon''e' = \varepsilon e$, $\gamma''g' = \gamma g$, $\eta''h' = \eta h$, $\iota''i' = \iota i$.

Werden schliesslich die Köpfe dieser Senkrechten der Reihenfolge nach verbunden, so entsteht das geschlossene und die Fehler möglichst gut ausgleichende Vieleck a b′c′d′e′f′g′h′i′a, welches gesucht wurde.

Sollte bei der Aufnahme eines Polygons mit dem Messtische der Fall eintreten, dass ein Theil der Zeichnung über das Tischblatt hinausreicht, so kann man sich dadurch helfen, dass man den über den Rand des Blattes hinausfallenden Theil zunächst für sich aufnimmt und erst später mit dem übrigen Theile der aufgenommenen Figur verbindet. Denn gesetzt, es sey PR in Fig. 325 der Rand des Tischblattes und nop der über denselben hinausfallende Theil der Zeichnung, so kann man auf der zuletzt aufgenommenen Richtung mn, welche auf dem Blatte so lange als möglich gezogen wird, statt der Seite mn die eben so lange Seite m′n′ auftragen, wobei der Punkt n′ so weit zurückgeschoben ist, dass kein Punkt der Figur m′n′o′p′q′ über PR hinausgeht. In dem Punkte N des Vielecks wird der Messtisch nach n′ centrirt und durch n′m′ nach NM orientirt. Im Uebrigen verfährt man so, als ob n′ das richtige Bild von N wäre. Hat man durch Fortsetzung der Aufnahme die Punkte o′,

Fig. 325.



p′, q′ erhalten und will man wieder auf den richtigen Punkt q, der aber erst zu construiren ist, übergehen, so braucht man nur durch q′ eine Parallele zu m′n′ zu ziehen und q′q = m′m zu machen, so ergibt sich q. Besser ist es aber, die Aufnahme, nachdem sie vom Anfangspunkte A an über B und C bis Q gemacht ist, von A aus über Z und W bis Q fortzusetzen und zu vollenden. Dadurch ergibt sich q von selbst. Zur Controle kann man auch noch die Richtung qp herstellen, welche, wenn richtig gearbeitet wurde, mit q′p′ parallel seyn muss.

§. 278.

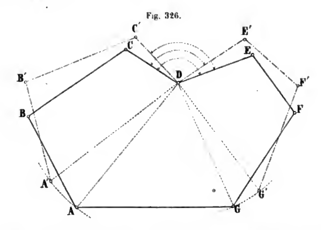
Aufgabe. Ein Polygon ist aus dem Umfange aufgenommen worden, schliesst aber wegen eines groben Messungsfehlers nicht: man soll diesen Fehler aufsuchen.

Der vorhandene Fehler kann entweder in einem Winkel oder in einer Seite liegen und entweder durch Zeichnung oder durch Rechnung zu bestimmen seyn.

A. Es sey ein Winkel, und zwar nur ein einziger, falsch gemessen.

1) Der fehlerhafte Winkel ist durch Zeichnung zu finden. (Fig. 326.)

Fig. 326.



Nimmt man an, dass der Winkel CDE falsch aufgenommen worden sey, so wird, wenn man das Vieleck, von der Seite AG ausgehend, über A und B hin aufträgt, die sich nicht schliessende Figur GABCDE′F′G′ entstehen, von welcher der Theil GABCD

vollständig richtig, der übrige aber falsch ist, weil er den fehlerhaften Winkel bei D enthält. Trägt man die gemessenen Stücke nochmals von AG aus auf und zwar in einer der vorigen entgegengesetzten Richtung, so entsteht die Figur AGFEDC′B′A′, welche von A bis D richtig, von D bis A′ aber falsch ist. Vergleicht man die aufgetragenen zwei Vielecke mit einander, so sieht man, dass sich dieselben nothwendig in dem Punkte D, welcher in beiden aus fehlerfreien Bestimmungsstücken erhalten wurde, schneiden müssen; umgekehrt also wird man den Scheitel (D) des fehlerhaften Winkels finden, wenn man die aufgenommenen Seiten und Winkel von einer und derselben Seite aus zweimal in entgegengesetzter Richtung aufträgt und zusieht, wo sich die beiden Figuren schneiden. Auch ist leicht einzusehen, dass durch die Verbindung der Schlusspunkte G, G′ oder A, A′ mit dem Scheitel D der Fehler des Winkels = GDG′ = ADA′ = EDE′ = CDC′ gefunden werde.

2) Der fehlerhafte Winkel ist durch Rechnung zu finden. (Fig. 326.)

Denkt man sich von allen Eckpunkten der Vielecke ABCDE′F′G′ und AGFEDC′BA′ auf die als Hauptlinie angenommene Seite AG Perpendikel gefällt, so ist klar, dass die beiden für jeden Punkt vorhandenen Senkrechten in ihrer Länge verschieden sind, mit Ausnahme derjenigen zwei, welche dem Punkte D angehören. Berechnet man demnach mit Hilfe der bekannten polygonometrischen Formeln aus den gegebenen Stücken alle Ordinaten doppelt, so erhält man einmal zwei gleiche Werthe, und der Punkt dem sie angehören, ist der Scheitel des gesuchten Winkels. Die Grösse seines Fehlers lässt sich zwar aus den Dreiecken ADA′ oder GDG′ auch berechnen; es ist aber in jedem Falle, auch in dem vorigen, besser, den fehlerhaften Winkel an Ort und Stelle nochmals zu messen.

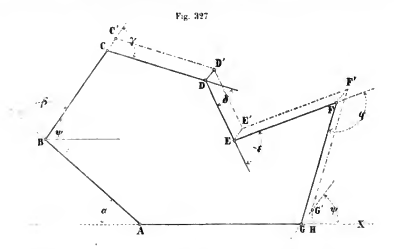
B. Es sey eine Seite, und zwar nur eine einzige, falsch gemessen.

1) Die fehlerhafte Seite ist durch Zeichnung zu finden. (Fig. 327.)

Stellt ABCDEFG ein geschlossenes Vieleck vor, so wird, wenn man die Seite BC um das Stück CC′ verlängert, alle übrigen Stücke des Vielecks aber unverändert beibehält, die offene Figur GABC′D′E′F′G′ entstehen. Verbindet man die Punkte D′, E′, F′, G′ mit den gleichnamigen Punkten D, E, F, G, so sind, wie leicht

einzusehen, die Verbindungslinien DD', EE', FF', GG' alle der CC' gleich und parallel. Aus dieser geometrischen Wahrheit fliesst für die Auffindung der fehlerhaften Seite (BC) eines Vielecks folgende Regel: Man verbinde die beiden Schlusspunkte (GG') des aufgetragenen offenen Vielecks durch eine gerade Linie (GG') und sehe zu, welcher von den Polygonseiten diese Linie parallel ist: die parallele Seite ist die falsche und der Betrag des Fehlers ist durch den Abstand GG' der Schlusspunkte ausgedrückt. Kommen in dem Viel-

Fig. 327



ecke zwei parallele Seiten vor, so kann nur ein Nachmessen auf dem Felde entscheiden, welche von beiden falsch ist. Dieses Nachmessen ist aber auch in dem Falle, wo keine parallelen Polygonseiten vorkommen, nicht bloss zu empfehlen, sondern sogar nöthig, da sonst alle unvermeidlichen Beobachtungsfehler an dieser Seite mit angebracht werden.

2) Die fehlerhafte Seite ist durch Rechnung zu finden. (Fig. 327.)

Wird die Seite GA als Abscissenaxe gewählt, so kann man nach den bekannten polygonometrischen Grundformeln, die unter Nr. 277 bis 280 zusammengestellt sind, sowohl die Abscissen als Ordinaten aller Eckpunkte A, B, C', D', E', F', G', aus den gegebenen Seiten und Winkeln berechnen. Hieraus kann man ferner die Neigung (φ) der Schlusslinie G'G gegen die Abscissenaxe und auch die Länge GG' finden. Berechnet man endlich aus den gemessenen Grössen

die Neigungen aller Polygonseiten gegen die Axe AG und vergleicht die Neigungswinkel mit dem von GG', so wird man eine Seite (BC) finden, welche sehr nahe denselben Neigungswinkel (φ) hat, und diese (oder eine ihr parallele) ist als die fehlerhafte zu bezeichnen. Der Fehler, den man auf dem Felde durch direktes Nachmessen erhält, wird dem berechneten Abstande GG' der Schlusspunkte ebenfalls sehr nahe gleich seyn.

§. 279.

Aufgabe. Mit dem Theodolithen ist ein Vieleck aus dem Umfange aufgenommen worden: man soll dasselbe mittels Coordinaten so genau als möglich auftragen.

Es ist immer eine missliche Sache, wenn man sich zum Auftragen von Winkeln des Gradbogens bedient, denn die Genauigkeit der Zeichnung bleibt in diesem Falle weit hinter der Genauigkeit der Winkelmessung zurück. Dieses Missverhältniss zwischen Aufnahme und Zeichnung bessert sich aber, wenn man die Winkel nach ihren Tangenten, die freilich vorher zu berechnen sind, aufträgt; und dasselbe ist der Fall, wenn man zur Zeichnung eines Vielecks dessen Coordinaten benützt, welche sich aus den gemessenen Stücken des Umfangs leicht berechnen lassen. Da rechtwinkelige Coordinaten am sichersten und schnellsten aufgetragen werden können, so wird man sich stets eines rechtwinkeligen Axensystems bedienen, und da es die Formeln vereinfacht, so wählt man eine Ecke des Polygons als Ursprung und eine Seite als Abscissenaxe.

Sind in dem nEcke, welches Fig. 328 vorstellt, die Seiten

$$A_1 A_2 = a_1, \; A_2 A_3 = a_2, \; A_3 A_4 = a_3 \text{ u. s. f. bis } A_n A_1 = a_n$$

und die inneren Polygonwinkel $A_1, A_2, A_3 \ldots\ldots A_n$ gemessen, so hat man zunächst zu untersuchen, ob die Summe dieser Winkel

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots\ldots + A_n = (n-2)\,\pi \ldots (277)$$

ist. Ist sie grösser oder kleiner und liegt die Differenz innerhalb des Bereichs der unvermeidlichen Fehler,[1] so vertheilt man die Fehlersumme gleichheitlich auf alle Winkel.

Wir sehen nunmehr die Grössen A_1, A_2, A_3 etc. als die ausgeglichenen Winkelwerthe an und bestimmen hiermit die Neigungswinkel

[1] Wenn der Nonius des Horizontalkreises eine Angabe von δ Sekunden hat, so darf man noch $n\delta$ Sekunden als Summe der unvermeidlichen Fehler ansehen.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$ der Polygonseiten $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ gegen die Abscissenaxe nach der bekannten Formel:

$$\alpha_m = A_m + \alpha_{m-1} - 180^0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (278)$$

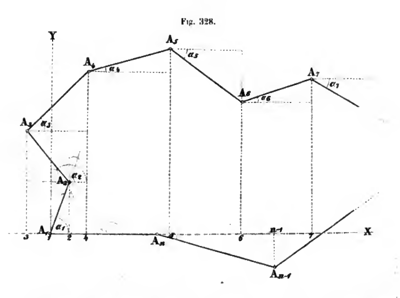
Sind diese Neigungswinkel festgestellt, so ergeben sich die Abscissen $x_2, x_3, x_4 \ldots x_n$ der Punkte $A_2, A_3, A_4 \ldots A_n$ aus der Gleichung

$$x_m = \sum_{p=1}^{p=m-1} (a_p \cos \alpha_p) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (279)$$

und die Ordinaten aus der folgenden Gleichung, welche, wie die vorhergehende in der Polygonometrie bewiesen wird:

$$y_m = \sum_{p=1}^{p=m-1} (a_p \sin \alpha_p) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (280).$$

Fig. 328.



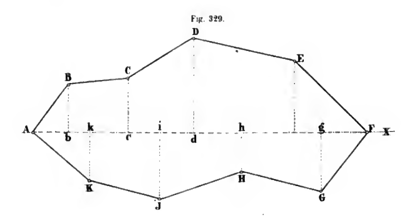
In dem vorliegenden Falle ist $x_1 = o$, $y_1 = o$ und es müsste desshalb, wenn alle Seiten und Winkel des Polygons fehlerfrei wären, offenbar $x_n = a_n$ und $y_n = o$ werden. Da aber die in die Rechnung eingehenden Stücke des Vielecks nicht fehlerfrei sind, so wird man am Schlusse für x_n einen von a_n und für y_n einen von Null etwas verschiedenen Werth erhalten. Würden die auf diese Weise gefundenen Coordinaten aufgetragen werden, so erhielte das Polygon keinen Schluss; damit es sich aber schliesst, müssen die Coordinaten verbessert werden. Diese Verbesserung bewirkt man am

einfachsten und auf eine praktisch zulässige Weise dadurch, dass man den Abscissenunterschied $x_n - a_n$ auf die Abcissen und den berechneten Werth y_n auf die Ordinaten der $n - 1$ Punkte $A_2, A_3, A_4 \dots A_n$ gleichheitlich vertheilt. Hierdurch leiden auch die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_n$ und $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$ kleine Aenderungen, welche sich aus den Coordinatenwerthen leicht finden lassen.

§. 280.

Aufgabe. Ein auf dem Felde abgestecktes Vieleck oder eine Reihe von Punkten nach der Coordinatenmethode aufzunehmen.

Fig. 329.



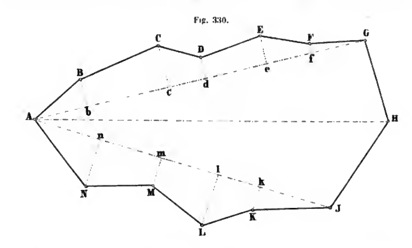
Am zweckmässigsten ist es, rechtwinkelige Coordinaten anzunehmen, da sich die Richtungen der Ordinaten mit dem Prismenkreuze oder Winkelspiegel leicht abstecken lassen. Als Abscissenaxe wählt man eine der längsten Diagonalen, auf der sich Abscissen gut messen und wo möglich alle Punkte des Vielecks sehen lassen. Stellt ABC...K (Fig. 329) das aufzunehmende Polygon vor, so mache man A zum Anfange der Coordinaten und AF zur Abscissenaxe, fälle von allen Eckpunkten Senkrechte auf AF, messe die horizontalen Entfernungen Ab, Ak, Ac.... AF genau ab und verzeichne sie in einer Skizze, die man sich von dem Vielecke macht. Hierauf messe man auch noch die Ordinaten Bb, Cc, Dd...Kk und schreibe deren Längen ebenfalls genau auf.

Werden die auf eine Abscissenaxe bezogenen Ordinaten sehr

lang, wie dieses bei Fig. 330 der Fall wäre, wenn AH zur Abscissenaxe gewählt würde, so nimmt man besser zwei Abscissenaxen (hier AG und AJ) an, misst deren Neigungswinkel GAJ = ψ und bestimmt in Bezug auf diese alle Eckpunkte wie vorhin, mit Ausnahme des Punktes H, welcher sich ergibt, indem man die Seiten GH, JH und nöthigenfalls den Winkel GHJ misst.

Hat man in der Umgebung des aufzunehmenden Vielecks mehrere feste Punkte, deren gegenseitige Lage schon bekannt ist, wie z. B. PQRS in Fig. 331, so kann man die entfernter liegenden Vieleckspunkte D, H, N dadurch aufnehmen, dass man von ihnen

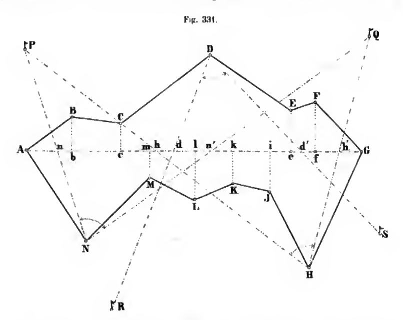
Fig. 330.



aus nach zweien der gegebenen Fixpunkte gerade, die Abscissenaxe schneidende Linien zieht, und deren Schnittpunkte auf dieser Axe einmisst. Hiernach wird der Punkt D aus den Abscissen Ad und Ad' der Geraden DR und DS, der Punkt H aus den Abscissen Ah und Ah' der Linien HP und HQ, endlich der Punkt N aus den Abscissen An und An' der Richtungen NP und NQ gefunden, weil mit d und d' auch dR und d'S, mit h und h' auch hP und h'Q. und mit n und n' auch nP und n'Q bekannt sind, aus denen sich nacheinander die Punkte D, H, N als Durchschnitte verlängerter Richtungen ergeben. Man wird ohne weitere Auseinandersetzung einsehen, dass dieses Verfahren in gebirgigem Terrain, wo lange Linien schwer zu messen sind, von Vortheil ist und sowohl bei der Aufnahme mit dem Messtische als mit dem Theodolithen angewendet werden kann. Zugleich

liefert dieses Verfahren einen neuen Beweis von der vielfachen Anwendbarkeit des Prismenkreuzes; denn die Schnittpunkte d, d', h, h', n, n' etc. werden auf die schnellste Art damit gefunden. Schliesslich bedarf es

Fig. 331.



wohl kaum der Erinnerung, dass die Hilfslinien DR, DS etc. so gewählt werden müssen, dass die Winkel RDS, PHQ, PNQ weder zu spitz noch zu stumpf werden, mit andern Worten: dass die Punkte D, H, N aus „guten Schnitten" hervorgehen.

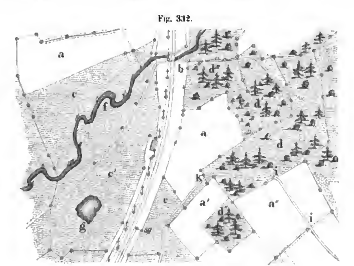
§. 281.

Erklärungen und praktische Bemerkungen, welche sich auf die Aufnahme eines Verbandes von Grundstücken oder einer Flurmarkung beziehen.

Der Hauptgrundsatz, welcher bei der Aufnahme einer grösseren Bodenfläche zu befolgen ist, nämlich vom Grossen in's Kleine zu arbeiten, wurde bereits in der Einleitung zu diesem Kapitel ausgesprochen, und es ist darunter das Festlegen einer Reihe von Hauptpunkten, an die sich das Aufnehmen der Einzelnheiten des Terrains anschliesst, zu verstehen. Diese Einzelnheiten nennt man, wenn sie für sich begrenzt sind, **Parzellen** und unterscheidet sie nach ihrer staats-, land- oder forstwirthschaftlichen Benützung.

So heissen dieselben Bau-, Weg-, Fluss-, Teich-, Feld-, Wiesen-, Hut-, Wald-Parzellen, wenn sie der Reihe nach ein Gebäude mit Hofraum, ein Stück Strasse oder Fluss, einen Teich, ein Feld, eine Wiese, eine Viehweide oder einen Wald umfassen. Besteht das Feld, die Wiese oder der Wald aus mehreren Theilen, welche für sich begrenzt sind oder verschiedenen Besitzern gehören, so bildet jeder Theil eine besondere Parzelle. Steinbrüche, Lehm-, Thon- und Sandgruben, Sümpfe, Torfmoore u. dgl., bilden ebenfalls besondere Parzellen. Die Raine, welche sich sehr häufig zwischen Feldern hinziehen, sind keine besondern Parzellen, sondern werden zu den Feldern gerechnet, welchen sie angehören. Gehört ein Rain zweien Besitzern zugleich, so wird zu jedem Felde die Hälfte oder ein durch die Eigenthumsverhältnisse bestimmter Theil gerechnet. Fig. 332 stellt einen Verband von mehreren Parzellen vor: a, a

Fig. 332.



sind Feldparzellen, b ist eine Bahnparzelle, c, c sind Wiesen-, d, d Waldparzellen, e ist eine zu d′ gehörige Hutparzelle, f eine Flussparzelle, g ist eine zu c′ gehörige Teichparzelle; die Waldparzelle d″ gehört zur Feldparzelle a′, die Wegparzelle i, i zum Felde a″ u. s. w.

Wenn es sich bei der Aufnahme einer Flurmarkung um Besitzverhältnisse handelt, so müssen alle Parzellen genau dargestellt werden; will man aber bloss ein Bild der natürlichen und künst-

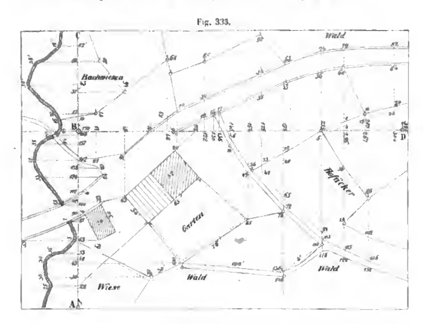
lichen Bildungen des Bodens, so kann man mehrere an einander stossende Felder als eine Parzelle behandeln, ebenso mehrere Wiesen- und Waldtheile als eine einzige Wiesenparzelle und beziehungsweise Waldparzelle. Die Grenzen der aufzunehmenden Parzellen sind entweder durch Marksteine, Raine, Hecken, Zäune, Mauern, Einfriedigungen etc. gegeben, oder sie werden dem Geometer durch eine orts- und sachkundige Person vorgezeigt, von der er zugleich die Namen der Besitzer erfragen kann.

Mit diesem Vorzeiger vollzieht der Geometer oder dessen Gehilfe die Abpflockung der Parzellengrenzen, wobei die auf Seite 134 des ersten Bandes beschriebenen Markpflöcke zur Anwendung kommen. Diese Pflöcke sind in solchen Entfernungen in den Boden zu stecken, dass die geraden Verbindungslinien je zweier aufeinander folgenden Pflöcke genau genug mit den Parzellengrenzen zusammenfallen. Ein praktischer Blick wird entscheiden, was in gegebenen Fällen unter „genau genug" zu verstehen ist: bei guten Gärten, Feldern und Wiesen bedeutet es offenbar etwas anderes als bei Viehweiden, Torfmooren u. dgl. Gebäude werden in der Regel nur mit zwei Pflöcken an der Langseite bezeichnet, weil sich mit Hilfe der dadurch bestimmten Geraden der Grundriss dieser Parzellen leicht bestimmen lässt.

Während des Abpflockens der Parzellen fertigt der Geometer einen Handriss der ganzen Flurmarkung mit allen davon aufzunehmenden Parzellen an. Dieser Handriss wird so naturgetreu gemacht, als es das Augenmass zulässt, und man schreibt in denselben alle Pflocknummern, Culturgattungen, Eigenthümer etc. ein; Brücken, Stege, Wehre, Baumgruppen, Gebäude, Signale u. s. w. werden so bezeichnet, wie es bei Situationszeichnungen gebräuchlich und aus Fig. 333, welche ein Stück eines Handrisses vorstellt, theilweise zu ersehen ist. Ein solcher Riss erleichtert die Aufnahme ausserordentlich, wesshalb er niemals wegzulassen und in möglichst grossem Massstabe mit Sorgfalt anzufertigen ist. Derselbe liefert auch in Verbindung mit der bei seiner Aufnahme erworbenen Terrainkenntniss das besste Mittel zur Bestimmung des Polygons, an das sich die Detailmessung anzuschliessen hat und welches nebst den Bindelinien die man allenfalls von einem Eckpunkte zu einem anderen legen will (z. B. AFC in Fig. 321 S. 36), in den Handriss eingezeichnet wird. Wie das Polygon selbst zu legen ist, hängt zum

Theil von den anzuwendenden Aufnahmsmethoden, grösstentheils aber von der Beschaffenheit des Bodens ab: ob derselbe nämlich eine freie Aussicht gewährt oder nicht, fest oder sumpfig ist u. s. w.

Fig. 333.



Zur Aufnahme des Details eines Flurbezirks wird in Deutschland vorzugsweise der Messtisch angewendet; in manchen Ländern ist derselbe aber kaum bekannt, wie z. B. in England, wo alle geometrischen Aufnahmen ohne ihn gemacht werden. Es lässt sich nicht läugnen, dass der Messtisch, namentlich in Verbindung mit dem Reichenbach'schen Distanzmesser, ein bequemes Arbeiten gestattet und für alle diejenigen, welche auch die geringste Rechnung scheuen, ein vortrefflicher Aufnahmsapparat ist. Dagegen muss der Detailmessung mit dem Theodolithen, wenn sie auch mehr Umsicht und Arbeit fordert, der Vorzug grösserer Genauigkeit zuerkannt werden. Da übrigens jede Methode ihre Licht- und Schattenseiten hat und beide recht gut neben einander bestehen können, so lassen wir, ohne eine als die unbedingt bessere hinstellen zu wollen, lediglich noch einige Bemerkungen zu beiden folgen.

Ist für die Aufnahme des Details eine hinreichende Anzahl von Abscissenaxen bestimmt, so werden auf denselben die Ordinaten

abgesteckt und beide gemessen. Die Ergebnisse dieser Messungen schreibt man entweder in den Handriss, wie Fig. 333 zeigt, oder wenn dieser zu klein seyn sollte, in eine ihm ähnliche grössere Zeichnung, oder endlich in eine Tabelle von nachstehender Form ein. Diese Tabelle bezieht sich auf den eben erwähnten Handriss und es ist dazu nur zu bemerken, dass sich die linke und rechte Seite der Abscissenlinie durch die Aufeinanderfolge der Buchstaben A und B, womit sie bezeichnet ist, bestimmen. Denkt man sich nämlich so gestellt, dass man vom Punkte A nach B sieht, so ist die Seite der Abscissenlinie, welche zur Rechten des Beobachters liegt, die rechte und die entgegengesetzte die linke. In die Rubrik „Bemerkungen“ stellt man kurze Andeutungen über die Beschaffenheit und die Verbindung der eingemessenen Punkte ein.

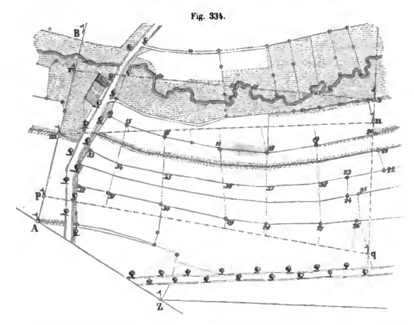
Abscissenlinie AB.

Abscissen.	Ordinaten		Bemerkungen.	
	links.	rechts.		
22'	25'	—	Bach.	—
30	30	70	Bach.	Markstein.
43	—	100	—	Ecke des Gartens.
48	30	—	Bach.	—
53	16	—	Bach.	—
63	5	19	Bach.	Gebäude.
	53		Strasse.	
82	7	—	Ob. Brückenkopf.	—
90	—	6	—	Gebäude.
100	15	—	Unt. Brückenkopf.	—
102	—	23	—	Strasse.
112	—	6	—	Strasse.
128	33	24	Bach.	Strasse.
136	—	20	—	Strasse.
142	41	—	Bach.	—
151	14	—	Feldweg.	—
	18			
	35	—	Bach.	—
166	20	—	Steg.	—
170	14	—	Bach.	—

Parzellen, deren Grenzen krumm und nahezu parallel sind, wie die in Fig. 334 zwischen den Linien mn und pq liegenden, werden entweder durch Vorwärtsabschneiden, oder mit dem Distanzmesser, oder dadurch aufgenommen, dass man die äusseren Grenzen (14

bis 20 und 26 bis 32) auf gegebene oder eigens hergestellte Abscissenlinien (mn und pq) mittels Ordinaten bestimmt, die dazwischen liegenden Grenzen aber durch gerade Querlinien oder Traversen $\left(\frac{15}{31}, \frac{16}{30}, \frac{17}{29} \text{ etc.}\right)$,[1] welche die vorher bestimmten Punkte der äusseren Grenzen verbinden, schneidet und die Schnittpunkte von den Endpunkten der Querlinien aus einmisst. Diese Querlinien sollen die Feldfurchen so viel als möglich senkrecht schneiden.

Fig. 334.



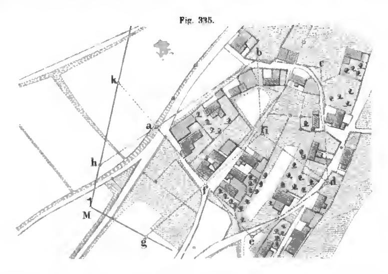
Bei der Aufnahme mit dem Messtische gibt man dem Gehilfen, welcher eine Latte oder Fahne auf den anzuvisirenden Punkten aufzustellen und zu halten hat, ein Verzeichniss mit, aus dem er sieht, in welcher Reihenfolge die Punkte anvisirt werden sollen. Damit sich der Geometer überzeugt, dass der Gehilfe keinen Punkt übersehen hat, muss dieser bei jedem fünften oder zehnten Pflocke ein bestimmtes Zeichen geben, welches der Messende erwiedert, wenn es mit seinen Aufschreibungen übereinstimmt; ausserdem ist sofort nachzusehen, wo gefehlt wurde, und der Fehler zu verbessern.

[1] Diese Bezeichnungen bedeuten: vom Punkt 31 nach 15, von 30 nach 16, von 29 nach 17 u. s. w. Sie setzen also auch die Richtung der Linien fest.

Auch von dem richtigen Stande des Messtisches muss sich der Geometer von Zeit zu Zeit Gewissheit verschaffen, was dadurch geschieht, dass er die Linealkante der Kippregel an die Orientirungslinie legt und zusieht, ob das betreffende Signal von dem Fadenkreuze gedeckt wird. Sollte sich eine Abweichung ergeben, so ist nicht nur der Tisch zu berichtigen, sondern auch jeder Pfahl nochmals anzuvisiren, welcher seit der letzten Versicherung aufgenommen wurde.

Ist die Uebersicht eines Flurtheiles durch Häuser oder Bäume sehr erschwert, so geht man vor allem darauf aus, diesen Theil mit einem kleineren Vielecke zu umziehen, das mit dem Hauptpolygon fest verknüpft ist, und benützt die Seiten dieses kleineren Vielecks als Abscissenlinie bei der weiteren Aufnahme der Coordinaten. In Fig. 335 stellt a b c d e f ein solches Hilfspolygon vor, welches mit

Fig. 335.

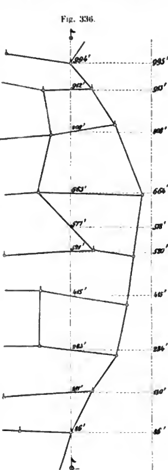


dem bei M vorüberziehenden Hauptpolygon in Verbindung steht. Gestattet das Terrain, einen Punkt i im Innern des Vielecks zwei oder dreimal anzuschneiden, so wird man dieses nicht unterlassen, um daselbst einen neuen gut bestimmten Standpunkt für den Messtisch oder Theodolithen zu gewinnen. Besitzt man einen Distanzmesser, so lassen sich von i aus eine grosse Anzahl Punkte mit geringer Mühe erhalten.

Der Geometer muss während der Aufnahme eines Flurbezirks

stets darauf bedacht seyn, sich eine Controle seiner Arbeit zu verschaffen, und nach dem Schlusse derselben hat er noch eine besondere Prüfung (Revision) der graphisch dargestellten Messungs-Ergebnisse auf dem Felde vorzunehmen. Hiebei kann er entweder Probemessungen oder Probeschnitte, oder beide Prüfungsmethoden zugleich anwenden. Wählt er nämlich aus dem gezeichneten Plane zwei beliebige Punkte aus und misst deren Entfernung im Bilde und auf dem Felde, so bedient er sich der Probemessung: bringt er aber einen Punkt des Messtisches über einen gleichnamigen Punkt des Feldes und visirt er, nach gehöriger Orientirung des Blattes, beliebige Punkte an, um zu sehen, ob sie mit ihren Bildern in einerlei Visirebenen liegen, so wendet er den Probeschnitt an. Es bedarf wohl kaum der Erinnerung, dass diese letztere Prüfungsmethode ebenso wie erstere auch für die Aufnahme mit dem Theodolithen ihre Anwendung findet, und dass in diesem Falle die Horizontalwinkel von einer bestimmten, im Plane und auf dem Felde festgelegten geraden Linie aus gezählt werden müssen. Mit dem Reichenbach'schen Distanzmesser kann man den Probeschnitt und die Probemessung gleichzeitig ausführen, wesshalb er zur Revision der Aufnahme besonders geeignet ist.

Fig. 336.



Probemessungen macht man selbstverständlich nicht bloss zwischen je zwei, sondern sogleich zwischen mehreren Punkten, welche einer viele Grenzen durchschneidenden Diagonale angehören. Diese Diagonale wird auf dem Felde abgesteckt und auf dem Plane ausgezogen: hier misst man die Abscissen der Durchschnittspunkte mit dem verjüngten

Massstabe, dort aber mit der Kette oder dem Distanzmesser und schreibt die Ergebnisse an der Revisionslinie nebeneinander, wie Fig. 336 zeigt. Von den Differenzen beider Messungen hängt es ab, ob die Aufnahme als gut anzuerkennen, oder als ungenügend zu verwerfen, oder theilweise zu verbessern ist.

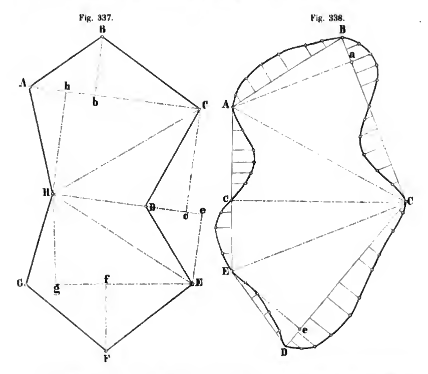
2) Der Flächeninhalt einzelner und verbundener Grundstücke.

Methoden der Flächenbestimmung.

§. 282.

1) Kettenmass. Der Flächeninhalt eines Grundstücks oder eines Verbandes von Parzellen kann entweder aus den auf dem Felde gemessenen Stücken, oder aus den auf dem Plane abgegriffenen Dimensionen, oder endlich auf mechanischem Wege durch einen Planimeter (Flächenmesser) bestimmt werden.

Fig. 337. Fig. 338.



Die Bestimmung des Flächeninhalts aus dem Kettenmasse besteht darin, dass man das auszumessende und im Allgemeinen als Vieleck

sich darstellende Grundstück in Dreiecke zerlegt und in jedem derselben Grundlinie und Höhe misst, wobei der Fusspunkt der letzteren durch das Prismenkreuz oder den Winkelspiegel bestimmt wird (Fig. 337).

Ist das Grundstück von vielen kleinen Seiten oder krummen Linien begrenzt, so legt man in oder um dasselbe ein Vieleck, misst und berechnet zuerst dieses, und fügt alsdann die aus Abscissen und Ordinaten bestimmten Flächeninhalte der an dem Vieleck liegenden Abschnitte der Figur als positive oder negative Grössen hinzu (Fig. 338).

Man sieht diese Flächenbestimmungen als hinreichend genau an, wenn sie mit einer zweiten nach einer andern Zerlegung vorgenommenen Messung und Berechnung bis auf $^1/_{200}$ oder $^1/_{300}$ des gefundenen Inhalts übereinstimmen. Hat man viele zusammenhängende Parzellen zu messen, so ist eine Controle der Messung dadurch gegeben, dass man den ganzen Verband durch ein Vieleck einschliesst, den Gesammtinhalt wie vorhin mit Bezug auf Fig. 337 bestimmt, und schliesslich diesen Inhalt mit der Summe aller Flächengehalte der Parzellen vergleicht: beträgt die Abweichung dieser Summen nur $\pm\ ^1/_2$ oder $\pm\ ^1/_3$ Prozent der einen oder andern, so kann man mit dem Ergebnisse vollständig zufrieden seyn.

§. 283.

2) Zirkel und Massstab. Sind Flächeninhalte aus Zeichnungen durch Zirkel, Massstab und Rechnung zu bestimmen, so ahmt man gewöhnlich das auf dem Felde anzuwendende Verfahren nach, indem man die zu berechnenden Figuren in Dreiecke oder in ein Vieleck und kleine Segmente zerlegt und diese aus den der Zeichnung entnommenen Dimensionen berechnet; krummlinige Figuren zerlegt man indessen zweckmässiger in parallele Streifen von gleicher Breite, weil sich diese als Paralleltrapeze betrachten und schnell berechnen lassen. Denn sind $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ die Längen der $n + 1$ parallelen Seiten, welche n Streifen von der Breite b bilden, so sind die Flächeninhalte der einzelnen Trapeze (Fig. 339):

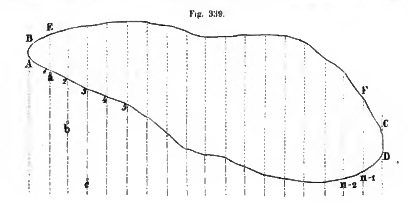
$^1/_2\, b\, (a_0 + a_1),\ ^1/_2\, b\, (a_1 + a_2),\ ^1/_2\, b\, (a_2 + a_3) \ldots\ldots\ ^1/_2\, b\, (a_{n-1} + a_n)$

und folglich wird ihre Summe oder der Flächeninhalt der ganzen Figur

$$F = b\,(^1/_2\, a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + {}^1/_2\, a_n)\ . \quad (281)$$

Da in den meisten Fällen a_0 und a_n Null seyn werden (Fig. AEF DA), so besteht der zweite Factor des die Fläche darstellenden Products bloss aus der Summe der Ordinaten, welche die Figur theilen; aber auch dann, wenn a_0 und a_n nicht null sind, lässt sich der zu b gehörige Factor leicht mit Zirkel und Massstab bestimmen.

Fig. 339.



Denn setzt man $\frac{1}{2}a_0$ mit dem Zirkel an das untere Ende von a_1 an und öffnet den Zirkel bis zum obern Ende, so ist die Oeffnung $= \frac{1}{2}a_0 + a_1$; setzt man ferner diese Länge an die Ordinate a_2 ($= 2\,b$) an und öffnet den Zirkel bis zum anderen Endpunkte dieser Ordinate, so erhält man $\frac{1}{2}a_0 + a_1 + a_2$; in gleicher Weise wird $\frac{1}{2}a_0 + a_1 + a_2 + a_3$ erhalten; und so kann man fortfahren, bis die Zirkelöffnung $= \frac{1}{2}a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + \frac{1}{2}a_n$ ist, worauf sie auf dem Massstabe gemessen und die gefundene Länge mit der Breite b multiplicirt wird.

Flächeninhalte, welche mit Zirkel und Massstab bestimmt werden, sieht man als hinreichend genau gefunden an, wenn die Summe aller Theile von dem unmittelbar gemessenen ganzen Inhalte bei Plänen von 1 : 5000 nicht mehr als $\frac{1}{100}$ und bei 1 : 2500 nicht mehr als $\frac{1}{200}$ abweichen.

§. 284.

3) Planimeter. Am schnellsten und sichersten werden gezeichnete Figuren mit den in neuerer Zeit in Aufnahme gekommenen Planimetern gemessen, und zwar mit derjenigen Classe derselben, welche den Flächeninhalt einer ebenen Figur durch blosses Umfahren des Umfangs angibt. Diese merkwürdigen und bereits sehr

vervollkommneten Instrumente können hier um so weniger mit Stillschweigen umgangen werden, als zu erwarten steht, dass sie in nicht ferner Zeit auf allen technischen Bureaux, wo viele Flächen zu berechnen sind, eingeführt seyn werden.

Wir werden uns jedoch kurz fassen, indem wir auf folgende zwei Schriften verweisen, welche die beiden im Gebrauch befindlichen Arten von Planimetern nach ihrer Theorie, Construction und Ausführung ausführlich behandeln, nämlich

Bauernfeind: „die Planimeter von Ernst, Wetli und Hansen" etc. München 1853 und

Amsler: „Ueber die mechanische Bestimmung des Flächeninhalts ebener Figuren etc." Schaffhausen 1856.

Das Princip, worauf die allein brauchbare Classe der die Figur umschreibenden Planimeter beruht, wurde, wie der Verfasser in Dingler's polytechnischem Journale Bd. 137. S. 82 nachgewiesen hat, von dem bayerischen Trigonometer J. M. Hermann[1] bereits im Jahr 1814 erfunden und 1817 angewendet, seine Erfindung ist aber, da er sie nicht veröffentlichte, sondern bloss seiner vorgesetzten Stelle vorlegte, nicht gehörig beachtet worden und scheint bereits vergessen gewesen zu seyn, als der schweizerische Ingenieur Oppikofer aus Untereppikon im Jahre 1827 auf dieselbe Idee kam und ein dem Hermann'schen gleiches Instrument construirte. Der Mechaniker Ernst in Paris nahm an dem Oppikofer'schen Planimeter mehrere Veränderungen und zum Theil Verbesserungen vor, so dass die abgeänderten Planimeter in Frankreich nach ihm benannt wurden. Ein wesentliches Verdienst um diese Instrumente gebührt jedoch dem Ingenieur Wetli in Zürich, und mehrere Verbesserungen verdanken wir dem Astronomen Hansen in Gotha.

Die Planimeter von Wetli und Hansen leisten in Bezug auf Genauigkeit und Zeitersparniss fast Unglaubliches; an Einfachheit und Wohlfeilheit werden sie jedoch von dem Polarplanimeter des Professors Amsler[2] in Schaffhausen weit übertroffen. Indem wir

[1] Geboren am 22. Juli 1785 in Pfronten bei Füssen, 1808 zum Geodäten ernannt und am 25. März 1841 als Trigonometer in München gestorben.

[2] Der Verfasser sah im August 1856 in der Werkstätte des polytechnischen Instituts zu Wien einen mit dem Amsler'schen bis auf eine Kleinigkeit übereinstimmenden Polarplanimeter, welcher nach den bereits im Jahre vorher gemachten Angaben des Bergmeisters Schmid in Leoben von Chr. Starke verfertigt war. Es wäre

wir von diesen beiden Arten von Planimetern nach den oben genannten Schriften Zeichnungen und Beschreibungen nebst Theorie und Gebrauchsanweisung mittheilen, finden wir uns zu der Bemerkung veranlasst, dass die völlige Uebereinstimmung unserer Figur 339 mit der Fig. 4 Taf. 15 der Messkunde von Barfuss (Weimar 1854) bloss davon herrührt, dass beide bis auf die Buchstaben Copieen unserer Zeichnung vom Jahre 1853 sind.

Die Linearplanimeter von Wetli und Hansen.

§. 285.

Diese Planimeter sind sich im Wesen gleich, nur einzelne Constructionstheile weichen von einander ab, und beide unterscheiden sich von der ursprünglichen Einrichtung der umschreibenden Planimeter von Hermann im Grunde nur durch eine bessere mechanische Ausführung und die Vertauschung des von Hermann, Oppikofer und Ernst angewendeten drehbaren Kegels mit einer horizontalen Scheibe. In der Einführung dieser Scheibe besteht Wetli's wirkliches Verdienst um die Vervollkommnung der auf rechtwinkelige Coordinaten gegründeten Planimeter, welche wir zunächst betrachten und der Kürze halber (zum Unterschiede von den Polarplanimetern) Linearplanimeter nennen wollen.

Man kann die Idee, welche diesen Instrumenten zu Grunde liegt, kaum besser und einfacher ausdrücken, als dieses ihr Erfinder in den nachfolgenden Worten that:[1]

„Der Flächeninhalt zweier Dreiecke oder Parallelogramme, welche eine und dieselbe Grundlinie haben, steht im geraden Verhältnisse zu ihren Höhen. Denkt man sich nun einen Kreis, dessen Peripherie gleich einer solchen gemeinschaftlichen Grundlinie ist, und diesen Kreis mit etwas anderem so in Verbindung, dass, wenn man mit dem letzteren längs dieser Linie hinfährt, er sich gerade einmal um seine Axe dreht, wenn die Höhe der Figur = 1 ist; denkt man sich ferner, dass wenn die Höhe der Figur = 2 ist, sich der Kreis vermittelst seiner Verbindung, während längs der Grundlinie hingefahren wird, zweimal um seine Axe dreht; denkt

interessant zu erfahren, ob auch hier wieder zwei Personen gleichzeitig eine und dieselbe Idee und Form eines Instruments erfunden haben.

[1] Siehe des Verfassers Aufsatz „zur Geschichte der Planimeter" in Dinglers polytechnischem Journale, Bd. 137, H. 2.

man sich endlich, dass die Revolutionen des Kreises wie die Zahlen der Höhen zunehmen, und würde die Zahl dieser Revolutionen an irgend etwas bemerkt werden können: so hätte man mit einem so verbundenen Kreise eine Art mechanischen Flächenmessers. Wollte man nun ohne Zahlenrechnung den Inhalt geometrischer Figuren durch eine Maschine finden, so dürfte bloss die Art aufgesucht werden, wie die Kreisrevolutionen in dem obigen Verhältnisse bewirkt werden könnten, und die Maschine wäre erfunden."

Nach der jetzigen Einrichtung der Linearplanimeter ist der vorgenannte Kreis ein ungezahntes Rädchen, das auf einer horizontalen Scheibe senkrecht steht und um eine mit dieser Scheibe parallele Axe drehbar ist. Die Scheibe selbst dreht sich um eine vertikale Axe und bringt dadurch das auf ihr ruhende Rädchen in Folge der stattfindenden Reibung in Bewegung. Ist der Abstand des Berührungspunktes des Rädchens vom Mittelpunkte der Scheibe gleich dem Halbmesser des Rädchens, so wird dieses eine ganze Umdrehung machen, wenn die Scheibe eine macht, und eine halbe, wenn diese sich nur zur Hälfte dreht; allgemein wird sich das Rädchen so vielmal mehr drehen als die Scheibe, als sein Halbmesser in dem Abstande seines Berührungspunktes vom Mittelpunkte der Scheibe enthalten ist. Die Verschiedenheit dieses Abstandes erfordert eine Bewegung der Scheibe längs der unverrückbar gedachten Drehaxe des Rädchens, oder längs der mit ihr parallelen Höhe des zu messenden Rechtecks; die Drehung der Scheibe muss dagegen durch die Abwickelung eines um ihre Welle geschlungenen Fadens geschehen, welcher der Grundlinie jenes Rechtecks parallel ist. Schliesslich ist an dem Apparate noch eine Vorrichtung anzubringen, durch welche die Drehungen des Rädchens gezählt werden können. Nach dieser Vorbereitung wird man den Zusammenhang der in der nachfolgenden Abbildung und Beschreibung näher bezeichneten Theile des Hansen'schen Planimeters leicht begreifen.

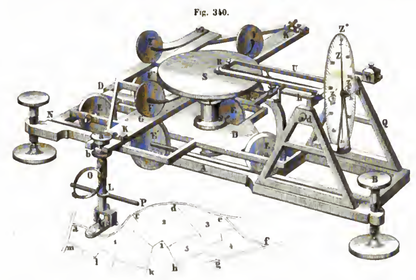
§. 286.

Beschreibung. Das Instrument erfordert zwei auf einander senkrechte (den Axen parallele) Grundbewegungen: die eine geschieht durch den unteren Schlitten nach der Langseite des Messingrahmens A, welcher mit den Stellschrauben B das Fussgestelle bildet; die andere aber durch den oberen Schlitten G, auf dem ein Silberdraht

ausgespannt ist, welcher sich um die Trommel T der Scheibe S schlingt.[1]

An dem Schlitten G befindet sich der Führer L, welcher zum Umschreiben der auszumessenden Figur dient. Der Fahrstift des Wetli'schen Planimeters ist hier durch ein Glas M mit einer kreisförmigen Marke ersezt, welche auf dem Umfange fortgeführt wird. Damit dieses genauer als mit dem Stifte geschehen könne, ist über M eine Lupe O angebracht, welche Marke und Umfang vergrössert. Die Drehungen des auf der Scheibe S stehenden Rädchens R werden durch den Zeiger Z auf dem Zifferblatte Z^0 gemessen, und dieses

Fig. 340.



ruht auf den mit dem Fussgestelle festverbundenen Trägern Q, Q. Die Eintheilung des Zifferblattes, welches in neuerer Zeit auf der Langseite des Gestelles angebracht wird, kann den zu wählenden Masseinheiten und ihren Unterabtheilungen angepasst werden: an unserem Instrumente ist sie so getroffen, dass man bei Z' Tausende, bei Z'' Hunderte und am Umfange ganze und Theile von Flächeneinheiten ablesen kann. Alle übrigen Theile, namentlich Laufrollen, Federn, Schrauben und das Gegengewicht Q, dienen bloss zur Erzeugung genauer Bewegungen und zur Berichtigung des Instruments.

[1] Man kann sich die Axe der x diesem Drahte und die Axe der y der Langseite des Rahmens A parallel denken.

§. 287.

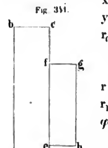
Der Gebrauch des fehlerfreien Planimeters ist äusserst einfach. Steht derselbe nämlich auf einer festen ebenen Unterlage, einem Tische oder Zeichenbrette, so bringe man ihn zunächst durch die Fussschrauben in eine nahehin wagrechte Lage. Diese Lage erkennt man daran, dass jeder der beiden Schlitten an der Stelle ruhig verharrt, in die man ihn schiebt. Hierauf lege man die auszumessende ebene Figur so unter den Führer L, dass dieser ungefähr über der Mitte steht, wenn sich bei etwas ausgezogenen Schlitten das Rädchen R am Mittelpunkte der Scheibe S befindet. Diese Stellung ist jedoch wie die horizontale Lage des Instrumentes nur annähernd herbei zu führen. Nun bezeichne man auf dem Umfange einen Punkt, von dem der Führer ausgeht und bis zu dem er wieder zurückkehrt. Für die Verminderung der zufälligen Fehler ist es gut, diesen Punkt so zu wählen, dass der Berührungspunkt des Rädchens R noch nahe am Scheibenmittelpunkte steht, oder so, dass die erste Bewegung des Führers der Langseite des Instruments nahezu parallel ist. Hierauf hebe man durch das Schräubchen e das Rädchen R ein wenig in die Höhe, drehe alle Zeiger auf Null zurück und stelle die Marke M genau auf den Anfangspunkt des Umfangs, was dann der Fall ist, wenn die Mitte der Marke diesen Punkt deckt. Ist dieses geschehen, so lasse man durch Rückwärtsdrehen des Schräubchens e das Rädchen R auf die Scheibe S herab, bis sich beide dicht berühren, führe die Marke M auf der auszumessenden Figur von links nach rechts (wie den Zeiger einer Uhr) vorsichtig herum und lese, sobald der Ausgangspunkt erreicht ist, auf dem Zifferblatte die Fläche ab, wie bereits angegeben. Will man die Figur sogleich zum zweitenmale messen, so fahre man lediglich, wenn man im Anfangspunkte angekommen ist, weiter bis man diesen zum zweitenmale erreicht; die Ablesung gibt dann die doppelte Fläche. Man begreift, dass sich auf diese Weise der Flächeninhalt einer Figur beliebig vervielfachen und durch Division die einfache Fläche finden lässt.

§. 288.

Theorie. Sobald man eingesehen hat, dass der vorstehend beschriebene Planimeter den Flächeninhalt eines mit seinen Grundbewegungen parallel liegenden Rechtecks angibt, wenn dieses recht-

sinnig umfahren wird, hat man den wesentlichsten Theil der Theorie des Linearplanimeters erfasst. Wir beweisen desshalb die Wahrheit dieses Satzes.

Stellt abcd (Fig. 341) ein Rechteck vor, dessen Seiten den Schlittenbewegungen parallel sind, und bezeichnet



x die Länge der dem Draht parallelen Seite ab;
y die der unteren Schlittenbahn parallele Seite ad;
r_0 den Abstand des Berührungspunktes des Rädchens R vom Scheibenmittelpunkte, wenn der Führer auf a steht;
r den Halbmesser der Scheibentrommel T;
r_1 den Halbmesser des Rädchens R;
φ den Drehwinkel der Scheibe oder ihrer Trommel und
v den Drehwinkel des Rädchens R, beide in Bogenmass:

so ist, wenn der Führer von a nach b gelangt ist, $x = r\varphi$ und, da sich während dieser Bewegung der Abstand r_0 nicht ändert, $r_0\varphi = r_1 v$, oder, wenn man φ eliminirt:

$$r_0 x = r r_1 v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (282)$$

Geht der Führer von b nach c, so erfolgt keine Abwickelung des Drahtes, folglich auch keine Drehung der beiden Scheiben; aber es ändert sich der Abstand r_0 in $r_0 + y$ um. In c ist die Ablesung der in b gleich. Bewegt man jetzt den Führer von c nach d, so entsteht eine der vorigen entgegengesetzte aber gleiche Drehung der grossen Scheibe, welche durch $- x = - r\varphi$ ausgedrückt ist; und auf dem Rädchen R oder der kleinen Scheibe wickelt sich ein Bogen von der Länge $(r_0 \pm y)\ \varphi = r_1 v_1$ ab, welcher der Lage nach dem vorigen $r_1 v$ entgegengesetzt ist. Es ergibt sich somit die zweite Gleichung:

$$-(r_0 \pm y)\ x = - r r_1 v_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (283)$$

Fährt man schliesslich von d nach a, so erfolgt wie von b nach c keine Drehung, der Abstand $r_0 \pm y$ wird jedoch wie im Anfange $= r_0$. Die Ablesung in a ist der in d gleich und entspricht dem Bogenunterschied $v - v_1$. Dieser Unterschied zeigt aber die Fläche des Rechtecks abcd an; denn zieht man die Gleichung (283) von der (282) ab, so kommt

$$\pm y x = r r_1 (v - v_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (284)$$

d. h. die Fläche des Rechtecks $abcd = xy$ ist der algebraischen Summe der Drehungen des Rädchens proportional, was zu beweisen war.

Denkt man sich nun an das Rechteck abcd ein zweites efgh angefügt, wie Fig. 341 zeigt und jedes dieser Rechtecke umfahren, so gibt der Planimeter offenbar die Summe beider Flächen an. Bei diesem Umfahren wurde aber die Linie ef zweimal und zwar in entgegengesetzten Richtungen umfahren. Die damit verbundenen Drehungen des Rädchens R heben sich folglich auf, da jedesmal der Abstand des Berührungspunktes $r_0 \pm y$ war. Man kann folglich die Beschreibung der Linie ef ganz weglassen; thut man dieses aber, so bleibt bloss der Umfang abcfghcda der Figur 341 zu umfahren übrig, um die Fläche dieser Figur zu finden. Dasselbe findet statt, wie viele Rechtecke man auch an einander legt. Da man nun jede Figur in Rechtecke so zerlegen kann, dass deren Flächensumme der gegebenen Figur gleich ist, und da die Lage der Rechtecke willkührlich ist, so kann man dieselben auch so einlegen, dass ihre Seiten den Bewegungsrichtungen der Schlitten des Planimeters beziehlich parallel sind. Zufolge des vorhergehenden Satzes braucht man, um die Fläche der ganzen Figur zu ermitteln, nur die treppenförmige Umfangslinie bcdfg.... b, welche die Rechtecke begrenzt, zu umfahren. Da aber die Breite der Rechtecke beliebig ist und demnach ausserordentlich klein genommen werden kann, so wird bei dieser Annahme die Treppenlinie mit der eigentlichen Umfangslinie der gegebenen Figur zusammenfallen, und deren Inhalt gefunden werden, wenn man ihren Umfang umfährt.

Es kommt also, wenn der Zählapparat unmittelbar den Inhalt der Fläche statt der Drehungen des Rädchens angeben soll, nur darauf an, die Flächeneinheit auszumitteln, welche ein Theil des Zifferblattes vorstellt. Diese Ausmittelung ist aber sehr einfach. Denn stellt F die Fläche vor, welche einer ganzen Umdrehung des Zeigers Z entspricht, so muss in diesem Falle die Summe aller Drehungen $= 2\pi$ und daher

$$F = 2 r r_1 \pi$$

seyn. Ist nun das Zifferblatt an seinem Rande in n gleiche Theile getheilt, so wird jeder eine Fläche $f = \frac{1}{n}$ F vorstellen und es drückt alsdann die Gleichung

$$nf = 2 r r_1 \pi$$

die Abhängigkeit der Halbmesser der Trommel T und des Rädchens R von der Flächeneinheit f aus, welche einer von den n Theilen des Zifferblattes vorstellen soll. Ist demnach z. B. der Trommelhalbmesser $r = 3{,}485$ Dez.-Linien und soll einer von den 100 Theilen des Zifferblatts eine Quadrat-Dezimallinie vorstellen, so muss der Halbmesser des Rädchens

$$r_1 = \frac{nf}{2r\pi} = \frac{100}{2 \cdot 3{,}485\,\pi} = 4{,}567 \text{ Dez.-Linien}$$

seyn. Wäre die zu messende Fläche im Massstabe von 1 : 2500 gezeichnet, so würde ein Theil des Zifferblattes einem Inhalte von 625 □' entsprechen; wollte man nun dem Rädchen R einen Halbmesser geben, durch welchen ein Theil des Zifferblattes z. B. einen bestimmten Theil des Tagwerks anzeigt, so wäre derselbe, wie man sieht, leicht zu berechnen.

§. 289.

Die Prüfung des Planimeters würde sehr umständlich seyn, wenn alle wesentlichen Theile einzeln untersucht werden müssten, ob sie ihre Bestimmung mit der erforderlichen Genauigkeit erfüllen. Diese Einzel-Untersuchung ist jedoch nicht nöthig, sobald man sich durch ein summarisches Verfahren überzeugt hat, dass der Flächeninhalt von genau berechneten Versuchsfiguren richtig angegeben wird. Am bessten sind hiezu regelmässige Figuren, wie Kreise, Quadrate, gleichseitige Dreiecke u. s. w. geeignet. weil sie sich am schärfsten zeichnen und berechnen lassen. Man kann sie entweder auf angespanntem Papier fein ausziehen oder in ebene Metallplatten graviren. Ihre Abmessungen müssen mit der grössten Genauigkeit bestimmt seyn. Es ist gut, wenn man zu diesen Probefiguren auch solche nimmt, welche, wie z. B. Rechtecke, erfordern, dass die beiden Schlitten ihre grösstmöglichen Bewegungen machen, weil nur dann, wenn auch der Inhalt dieser Flächen richtig angegeben wird, angenommen werden darf, dass alle Theile des Apparats ihre Schuldigkeit thun.

Bei diesen Versuchen kann sich zeigen, dass alle abgelesenen Flächeninhalte gegen die berechneten nur um äusserst wenig (etwa $^1/_{1000}$) bald zu gross, bald zu klein sind: in diesem Falle ist das Instrument in Ordnung. Oder es zeigt sich, dass alle Inhalte um etwas zu gross gefunden werden; dann ist auch das Rädchen etwas

zu gross und desshalb sein Durchmesser um eine Kleinigkeit zu verringern. Oder man findet alle Flächen etwas zu klein; dann ist auch der Durchmesser des Rädchens zu klein. Da derselbe aber nicht vergrössert werden kann, so ist oft damit zu helfen, dass man den Draht etwas dicker nimmt, denn dadurch wird der Halbmesser r der Trommel grösser und es kann so das Produkt $r r_1$ auf die erforderliche constante Grösse gebracht werden, sowie im vorhergehenden Falle durch Anwendung eines dünneren Drahtes das Abdrehen des Rädchens auch oft erspart wird. Oder endlich es zeigt sich, dass die Abweichungen von dem wahren Flächeninhalte bald positiv bald negativ, jedenfalls aber grösser sind als sie seyn dürfen; dann wird der Fehler entweder von der Ungeschicklichkeit oder Unachtsamkeit des Messenden, oder von der Unebenheit der Scheibe S, oder von der gleitenden Bewegung des Rädchens R herrühren.

Was die erste dieser drei Fehlerquellen betrifft, so wirkt sie um so schwächer, je besser das Instrument aufgestellt ist und je gleichmässiger und vorsichtiger der Umfang der Figur umfahren wird. Die zweite Quelle liegt meistens in dem Papier, womit die Metallscheibe überzogen ist; man muss desshalb den Ueberzug nach allen Richtungen mit einem genauen Lineale untersuchen, ob er eben ist, und ihn verbessern, wenn er es nicht seyn sollte. Am gefährlichsten kann die dritte Fehlerquelle werden, welche theils in einer schwerfälligen Bewegung der Axe des Rädchens R, theils in zu grossem oder zu geringem Drucke dieses Rädchens auf die Scheibe S liegen kann. Die Bewegung der genannten Axe lässt sich durch die auf ihre Lager wirkenden Schräubchen bei e und e', der Druck des Rädchens aber durch das Gegengewicht W reguliren.

§. 290.

Ueber die Genauigkeit des Linearplanimeters hat der Verfasser vielfache Versuche angestellt und einen Theil derselben in seiner oben angeführten Schrift auf S. 33 bis 37 mitgetheilt. Aus allen diesen Versuchen geht mit Entschiedenheit hervor, dass jenes Instrument eine viel grössere Genauigkeit gewährt, als man für irgend einen praktischen oder wissenschaftlichen Zweck nöthig hat, und dass die Genauigkeit bei kleinen Flächen etwas geringer ist als bei grossen. Bei nur einiger Uebung wird man Flächen von ungefähr 2 Quadratzoll Inhalt sicher bis auf $^1/_{1000}$ ihres Inhaltes

richtig finden, und, wie diese auch umgrenzt seyn mögen, mit einem Zeitaufwande von nur 1 bis 3 Minuten.

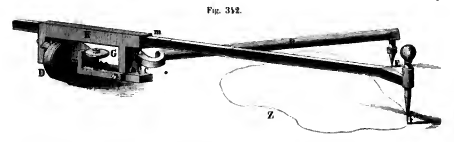
Die Genauigkeit der Planimeter von Wetli und Hansen ist so gross, dass sie denjenigen, welche das erste Mal damit arbeiten oder welche bloss Berichte über ausgeführte Arbeiten lesen, auffällt. Sie kann auch wohl nur dadurch erklärt werden, dass man annimmt, die kleinen, mit der Bewegung verbundenen Unregelmässigkeiten gleichen sich ungefähr in derselben Weise aus, wie dieses hinsichtlich der Höhenunterschiede beim Nivelliren geschieht, wovon später noch die Rede ist.

Der Polarplanimeter von Amsler.

§. 291.

Beschreibung. Die Bezeichnung Polarplanimeter ist desshalb gewählt, weil sich das Instrument beim Gebrauche um einen festen Punkt (den Pol) dreht. Dieser Punkt ist in unserer (etwas verkürzten) Zeichnung Fig. 342 mit E bezeichnet und wird in Wirk-

Fig. 342.



lichkeit durch eine feine Nadel vorgestellt, welche in den Arm B eingesetzt ist, der mit den übrigen beiden Haupttheilen, dem Stabe A und der Laufrolle D, durch die Hülse H zusammenhängt. Sowie der Arm B den Nadeleinsatz E, trägt der Stab A an einem Ende den Fahrstift F, während das andere Ende in der Hülse H durch Reibung festgehalten wird. Die Hülse ist an den Enden aufgeschnitten, damit die dadurch entstehenden Lappen, als Federn wirkend, die Reibung vermehren und gleichmässiger machen. Mit dieser Hülse ist der Arm B durch die vertikale Axe C verbunden. Denkt man sich durch diese Axe und die Mitte des Fahrstiftes eine Ebene gelegt, so bekommt man die Richtung, welcher die Axe der stählernen Laufrolle D parallel ist. Der äusserste Rand dieser Rolle

ist abgerundet und polirt, ihr cylindrischer Limbus aber in 100 oder 200 Grade getheilt, welche mittelst des Nonius O bis auf Zehntelsgrade abgelesen werden können. Die ganzen Umdrehungen der Rolle werden durch das Rädchen G gezählt, das von einer an der Axe jener Rolle befindlichen unendlichen Schraube bewegt wird. Der Stab A hat während jeder Messung eine unveränderliche Stellung gegen die Hülse, und es wird dieselbe nur geändert, wenn man der Messung eine andere Flächeneinheit zu Grunde legen will. Wie weit man ihn zu verschieben hat, sieht man an der Theilung auf seiner oberen Fläche, für welche eine in die Verlängerung der Axe C fallende Kante M der Hülse H als Zeiger dient.

§. 292.

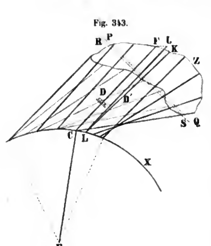
Gebrauch. Soll der Flächeninhalt einer gezeichneten ebenen Figur (Z) gefunden werden, so stelle man vor Allem den Stab A so, dass die Fläche in der Einheit ausgedrückt wird, welche man wünscht, z. B. in Quadratdecimetern. Dieses ist der Fall, wenn der auf der Theilung mit 1 Quadratdecimeter bezeichnete Theilstrich bis an die Kante M der Hülse H vorgeschoben ist. Hierauf setze man das Instrument nach Fig. 342 so auf die Zeichnung, dass die Rolle D, die Nadel E und der Stift F genau aufliegen und der Stift F an jeden Punkt der zu messenden Figur gelangen kann. Hat man die Nadel E etwas in das Papier gedrückt und den Stift auf den beliebig gewählten Anfangspunkt F des Umfangs der Figur eingestellt, so lese man den Stand der Rolle D an dem Rädchen G und dem Nonius O ab und schreibe ihn auf. Alsdann umfahre man die Figur von links nach rechts bis zu dem Ausgangspunkte, lese den Stand der Rolle D wieder ab und subtrahire die erste Ablesung von der zweiten. Die erhaltene Differenz sey $= \Delta$. Liegt nun die Spitze oder der Pol E ausserhalb der umfahrenen Figur, so ist der Unterschied Δ geradezu der gesuchte Flächeninhalt in der Einheit, auf welche der Stab A eingestellt wurde, hier in Quadratdecimetern; befindet sich aber der Pol E innerhalb der umfahrenen Figur, so ist der Differenz Δ eine constante Zahl beizufügen, welche für jede Masseinheit des Planimeters auf der Seitenfläche des Stabes A und zwar da angemerkt ist, wo sich der einzustellende Theilstrich befindet. Hätte man also die Spitze E innerhalb der Figur befestigt und mit der Einstellung auf Quadratdecimeter z. B. die Differenz $\Delta = 4{,}567$

erhalten, so wäre, da die Constante hier = 18,81 ist, der Inhalt der umfahrenen Fläche = 18,81 + 4,567 = 23,477 □Decimeter. Um diese Reductionen zu ersparen wird man, so oft es die Ausdehnung der auszumessenden Figur erlaubt, die Spitze E ausserhalb des Umfangs anbringen. Befindet sich die Figur auf einem Reissbrette, welches zu klein ist, um der Rolle D den nöthigen Spielraum zu gewähren, so müsste man in gleicher Höhenlage ein zweites Blatt anfügen und die Stossfuge eben zudecken. Ist dagegen die Figur auf ein zu kleines abgeschnittenes Blatt gezeichnet, so braucht man dieses lediglich auf einen grösseren Zeichnungsbogen zu legen, beide mit Strohpapier zu überdecken und die Laufrolle über dieses wegzuführen. Bei der Lage des Pols innerhalb der Figur kann es sich treffen, dass die Differenz Δ (durch Subtraction der ersten Ablesung von der zweiten entstanden) negativ wird: dieses Vorzeichen ist bei der Reduction gehörig zu berücksichtigen.

§. 293.

Theorie. Sowie der §. 288 nur einen Theil der Theorie des Linearplanimeters enthält, so folgt auch hier nur so viel von der Theorie des Polarplanimeters, als nöthig ist, dessen Wirkungsweise einzusehen. Wir halten uns hiebei ganz an die von Amsler gegebene Darstellung.

In den Fig. 343 und 344 bezeichne F die Spitze des Fahrstifts, E die Nadelspitze oder den Pol, C die Horizontalprojection der Axe des Arms B, D den Berührungspunkt der Laufrolle, r die während einer Messung constante Entfernung des Stifts F von der Axe C und R die gleichfalls unveränderliche Entfernung dieser Axe vom Pole E.

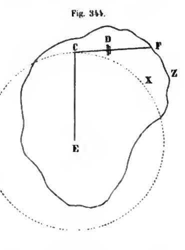


Liegt dieser Pol ausserhalb einer geschlossenen Curve Z, wie in Fig. 343, und man führt den Stift F auf ihr herum, so beschreibt der Punkt C bloss einen Kreisbogen, befindet sich

aber E innerhalb der Curve Z, wie in Fig. 344, so beschreibt der Punkt C einen ganzen Kreis. Diese beiden Fälle sind besonders zu untersuchen.

Hat F den ganzen Umfang durchlaufen, so befindet sich die Gerade CF wieder in ihrer Anfangslage und hat während ihrer Bewegung jeden innerhalb der Curve Z liegenden Punkt einmal oder 3, 5, 7 . . . mal getroffen, jeden äusseren Punkt dagegen entweder gar nicht oder 2, 4, 6 . . . mal. Sind nun CF und LK (Fig. 343) zwei aufeinander folgende Lagen der beweglichen Geraden, so ist klar, dass CF nur durch eine gleichzeitig fortschreitende und drehende Bewegung in die Lage LK kommt, und dass man diese zusammengesetzte Bewegung in zwei einfache zerlegen kann, indem man sich vorstellt, dass die Gerade CF zuerst durch eine parallele Verschiebung in die Lage LJ und hierauf durch eine Drehung um den Punkt L in die Lage KL gelange. Somit wird das Flächenelement CLKF durch die algebraische Summe des Parallelogramms CFJL = p und des Sectors LJK = s vorgestellt.

Fig. 344.



Die Fläche p werde als positiv angesehen, wenn sie durch die Tangente des Punktes C vom Pole E getrennt ist und, von diesem aus gesehen, rechts von CF liegt; der Sector s dagegen sey positiv, wenn die Gerade LJ durch eine rechtsinnige Drehung in die nachfolgende Lage übergeht.

Es ist nun nicht schwer einzusehen, dass wenn man sich jedes Flächenelement, das durch zwei auf einander folgende Lagen der Geraden CF entsteht und durch die von deren Endpunkten beschriebenen Bögen begrenzt wird, in ein Parallelogramm p und einen Sektor s zerlegt denkt, die Summe aus der Summe aller p (Σp) und aus der Summe aller s (Σs), d. i. $\Sigma p + \Sigma s$ gleich ist der von der Curve Z begrenzten Fläche, sobald CF in die erste Lage oder der Stift F auf den Ausgangspunkt zurückgekehrt

ist. Wird der Flächengehalt der Figur Z mit J bezeichnet, so ist demnach

$$J = \Sigma p + \Sigma s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (285)$$

Denkt man sich jetzt mit der Geraden CF eine auf der Zeichnungsfläche sich bewegende Rolle so verbunden, dass ihre Axe parallel zu CF ist und ihr Berührungspunkt in D liegt, so wird diese Rolle bloss gleiten, wenn sie nach ihrer Axe, und bloss rotiren, wenn sie senkrecht zur Axe bewegt wird; in jedem andern Falle findet gleichzeitig Gleitung und Drehung statt. Bei dem Uebergange der Linie CF in die Lage LJ wird die Rolle einen Bogen h abwickeln, welcher der senkrechte Abstand dieser beiden Lagen ist; und bei dem Uebergange von der Lage LJ in die Lage LK beschreibt der Berührungspunkt der Rolle D einen Bogen $\varrho\varphi$, wenn $\varrho = CD$ und $\varphi = JLK$ ist. Die Gesammtabwickelung von der ersten zur zweiten Lage ist somit $= h + \varrho\varphi$ und von der ersten Lage bis wieder zur ersten, wobei die ganze Figur umfahren wird, gleich

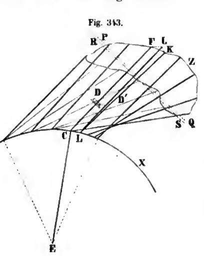


Fig. 343.

$$u = \Sigma h + \Sigma\varrho\varphi \quad . \quad (286)$$

Die Grössen h und φ sind positiv oder negativ, je nachdem es die Flächenelemente p und s sind, und der Abstand ϱ wird negativ, wenn die Rolle D auf der Verlängerung von FC, also von F weiter abliegt. Für den einen Fall, wo der Pol E ausserhalb der Figur Z liegt, Fig. 343, ist $\Sigma s = 0$, da der constante Halbmesser aller Sectoren, die Gerade CF, gerade so viel Drehungen im positiven als negativem Sinne gemacht hat, sobald er in seine erste Lage zurückgekehrt ist. Es wird somit für diesen Fall

$$J = \Sigma p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (287)$$

und da auch $\Sigma\varphi = 0$, also $\Sigma\varrho\varphi = \varrho\Sigma\varphi = 0$ ist,

$$u = \Sigma h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (288)$$

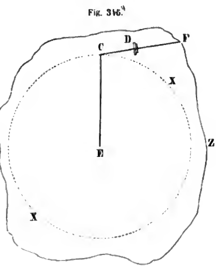
Multiplicirt man diese Gleichung mit der constanten Grösse von $CF = r$, so kommt

$$r u = \Sigma r h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (289)$$

und da r die Grundlinie, h aber die Höhe jedes Parallelogramms p bezeichnet, somit $r h = p$ ist, so folgt weiter

$$J = r u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (290)$$

d. h. die von dem Punkte F umschriebene Fläche ist gleich einem Rechtecke, welches die constante Länge r der beweglichen Geraden CF zur Grundlinie und den von der Rolle D während der Bewegung abgewickelten Bogen u zur Höhe hat; mit anderen Worten: der abgewickelte Bogen der Rolle D ist dem Inhalte der umfahrenen Fläche proportional.



In dem andern Falle, wo der Pol E innerhalb der Figur Z liegt, macht die Gerade CF bis zu ihrer Rückkehr in die Anfangslage eine ganze Umdrehung, während sie in dem ersten Falle ebenso viele positive als negative Drehungen vollführte. Die von den Punkten F und C (Fig. 344) beschriebenen Curven Z und X, von denen die letztere ein Kreis ist, schliessen demnach die Fläche ein, welche durch die Summe $\Sigma p + \Sigma s$ ausgedrückt ist, und es ist desshalb, wenn $EC = R$ gesetzt wird,

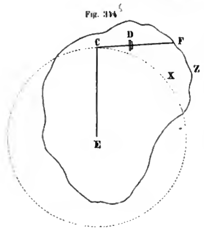
$$J - R^2 \pi = \Sigma p + \Sigma s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (291)$$

Diese Gleichung gilt übrigens nicht bloss für die vorstehende Figur allein, sondern auch dann noch, wenn sich der Kreis X und die Curve Z schneiden, wie dieses in Fig. 345 der Fall ist.

Erwägt man, dass die Gerade $CF = r$ eine ganze Umdrehung macht (der Punkt C z. B. beschreibt den Kreis X), bis sie wieder in ihre erste Lage zurückkehrt, so ist klar, dass die algebraische Summe aller von ihr bis dahin beschriebenen Sectoren (Σs) eine Kreisfläche vom Halbmesser r und daher $\Sigma s = r^2 \pi$ ist.

Die letzte Gleichung geht somit über in

$$J - R^2\pi = r^2\pi + \Sigma p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (292)$$



Der Ausdruck $\Sigma\varrho\varphi$ in der Gleichung (286), welche hier unverändert gilt, ändert sich, da die Summe aller Drehungen 360° beträgt, in $\varrho\Sigma\varphi = 2\varrho\pi$ und somit die Gleichung (286) selbst in

$$u = \Sigma h + 2\varrho\pi \quad (293)$$

ab. Durch Multiplication mit r und Substitution des Werthes Σp für $\Sigma r h$ erhält man hieraus:

$$r u = \Sigma p + 2 r \varrho \pi,$$

und wenn man wiederum den Werth von $\Sigma p = r u - 2 r \varrho \pi$ in Gleichung (292) setzt und

$$R^2 + r^2 - 2 r \varrho = c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (294)$$

schreibt, so folgt schliesslich der Inhalt der Curve L oder

$$J = c\pi + r u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (295)$$

d. h. befindet sich der Pol E innerhalb der umfahrenen Fläche, so ist diese gleich einer constanten Fläche ($c\pi$) plus einem Rechtecke, dessen Inhalt dem von der Rolle abgewickelten Bogen (u) proportional ist.

In diesem und dem aus Gleichung (290) gefolgerten Satze ist die Theorie des Polarplanimeters enthalten; ihre weitere Entwicklung würde aber hier zu weit führen. Nur das sey noch kurz erwähnt, dass man die Länge r des Stabes CF dadurch findet, dass man das Produkt rv, in welchem v den Umfang der Rolle D vorstellt, der Fläche f gleich setzt, welche eine ganze Umdrehung der Rolle vorstellen soll. Würden demnach r und v in Pariser Zollen ausgedrückt seyn und sollte eine Umdrehung f □Zollen entsprechen, so hätte man

$$r v = f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (296)$$

zu setzen und hieraus r zu suchen. Nimmt man r im Voraus an, so bestimmt sich darnach v. Ist aber v gegeben und ändert sich dieser Umfang mit der Zeit etwas, so darf man nur r etwas grösser machen, d. h. den Strich auf dem Stabe A etwas von F wegrücken.

§. 294.

Genauigkeit. Ueber die Genauigkeit des Polarplanimeters liegen noch keine ausreichenden Erfahrungen vor, wie wir diese über die Linearplanimeter besitzen. Der Verfasser hat zwar im Herbste 1855 mit einem Amsler'schen Planimeter einige Versuche gemacht und die gemessenen Flächen bis auf ein drittel Procent ihres Inhalts genau erhalten; er will aber aus diesem Ergebnisse kein definitives Urtheil über die Genauigkeit des Polarplanimeters ableiten, da der zu den Versuchen verwandte Planimeter nach den Angaben des Erfinders nicht mit aller Sorgfalt gearbeitet war. In Wien hat man mit dem in der Anmerkung auf Seite 159 genannten Planimeter, der sich von dem Amsler'schen bloss dadurch unterscheidet, dass der Pol (E) nicht durch einen Nadeleinsatz, sondern durch einen ziemlich schweren Metallcylinder bestimmt wird, ungefähr dasselbe Resultat erhalten; dagegen führt Amsler über die Genauigkeit seiner Planimeter an: „Man betrachtete die Instrumente als fertig, sobald sie die wircklich umfahrene Fläche bis auf $^1/_{1000}$ genau angaben; dass aber eine bedeutend grössere Genauigkeit erreichbar wäre, zeigt schon die Vergleichung des Polarplanimeters mit dem Wetli'schen Planimeter, indem bei jenem mehrere Fehlerquellen wegfallen, die das letztere besitzt.“ Wie dem aber auch sey, so viel steht fest, dass der Amsler'sche Polarplanimeter für die meisten praktischen Zwecke eine hinreichende Genauigkeit gewährt und daher wegen seiner Einfachheit und Wohlfeilheit sehr zu empfehlen ist.

3) Die geometrische Vertheilung der Grundstücke.

§. 295.

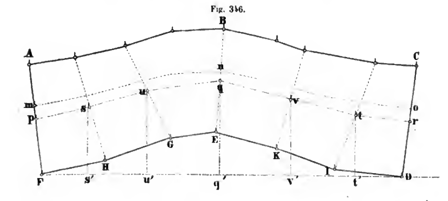
Die Theilung eines Grundstückes wird nöthig, wenn von diesem für irgend einen Zweck ein Stück von gegebenem Flächeninhalte abzuschneiden ist, oder wenn mehrere Eigenthümer einer Parzelle ihre Antheile sondern wollen, oder wenn die krumme, oder vielfältig gebrochene Grenze zweier Grundstücke in eine geradlinige verwandelt werden soll.

Für diese Theilungen sind entweder bestimmte Richtungen und Formen der Grenzen vorgeschrieben, oder es dürfen die neuen Grenzen in soweit beliebig gewählt werden, als sie den Zugang zu den abgetheilten Parzellen nicht erschweren. Ferner können Theilungen vorkommen bei Grundstücken von gleichem Werthe der Flächeneinheit,

d. i. von gleicher Bonität, oder bei Grundstücken von ungleicher Bonität. In diesem Falle wird also für die Theilung nicht die Fläche allein, sondern das Produkt aus dem Flächeninhalte und dem Preisse der Flächeneinheit oder der Werth des Grundstücks massgebend seyn. Endlich kann die Theilung auf Grund eines vorliegenden genauen Plans des Grundstücks oder ohne diesen durch unmittelbare Messung auf dem Felde zu vollziehen seyn.

Hienach liesse sich eine grosse Reihe von Aufgaben bilden; wir werden uns aber auf wenige beschränken, da sich das Princip, welches bei diesen Theilungen zu befolgen ist, leicht aussprechen und ausführen lässt; es besteht nämlich darin: *alle hieher gehörigen Aufgaben versuchsweise zu lösen und die ersten Lösungen so lange zu verbessern, bis den gestellten Bedingungen innerhalb der nothwendigen Genauigkeitsgrenzen genügt ist.* Soll hiernach z. B. ein Grundstück ABCDEF (Fig. 346) von gleicher Bonität in zwei gleiche Theile so getheilt werden, dass die neuen Grenzen den alten nahezu parallel

Fig. 346.



laufen, so wird man erst eine Linie mno als Theilungslinie annehmen und die beiden Flächen rechts und links dieser Linie aus dem Kettenmasse berechnen. Sind f_1 und f_2 die gefundenen Flächeninhalte, so ist die Gesammtfläche $f_1 + f_2 = 2f$ und folglich die Grösse eines gesuchten Theils $= f$, daher der eine bereits abgesteckte Theil (Bn) um $d = f - f_1$ zu klein und der andere (En) um $d = f_2 - f$ zu gross. Misst man nun die Linie mno auf dem Felde und findet ihre horizontale Länge $= l$, so muss der Streifen pqr

$= d$, um welchen f_1 zu vergrössern und f_2 zu verkleinern ist, eine Breite b erhalten, welche sich aus der Gleichung

$$d = bl$$

ergibt. Trägt man diese Breite von mno aus mehrmals ab, so wird die nunmehr abgesteckte Linie psuqvtr der gestellten Aufgabe genügen.

Wäre das zu theilende Grundstück genau gezeichnet gewesen, so hätte man die vorläufige Theilungslinie mno in dem Plane angedeutet und die Flächen f_1 und f_2 entweder mit Zirkel und Massstab oder mit dem Planimeter gemessen und hierauf den Streifen mnorqp wie vorhin bestimmt. Alsdann hätte man die Abstände Ap, pF, Cr, rD aus dem Plane entnommen, um hiernach die Punkte p und r auf das Feld überzutragen, und schliesslich würde man die Punkte, s, u, q, v, t der Theilungslinie durch Abscissen und Ordinaten, welche in Bezug auf die Axe FD aus der Zeichnung abgegriffen wurden, auf dem Felde ausgesteckt haben.

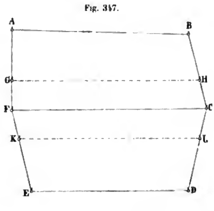
Sind die zu theilenden Figuren Dreiecke oder Trapeze, so lassen sich bei der Theilung wohl auch die Constructionen anwenden, welche die ebene Geometrie lehrt; erfahrungsgemäss führt aber auch hier die Lösung durch Versuche meist schneller zum Ziele.

§. 296.

Aufgabe. Zwei aneinander stossende Grundstücke von verschiedener aber bekannter Bonität sollen in drei Theile getheilt werden, welche ihrem Werthe nach in einem gegebenen Verhältnisse stehen.

Es seyen AC und FD (Fig. 347) die beiden Grundstücke, der Werth w_1 des ersten $= f_1 b_1$ und der des zweiten $w_2 = f_2 b_2$, wobei f den Flächeninhalt und b den Preis der Flächeneinheit (die Bonität) bezeichnet. Stellen GH und KJ die Theilungslinien vor, so soll sich der Werth von AH : GJ : KD verhalten wie m : n : p.

Fig. 347.



Der zu theilende Werth ist offenbar

$$w_1 + w_2 = f_1 b_1 + f_2 b_2 = W$$

und es trifft desshalb, wenn man $m + n + p = N$ setzt, nach den Regeln der Gesellschaftsrechnung auf

$$\text{Nr. 1 der Werth } m\,\frac{W}{N} = v_1,$$

$$\text{Nr. 2 \quad " \quad " \quad } n\,\frac{W}{N} = v_2,$$

$$\text{Nr. 3 \quad " \quad " \quad } p\,\frac{W}{N} = v_3.$$

Zeigt sich, dass die Fläche f' des Theils ABHG kleiner wird als f_1, so kann der erste Theil lediglich die Bonität b_1 haben und es wird desshalb f' aus der Gleichung gefunden:

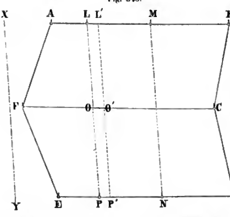
$$f' = \frac{v_1}{b_1} = \frac{m W}{b_1 N}.$$

In gleicher Weise erhält man, wenn die Fläche f'' des dritten Theils DEKJ von f_2 abgeschnitten werden kann,

$$f'' = \frac{v_3}{b_2} = \frac{p W}{b_2 N},$$

und es bleibt folglich für den zweiten Theil JHGK übrig: von dem Grundstück der Bonität b_1 die Fläche $f_1 - f'$ und von der Bonität b_2 die Fläche $f_2 - f''$. Sind die Flächen f' und f'' bestimmt, so lassen sich selbstverständlich die Linien GH und KJ leicht berechnen und abstecken.

Fig. 348.



Sollen die Theilungslinien (LP, MN) einer gegebenen Richtung XY parallel laufen und die gemeinsame Grenze der beiden zu theilenden Grundstücke schneiden, wie in Fig. 348, so ziehe man erst L'P' so, dass die beiden Abschnitte AO', O'E dem Werthe v_1 nahezu entsprechen; da aber, wenn φ_1 die Fläche AO' und φ_2 die Fläche FP' bezeichnet, der Werth

$$\varphi_1 b_1 + \varphi_2 b_2 >< v_1$$

seyn wird, so muss die Differenz

$$\varphi_1 b_1 + \varphi_2 b_2 - v_1 = \Delta,$$

welche positiv oder negativ seyn kann, ausgeglichen werden. Ist dieselbe positiv, so fällt die wahre Theilungslinie LP links von der vorläufig angenommenen L'P', ausserdem rechts. Um den Abstand beider = δ zu finden kann man folgende Rechnung anstellen. Es muss offenbar, wenn L'O' = l_1 und O'P' = l_2 gesetzt wird, sehr nahe

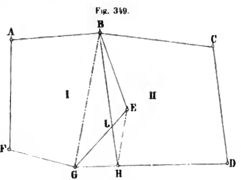
$$\delta (l_1 b_1 + l_2 b_2) = \Delta$$

seyn. Hat man nun hieraus δ gefunden, so ziehe man in dem Abstande δ eine Parallele zu L'P', womit der erste Theil abgeschnitten ist. Ebenso verfahre man mit dem zweiten Theile; der dritte ergibt sich dann von selbst.

§. 297.

Aufgabe. Zwei aneinander stossende Grundstücke von gleicher Bonität haben eine gebrochene Grenze; man soll dieselbe ohne Aenderung des Flächeninhalts in eine geradlinige verwandeln.

Fig. 349.



Es sey BEG (Fig. 349) die zu verbessernde Grenze, und es soll die neue durch B gehen. Denkt man sich die Linie BG und zu ihr durch die Ecke E die Parallele EH gezogen, bezeichnet den Punkt H und verbindet ihn durch einen Grenzgraben oder Markstein mit B, so ist die Aufgabe gelöst. Denn es ist das Dreieck BGE, welches im Grundstücke I liegt, dem Dreiecke BGH, das beiden Grundstücken angehört, gleich, weil beide gleiche Grundlinie und Höhe haben; kommt nun BGH statt BGE zu dem Grundstücke I, so bleibt dessen Flächeninhalt unverändert, während es die geradlinige Grenze BH erhält; und da zum Grundstücke II für das abgeschnittene Stück GJH das gleichgrosse BJE hinzugefügt wird, so bleibt selbstverständlich auch dessen Flächengrösse die frühere.

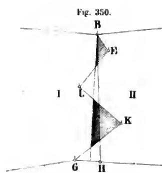


Fig. 350.

Ist die zu verbessernde Grenze wie in Fig. 350 mehrmals gebrochen, so wird man erst eine provisorische Linie BH ziehen und aus dem Kettenmasse oder der Zeichnung berechnen, ob die vom Grundstücke I abgeschnittenen (hier schraffirten) Flächengrössen den von II abgetrennten gleich sind oder nicht. Sind die ersteren etwas zu gross, so rückt man die Theilungslinie BH etwas gegen II vor und vergleicht die neuen Abschnitte. Reicht diese Verlegung noch nicht aus, so wird eine dritte gewiss zum Ziele führen. Ist die neue Grenze ausgemittelt, so wird sie durch Marksteine oder einen Graben auf dem Felde bezeichnet.

Man kann hiernach leicht ermessen, wie zu verfahren ist, wenn die Grundstücke I und II verschiedene Bonitäten haben: es ist nämlich von jedem Grundstücke für das andere so viel an Werth abzuschneiden, als ihm von diesem durch die geradlinige Grenze zugelegt wird.

D. Messung eines ganzen Landes.

§. 289.

Der Zweck einer Landesvermessung besteht entweder in der Herstellung von Plänen, aus denen sich die Grenzen und Flächen der einzelnen Grundstücke mit hinreichender Genauigkeit entnehmen lassen, oder in der Anfertigung von Karten, welche die Lage und Grösse der vorzüglichsten natürlichen und künstlichen Bildungen der Bodenfläche angeben. Wird der erstere Zweck verfolgt, so muss die Messung sehr ins Einzelne gehen und in einem grossen Massstabe (1 : 1000 bis 1 : 5000) vorgenommen werden; in dem andern Falle aber genügt eine weniger detaillirte Aufnahme und ein kleinerer Massstab (1 : 20000 bis 1 : 100000).

Sehr ausführliche Landesvermessungen werden hauptsächlich in der Absicht gemacht, um sie als Basis für die Anlage der Grundsteuer oder der Steuerkataster zu benützen; die hiefür angefertigten Pläne (Steuerblätter) dienen aber auch zu verschiedenen anderen staatswirthschaftlichen und technischen Zwecken. Dagegen sind die

weniger ausführlichen topographischen Messungen vorzugsweise für militärische und geographische Zwecke geeignet. Hier ist nur von der Herstellung der Katasterpläne die Rede, da topographische Karten einerseits aus diesen Plänen construirt, andrerseits aber nach denselben Principien wie Steuerblätter aufgenommen werden können.

Wenn es schon für die Aufnahme einer kleineren Fläche, z. B. eines Flurbezirks, nöthig ist, mehrere Hauptpunkte durch ein Vieleck festzulegen, um daran die Detailmessung zu knüpfen; so ist die Herstellung eines genauen Netzes von Linien, wodurch man eine grosse Anzahl gut bestimmter Punkte erhält, für eine Landesvermessung erste Bedingung. Dieses aus Dreiecken bestehende Netz liefert für sich die gegenseitige Lage aller ihm selbst angehörigen Punkte, und in Verbindung mit der Detailaufnahme auch die gegenseitige Lage aller Terrainpunkte. Dieses Resultat genügt aber noch nicht; man will vielmehr auch wissen, wie alle wichtigeren Punkte des Landes gegen den Aequator und einen bestimmten Meridian der Erde gelegen sind, mit anderen Worten: man will die geographische Breite und Länge jedes Punktes kennen.

Die desshalb nöthig erscheinende Orientirung des Dreiecknetzes erfordert, dass man die geographische Lage eines Punktes und einer Seite desselben genau kenne. Diese Daten liefern die Astronomen aus vieljährigen genauen Beobachtungen, wesshalb auch die Sternwarte des zu vermessenden oder eines angrenzenden Landes als astronomischer oder Orientirungspunkt und eine von diesem Punkte ausgehende und mehrere Meilen lange Dreieckseite als Orientirungslinie benützt wird. Diese Bestimmungen setzen wir hier als gegeben voraus und beschäftigen uns demnach nur mit den nachfolgenden technischen Arbeiten einer Landesvermessung, nämlich

1) mit der Feststellung der Basis des Dreiecknetzes,
2) „ „ Auswahl und Bezeichnung der Dreieckpunkte,
3) „ „ Messung der Winkel aller Dreiecke,
4) „ „ Berechnung der Dreiecke jeder Ordnung,
5) „ „ Berechnung der Coordinaten der Netzpunkte,
6) „ „ Bestimmung der geographischen Lage der Netzpunkte,
7) „ „ Verbindung des Netzes und der Messtischblätter,
8) „ „ Aufnahme der Einzelnheiten des Terrains.

1) Die Basis des Dreiecknetzes.

§. 299.

Da genaue Längenmessungen sehr mühsame und kostspielige Arbeiten sind, gute Winkelmessungen dagegen verhältnissmässig leicht ausgeführt werden können, so legt man dem Dreiecknetze, womit das zu vermessende Land überzogen werden muss, nur eine einzige wirklich gemessene Linie zu Grunde, welche desshalb die Basis des Netzes genannt wird. Diese Linie ist eine Seite eines der grössten Netzdreiecke oder eines Dreiecks erster Ordnung. Aus dieser Seite und den drei unmittelbar gemessenen Winkeln des ihr angehörigen Dreieckes findet man die beiden anderen Seiten dieses Dreiecks durch Rechnung; mit den nun bekannten neuen Seiten und den zugehörigen Winkeln kann man wieder zwei andere Dreiecke berechnen, hiermit abermals vier neue anstossende Dreiecke, und so kann man fortfahren, bis alle Dreiecke berechnet sind.

Da von der Genauigkeit der Basismessung die Genauigkeit des Dreiecknetzes abhängt, so wird man für dieselbe ein ebenes und festes Terrain wählen, welches eine sichere Messung und das Anvisiren einiger Punkte des Hauptnetzes gestattet. Man wird dieselbe 1 bis 2 Meilen lang machen und an ihren Endpunkten durch massive Signale, wie solche in §. 84 beschrieben sind, genau und dauerhaft bezeichnen. Ist dieses geschehen, so nimmt man die Messung mit genau abgeglichenen Messstangen nach dem in §. 248 auseinander gesetzten Verfahren vor und reducirt die gefundene Länge in der daselbst angegebenen Weise auf den Horizont.

Die so gefundene Basis B ist (nach dem oben angeführten Paragraph und unter der Voraussetzung, dass die Erde eine Kugel sey) ein Kreisbogen vom Halbmesser

$$R = r + \tfrac{1}{2}(f + f'),$$

wobei r den Erdhalbmesser bis zum Meeresspiegel, f die Höhe des einen und f' die Höhe des anderen Endpunktes der Basis über dem Meere bezeichnet.

Schliesst man das Dreiecknetz an die Basis B an, so liegt dasselbe auf einer Kugel von dem Halbmesser R. Hat man in einem Nachbar-Lande die Basis B' gemessen, welche einem Kugelhalbmesser R' angehört, und denkt man sich die von beiden Basen

ausgehenden Dreiecknetze an der Landesgrenze durch gemeinschaftliche Signale aneinander gefügt, so ist klar, dass bei aller Genauigkeit der Messung die sphärischen Dreiecksseiten, welche den Schluss bilden, aus beiden Netzen verschieden erhalten werden, weil ihrer Berechnung das eine Mal eine Kugel vom Halbmesser R und das andere Mal eine Kugel vom Halbmesser R' zu Grunde liegt. Jene Dreiecksseiten werden aber in gleicher Grösse gefunden, wenn man die beiden Netze auf eine und dieselbe Kugel projicirt, wozu sich die Meeresfläche am bessten eignet. Diese Projection erhält man aber, wenn man die bereits auf den Horizont reducirte Basis noch weiter auf den Meeresspiegel reducirt. Ist B Basis auf der Kugel vom Halbmesser R und b die auf der Meeresfläche reducirte Basis, so hat man offenbar $B : b = R : r$ und hieraus

$$b = \frac{r}{R} B = \frac{r}{r + h} B,$$

wobei $R = r + \frac{1}{2}(f + f') = r + h$ gesetzt ist.

Die Reductionsgrösse oder die Länge β, welche von B abzuziehen ist, um b zu finden, wird zunächst gleich

$$\beta = B - b = B\left(1 - \frac{r}{r + h}\right) = \frac{Bh}{r + h};$$

dividirt man aber mit $r + h$ in h und bedenkt, dass der grösste Werth des Bruches $\frac{h}{r}$ höchstens $\frac{1}{9000}$ und somit $\left(\frac{h}{r}\right)^2$ höchstens $\frac{1}{81000000}$ beträgt, so kann man geradezu

$$\beta = \frac{h}{r} B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (297)$$

setzen. Betrüge z. B. die Länge einer auf den Horizont reducirten Basis, welche in einer Höhe von 326,66 Toisen oder 1959,96 Pariser Fuss über dem Meere liegt, 5470,34 Toisen oder 32822,04 Pariser Fuss, so wäre (da nach §. 3 der Halbmesser = 3266608 Toisen)

$$\beta = \frac{1}{10\,000} \cdot 5470{,}34 = 0{,}547034 \text{ Toisen} = 3{,}2822 \text{ P. Fuss.}$$

Hätte man das zweite Glied der Reihe für $\frac{h}{r + h}$ noch berücksichtigt, so würde der Werth von β nur um 0,03 Linien kleiner und folglich die reducirte Basis um eben so viel grösser geworden seyn.

Die Reduction der Basis auf die Meeresfläche wird hauptsächlich

nur der Vergleichung wegen mit anderen Triangulationen vorgenommen; ob man diese Fläche selbst als Projectionsfläche des Netzes ansehen will, hängt von der Höhenlage des zu vermessenden Landes ab. Ist dieses tief gelegen, so kann man das Netz sofort auf die Meeresfläche projiciren; liegt das Land aber hoch, so wählt man eine bis zur mittleren Höhenlage desselben Landes reichende Kugelfläche als Projectionsfläche. In Württemberg z. B. lag die zwischen dem Schlosse Solitude und der Stadt Ludwigsburg gemessene Basis 1019 P. Fuss über dem Meere; da aber der mittleren Höhe des Landes nur etwa 840 P. Fuss oder 140 Toisen entsprechen, so hat man für die gesammte Landesvermessung eine Kugelfläche von dem Halbmesser $r + h = 3266608 + 140 = 3266748$ Toisen angenommen.

2) Die Wahl und Bezeichnung der Netzpunkte.

§. 300.

Das Netz, womit ein zu vermessendes Land überzogen wird, besteht aus grossen, mittleren und kleinen Dreiecken, welche man der Reihe nach Dreiecke erster, zweiter und dritter Ordnung nennt.

Die Dreiecke erster Ordnung sollen nur eine geringe Anzahl sehr genau bestimmter, aber das ganze Land umfassender Punkte liefern, wesshalb sie Seiten bis zu 10 Meilen Länge haben können. Die kleinsten Seiten werden selten weniger als drei Meilen betragen. Wegen des Einflusses der unvermeidlichen Messungsfehler wird man es selbstverständlich zu vermeiden suchen, dass eine kleinste und eine grösste Seite in einem und demselben Dreiecke zusammentreffen; denn jener Einfluss wird nach dem §. 270 am kleinsten, wenn die Dreiecke so viel als möglich gleichseitig sind. Für die Controle der Messung und Rechnung und auch für die Ausgleichung der zufälligen Fehler ist es sehr gut, wenn man die Dreiecke erster Ordnung so an die Basis anschliesst, dass das Netz auf mehrere Arten durchgerechnet werden kann.

Die Dreiecke zweiter Ordnung werden mit denen der ersten Ordnung verbunden, was entweder an Eckpunkten oder Seiten erster Ordnung geschieht. Für die Wahl dieser Dreiecke ist der Umstand massgebend, dass man von ihren Winkelscheiteln aus die bemerkenswerthesten Punkte, welche sie einschliessen, sehen soll.

Da man diese im Flachlande leichter auf grosse Entfernungen hin übersehen kann, als in durchschnittenem Terrain, so ist klar, dass in diesem die Dreiecke zweiter Ordnung kleiner seyn werden als in jenem; und da manchmal auch ein Dreieck erster Ordnung alle Hauptpunkte seiner Fläche zu übersehen gestattet, so leuchtet ein, dass an ein solches Dreieck kein Dreieck zweiter Ordnung angeknüpft zu werden braucht.

Die Dreiecke dritter Ordnung schliessen sich an jene der zweiten Ordnung so an, dass jedes der ersteren eine Seite und als dritten Winkelpunkt einen hervorragenden Gegenstand der Fläche eines Dreieckes zweiter Ordnung enthält. Als dritte Winkelpunkte dienen natürliche Signale, wie Kirchthurmspitzen, hohe Schornsteine, einzelnstehende Bäume u. dgl. Da auf diesen Punkten die Winkel der Dreiecke nicht gemessen werden können, so ist es nöthig, jene Punkte so zu wählen, dass sie von wenigstens drei Punkten erster und zweiter Ordnung gesehen und anvisirt werden können.

Die Signale zur Bezeichnung der Netzpunkte sind entweder künstliche oder natürliche. Für die Dreiecke erster Ordnung eignen sich nur solche Signale, welche eine sichere Winkelmessung gestatten, also Steinpfeiler oder Pyramiden, wie sie in §. 84 beschrieben sind. Findet sich eine hochgelegene Ruine vor, welche einen würfelförmigen Stein mit Metallcylinder, der den Punkt bezeichnet, zu befestigen gestattet, so kann man auch diese als Grundbau für ein Signal erster Ordnung benützen. Sind diese Signale sehr weit entfernt, so macht man sie durch Heliotropenlicht leicht sichtbar. Für Punkte zweiter Ordnung genügt ein in dem Boden befestigter Steinwürfel, auf dessen Oberfläche der Punkt durch einen Kreuzschnitt bezeichnet ist und über dem sich eine Pyramide erhebt, welche einen entsprechenden Visirbalken enthält (§. 85). Von den Dreieckpunkten dritter Ordnung sind immer zwei zugleich Punkte zweiter oder erster Ordnung, während der dritte fast immer ein natürliches Signal ist; muss man aber einen solchen dritten Punkt durch ein künstliches Signal bezeichnen, so kann man dazu einen der auf Seite 138 des ersten Bandes beschriebenen Holzpfeiler wählen.

Die Bezeichnung der Netzpunkte geschieht durch den Namen der Stelle, auf welcher sie sich befinden, z. B. Wendelstein. Peissenberg, Waldstein, Schneeberg, Kornbühl, Waldburg, Stauffen, Planegg u. s. w.

3) Die Messung und Ausgleichung der Winkel.

§. 301.

Die Messung der Winkel des trigonometrischen Netzes geschieht mit den bessten acht- bis zehnzölligen Theodolithen, welche bei Dreieckpunkten erster Ordnung auf steinernen Postamenten, bei Punkten zweiter Ordnung aber auf einem der früher beschriebenen dreibeinigen Stative ruhen, welche zur Sicherheit auf drei in den Boden gerammte Pfähle gestellt und mit Gewichten beschwert werden. Ob die Winkel durch Repetition gemessen werden sollen oder nicht, hängt von der Anordnung des technischen Leiters der ganzen Vermessung ab; bedeutende Astronomen und Geodäten, wie Bessel und Hansen, verwerfen die Repetition und verlangen statt derselben folgendes Verfahren.

Nachdem nämlich der Theodolith centrisch und horizontal aufgestellt ist, wird bei feststehendem Horizontalkreise das Fernrohr nach und nach auf alle einzuschneidenden Dreieckpunkte eingestellt und jeder Nonius des Alhidadenkreises abgelesen. Ist eine solche Reihe von Einstellungen und Ablesungen, welche ein **Gyrus** genannt wird, zu Ende, so dreht man den Horizontalkreis um einen beliebigen Winkel von etwa 20° oder 30° und schlägt das Fernrohr durch. Hierauf stellt man den Horizontalkreis fest, richtet das Fernrohr wieder auf alle vorher anvisirten Signale, jedoch in umgekehrter Ordnung und liest die Nonien ab. Dieser Gyrus korrespondirt dem vorausgegangenen. Auf ihn folgt wieder eine Drehung des Horizontalkreises, das Durchschlagen des Fernrohrs, dessen Einstellung in der ersten Richtung und Ablesen der Nonien. Zu diesem dritten Gyrus wird der korrespondirende vierte gemacht, und so fährt man fort, bis ein Punkt erster Ordnung etwa 60mal, ein Punkt zweiter Ordnung 20mal und ein Punkt dritter Ordnung 8mal gut beobachtet worden ist. Da man von den Punkten eines Dreiecks zweiter Ordnung alle Punkte dritter Ordnung, welche auf der Fläche jenes Dreiecks liegen, sehen kann, so schneidet man die Punkte dritter Ordnung sofort mit denen der zweiten Ordnung ein. Sollten sich jedoch dadurch die anzuvisirenden Punkte sehr häufen, so ist es gut, sie zu theilen und nur etwa 15 Punkte in einen Gyrus aufzunehmen. Bei jedem Gyrus soll man das Fernrohr wieder genau auf den Ausgangspunkt einstellen und, wenn sich hierbei eine

Differenz in der Ablesung von mehr als 5 Sekunden zeigen sollte, den ganzen Gyrus verwerfen.

Alle Beobachtungen sind sofort deutlich in ein Tagebuch einzutragen und zwar mit Tinte. Sollte etwas fehlerhaft geschrieben worden seyn, so ist die Verbesserung so anzubringen, dass man die verbesserte Stelle noch lesen kann. Bei der thüringischen Landesvermessung sind nach der Anordnung Hansen's die Blätter der Beobachtungsbücher mit folgendem Schema bedruckt, das wir zur Erläuterung theilweise ausgefüllt haben.

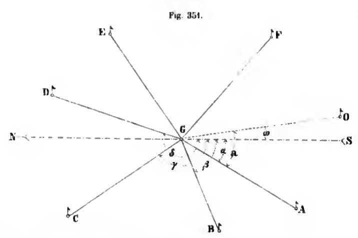
Station: Felsberg. Beobachter: Müller. Instrument: Theodolith Nr. 2.
Instrumenten-Centrum: 20',23. Lage des Fernrohrs: erste. Gyrus Nr. 9.

Des Gegenstandes.		Ablesung.				Mittel.	Richtungs-winkel.	Bemerkungen.
Nr.	Name.	Nonius I.	II.	III	IV.			
VII.	Staufen .	57° 18' 20"	25'2"	18"	22"	57° 18' 21,3"	36° 42' 54"	Luft klar und ruhig.
X.	Brennbühl	121° 53' 47"	50"	45"	51,6"	121° 53' 48,4"	101° 18' 21.1"	Luft klar aber bewegt.

Unter Richtungswinkeln versteht man die Azimuth- oder Horizontalwinkel, welche die Dreieckseiten des Netzes mit der Mittagslinie bilden. Man zählt diese Winkel in der Regel von dem Südpunkte der genannten Linie an über Westen durch den ganzen Horizont bis zu 360°. Soll nun aus dem Mittel der Ablesungen, welches für den Nonius I berechnet und eingetragen ist, der Richtungswinkel einer Seite gefunden werden, so geschieht dieses am einfachsten durch Addition oder Subtraction eines dem Gyrus angehörigen constanten Winkels in folgender Weise.

Sind A, B, C, D, E (Fig. 351) die von G aus eingeschnittenen Punkte und bezeichnen a, b, c, d, e die für diese Punkte geltenden Mittel der Ablesungen; weiss man ferner, dass das Azimuth der Seite GA oder der Horizontalwinkel $SGA = \alpha$ ist, so wird die Ablesung a auf α gebracht werden, wenn man von ihr den constanten Winkel $\omega = a - \alpha$ abzieht. (In dem vorstehenden Schema ist $\alpha = 36^0 42' 54''$, $a = 57^0 18' 21{,}3''$ und $\omega = 20^0 35' 27'',3$.) Durch Subtraction des Winkels ω von dem Mittel b liefert dieses dann aber

Fig. 351.



auch die Richtungswinkel JGB, sowie $c - \omega = SGC$, $d - w = SGD$ und $e - \omega = SGE$ ist.

Das Azimuth α der Seite GA ist bei der Winkelmessung noch nicht genau bekannt, aber es lässt sich doch annähernd bestimmen, indem man durch Beobachtung der Sonne oder auf eine andere später anzugebende Weise die Richtung der Mittagslinie aufsucht. Kennt man α näherungsweise, so folgt daraus mit demselben Grad der Genauigkeit auch der Winkel ω. Werden die Messungen auf einem und demselben Standpunkte später wiederholt und hat man unterdessen das Azimuth der Seite GA genauer kennen gelernt, so behält man doch den ersten Werth von α bei, weil diese erste Bestimmung der Richtungswinkel lediglich den Zweck hat, die Messungsresultate der verschiedenen Gyren mit einander zu vergleichen. Bei der definitiven Berechnung des Netzes werden die früher gefundenen Richtungswinkel selbstverständlich verbessert.

Kommt es vor, dass sich bei der Winkelmessung der Theodolith nicht centrisch aufstellen lässt, so müssen die gemessenen Winkel nach §. 253 centrirt, d. h. um die in den Formeln (238) und (239) bestimmte Grösse δ verbessert werden. Um aber die Centrirung δ berechnen zu können, muss man die horizontale Entfernung e der Alhidadenaxe von der Axe des Stationspunktes wissen, wesshalb die Grösse e zu messen und neben der Bezeichnung „Instrumentencentrum" in das Beobachtungsjournal einzuschreiben ist. Ausserdem hat man auch den Stationspunkt anzuvisiren und in dem Gyrus aufzunehmen. Ist dieser Punkt so nahe gelegen, dass man

die Ocularröhre nicht weit genug ausziehen kann, um ihn zu sehen, so ist es nöthig, auf dem Theodolithenfernrohr ein Diopter anzubringen, wie dergleichen auf den Fernrohren der Kippregel und des Reichenbach'schen Distanzmessers (Fig. 111 und 183 auf S. 182 und 134 des I. Bandes) zu sehen sind. Die Visirlinie dieses Diopters soll mit der des Fernrohrs in einer zum Horizontalkreise senkrechten Ebene liegen. Will man die hiefür nothwendige Prüfung und Berichtigung nicht vornehmen, so genügt es, auf einen entfernteren, jedoch mit dem Diopter noch gut einzuschneidenden Gegenstand nach einander das Diopter und das Fernrohr einzustellen, jedesmal die Nonien des Horizontalkreises abzulesen und hierdurch den Winkel zu bestimmen, um welchen die zur Einstellung des Diopters auf den Stationspunkt gehörige Ablesung verbessert werden muss. Wenn diese Einstellung auch nicht so scharf als die des Fernrohrs auf die entfernteren Punkte ist, so hat dieses wegen des geringen Werthes der Excentricität e keine nachtheiligen Folgen. Bei grösseren Werthen von e gebraucht man das Diopter ohnehin nicht.

Ueber die Ausgleichung der unvermeidlichen Beobachtungsfehler in den Richtungswinkeln der einzelnen Dreiecksseiten, welche nach Vollendung der Winkelmessungen vorzunehmen ist, findet man vollständige Belehrung in Gerling's „Ausgleichungsrechnungen der praktischen Geometrie“, Hamburg und Gotha 1843, auf die wir hiermit verweisen. Mit Bezug auf das in §. 268 bereits gegebene Beispiel einer Ausgleichungsrechnung ist hier nur noch zu bemerken, dass man auf jedem Netzpunkte einen sogenannten Horizontalabschluss macht, d. h. die Summe aller im Kreise herum gemessenen Winkel auf 360° ausgleicht. Haben alle Beobachtungen eines Gyrus gleiche Genauigkeit, so vertheilt man die Differenz zwischen der gefundenen Winkelsumme und 360° gleichheitlich, ausserdem aber nach der in §. 268 durch ein Beispiel erläuterten Methode der kleinsten Quadrate.

4) Die Berechnung der Dreieckseiten.

§. 302.

Schon die Ausgleichung der Winkel eines Dreiecks erster Ordnung, welches immer als ein sphärisches zu betrachten ist, erfordert eine Berechnung der Dreieckseiten, weil in dem Ausdrucke für den sphärischen Excess eines Dreiecks zwei Seiten desselben vorkommen;

men; Hauptzweck der Seitenberechnung aber ist die Bestimmung der gegenseitigen und geographischen Lage der Netzpunkte. Für den ersteren Zweck genügt eine annähernde (provisorische), für den letzteren aber nur eine genaue (definitive) Berechnung. Bei der provisorischen Berechnung der Dreieckseiten zum Behufe der Winkelausgleichung und Centrirung der Winkel setzt man in die entsprechenden trigonometrischen Formeln die Dreieckwinkel so ein, wie sie aus der Messung hervorgingen, also noch mit den zufälligen Fehlern behaftet; bei der definitiven Seitenberechnung aber werden nur die verbesserten Winkel angewendet.

Geht man bei der Berechnung der Dreiecke erster Ordnung, wie es seyn muss, von der unmittelbar gemessenen Basis aus, so hat man in dem ersten Dreiecke diese auf das Niveau der Messung reducirte (sphärische) Basis und die drei Winkel, deren Summe auf $180^0 + \varepsilon$ ausgeglichen ist, wobei ε den sphärischen Excess (§. 267) bezeichnet. Man kann somit die zwei anderen sphärischen Seiten des ersten Dreiecks entweder nach dem bekannten Satze über die Proportionalität der Sinusse der Seiten und Gegenwinkel, oder auch aus der ebenfalls sehr bekannten Relation zwischen einer Seite und den ihr anliegenden Winkeln berechnen. Diese Formeln wendet man aber in der Regel nicht an, sondern bedient sich statt derselben des nachfolgenden Lehrsatzes von Legendre, welcher es möglich macht, die sphärischen geodätischen Dreiecke wie ebene zu berechnen. Statt des Legendre'schen Satzes könnte auch ein von Delambre angegebenes Verfahren angewendet werden, wonach jede Bogenseite auf ihre Sehne und jeder sphärische Winkel auf den Sehnenwinkel reducirt wird; allein dieses Verfahren ist viel umständlicher als das nachfolgende, wesshalb wir es hier nicht weiter berühren wollen.

§. 303.

Lehrsatz. Ein geodätisches Dreieck darf wie ein ebenes behandelt werden, wenn man jeden seiner Winkel um den dritten Theil des sphärischen Excesses vermindert.

Der nachfolgende Beweis rührt von Gauss her und ist in Crelle's Journal der Mathematik, Bd. 22, S. 96. enthalten.

Bezeichnet man den ganzen sphärischen Excess eines Kugel-

Dreiecks mit 3ω, die Winkel dieses Dreiecks mit $A + \omega$, $B + \omega$, $C + \omega$ und die gegenüberliegenden Seiten beziehlich mit a, b, c, so erhalten ein paar Formeln der sphärischen Trigonometrie folgende Gestalt:

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}a = \frac{\sin \tfrac{3}{2}\omega \sin (A - \tfrac{1}{2}\omega)}{\sin (B + \omega) \sin (C + \omega)}$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}a = \frac{\sin (B - \tfrac{1}{2}\omega) \sin (C - \tfrac{1}{2}\omega)}{\sin (B + \omega) \sin (C + \omega)}.$$

Aus der Verbindung dieser Formeln durch Potenzirung und Division folgt:

$$\frac{\sin^6 \tfrac{1}{2}a}{\cos^2 \tfrac{1}{2}a} = \frac{\sin^3 (\tfrac{3}{2}\omega) \sin^3 (A - \tfrac{1}{2}\omega)}{\sin^2 (B + \omega) \sin (B - \tfrac{1}{2}\omega) \sin^2 (C + \omega) \sin (C - \tfrac{1}{2}\omega)}$$

$$\frac{\sin^6 \tfrac{1}{2}b}{\cos^2 \tfrac{1}{2}b} = \frac{\sin^3 (\tfrac{3}{2}\omega) \sin^3 (B - \tfrac{1}{2}\omega)}{\sin^2 (A + \omega) \sin (A - \tfrac{1}{2}\omega) \sin^2 (C + \omega) \sin (C - \tfrac{1}{2}\omega)}.$$

Dividirt man diese Gleichungen in einander und zieht aus dem Quotienten die Quadratwurzel, so ergibt sich

$$\frac{\sin^3 (\tfrac{1}{2}a) \cos (\tfrac{1}{2}b)}{\cos \tfrac{1}{2}a \sin^3 (\tfrac{1}{2}b)} = \frac{\sin (A + \omega) \sin^2 (A - \tfrac{1}{2}\omega)}{\sin (B + \omega) \sin^2 (B - \tfrac{1}{2}\omega)}.$$

Macht man die linke Seite dieser Gleichung durch Division gleich 1 und multiplicirt beide Seiten mit dem Cubus des Verhältnisses von $a \sin B : b \sin A$, so erhält man

$$\left(\frac{a \sin B}{b \sin A}\right)^3 = \frac{a^3 \cos \tfrac{1}{2}a \sin^3 (\tfrac{1}{2}b)}{b^3 \sin^3 (\tfrac{1}{2}a) \cos \tfrac{1}{2}b} \times$$

$$\frac{\sin (A + \omega) \sin^2 (A - \tfrac{1}{2}\omega)}{\sin^3 A} \cdot \frac{\sin^3 B}{\sin (B + \omega) \sin^2 (B - \tfrac{1}{2}\omega)} \times$$

und somit, wenn man die rechte Seite dieser Gleichung $= D$ setzt,

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} \sqrt[3]{D} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (298)$$

Diese Formel ist strenge richtig und gilt für jedes sphärische Dreieck; geht man aber auf ein geodätisches Dreieck über, dessen Seiten im Vergleich zum Erdhalbmesser sehr klein sind (indem sie in der Regel kaum den tausendsten Theil desselben betragen), so wird jeder der drei Factoren, aus denen der Ausdruck für D besteht, so nahe der Einheit gleich, dass die Abweichungen hievon nur noch Grössen vierter Ordnung sind, wenn die Dreiecksseiten a, b, c als Grössen erster Ordnung angesehen werden. Unter dieser Voraussetzung wird also

$$\sqrt[3]{D} = 1$$

und daher auch für das geodätische Dreieck:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (299)$$

Nennt man die sphärischen Winkel des geodätischen Dreiecks A', B', C' und setzt man $3\omega = \varepsilon$, so ist

$$A = A' - \tfrac{1}{3}\varepsilon,\ B = B' - \tfrac{1}{3}\varepsilon,\ C = C' - \tfrac{1}{3}\varepsilon,$$

und daher nach der letzteren Gleichung:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin(A' - \frac{1}{3}\varepsilon)}{\sin(B' - \frac{1}{3}\varepsilon)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (300)$$

d. h. es gilt für ein solches Dreieck der Satz von der Proportionalität der Seiten und Sinusse der Gegenwinkel, welcher für ebene Dreiecke bekannt ist, wenn man nur jeden sphärischen Winkel um den dritten Theil des sphärischen Excesses vermindert.

Um den Grad der Genauigkeit vorstehender Formel in einem bestimmten Falle zu übersehen, nehmen wir an, in einem geodätischen Dreiecke $A'B'C'$ sey $C' = 90^0$ und $a = b = \frac{r\pi}{180} = 1^0$ $= 15$ Meilen. Berechnet man die Winkel A' und B' nach den Formeln der sphärischen Trigonometrie, welche

$$\operatorname{tg} A' = \operatorname{tg} B' = \frac{\cot 45^0}{\cos a}$$

liefert, so wird

$$A' = B' = 45^0\ 0'\ 15,''708;$$

und bestimmt man die dritte Seite c aus der Gleichung:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}c = \operatorname{tg} a \cos B',$$

so ergibt sich

$$c = 1^0\ 24'\ 51,''0396.$$

Der sphärische Excess ε des Dreiecks $A'B'C'$ findet sich nach der Formel (252) gleich

$$\varepsilon = \frac{a\,b \sin c'}{2r^2 \operatorname{tg} 1''} = 31,''416$$

womit erhalten wird

$$A = A' - \tfrac{1}{3}\varepsilon = 45^0\ 0'\ \ 5,''236,$$
$$B = B' - \tfrac{1}{3}\varepsilon = 45^0\ 0'\ \ 5,''236,$$
$$C = C' - \tfrac{1}{3}\varepsilon = 89^0\ 59'\ 49,''528.$$

Schreibt man die Formel (300) so um, dass statt b die Seite c darin vorkommt, so wird

$$c = a\,\frac{\sin(C' - \frac{1}{3}\varepsilon)}{\sin(A' - \frac{1}{3}\varepsilon)}$$

und wenn man die eben gefundenen Winkelwerthe substituirt, so folgt

$$c = 1^{0}\ 24'\ 51,''0396,$$

also derselbe Werth, welcher oben erhalten wurde.

Abweichungen in den Werthen von c würden sich erst zeigen, wenn die geodätischen Dreiecke noch grösser wären als das welches der Berechnung unterworfen wurde.

§. 304.

Aufgabe. Eine Controle der Messung und Berechnung der Dreieckseiten zu bezeichnen.

Das Verfahren für die definitive Berechnung der Dreiecke erster Ordnung stellt sich nun so. Nachdem eine provisorische Berechnung der Dreiecksseiten vorliegt und mit dieser die Winkel ausgeglichen sind, rechnet man, von der Basis ausgehend und den Legendre'schen Satz anwendend, ein Dreieck nach dem andern wie ein ebenes. Ist auf diese Weise das Hauptnetz durchgerechnet, so beginnt man die Rechnung von Neuem, wobei zwar wiederum von der Basis ausgegangen, aber ein anderes an dieser liegendes Dreieck als erstes angesehen wird, um eine andere Reihenfolge der Dreiecke zu erhalten. An diese Rechnung kann man noch eine ähnliche dritte anschliessen, wenn die aus den beiden ersten erhaltenen doppelten Werthe der Dreieckseiten merklich von einander abweichen sollten.

Stimmen die durch verschiedene Berechnungen erhaltenen Seitenlängen gut überein, so ist dieses zwar ein Beweis für die richtige Winkelmessung und die Berechnung, aber noch nicht für die Vollkommenheit des Hauptnetzes; denn diese Uebereinstimmung wäre auch bei einem bedeutenden Fehler in der Basis möglich, da sie die Grundlage der beiden Rechnungen bildet. Um sich völlig beruhigen zu können, ist es nöthig, das Hauptnetz an eine zweite unmittelbar gemessene Basis anzuschliessen. Aus diesem Netze lässt sich diese zweite Basis, welche eine Dreieckseite bildet, berechnen, und da sie auch mit derselben Sorgfalt wie die erste Basis gemessen wurde, so gibt die Vergleichung der berechneten und gemessenen Längen der zweiten Basis, welche auch Verificationsbasis heisst, Aufschluss über die Genauigkeit der Gesammtarbeit.

Für die bayerische Landesvermessung hat man drei Basen

gemessen: eine Hauptbasis zwischen München und Erding, und zwei Verificationsbasen: die erste zwischen Nürnberg und Erlangen und die zweite in der Rheinpfalz zwischen Speyer und Oggersheim. Alle drei haben recht beruhigende Resultate bezüglich des Hauptnetzes geliefert. Eine weitere Probe hat dieses Netz durch den Anschluss an die württemberger Basis zwischen dem Schlosse Solitude und der Stadt Ludwigsburg bestanden. Diese Basis wurde durch unmittelbare und auf die Meeresfläche reducirte Messung = 40 118, 718 P. Fuss, durch Rechnung aus dem ebenfalls auf den Meeresspiegel reducirten bayerischen Hauptnetze aber = 40118,90 P. Fuss gefunden. Beide Längen sind also nur um 1,8 Dezimalzolle oder um weniger als $\frac{1}{200\,000}$ ihrer ganzen Länge verschieden.

5) Die Coordinatenberechnung der Netzpunkte.

§. 305.

Durch die definitive Berechnung der Dreieckseiten ist die gegenseitige Lage aller Netzpunkte bestimmt. Soll aber die Lage dieser Punkte gegen den Aequator und einen bestimmten Meridian der Erde angegeben werden, so muss erst dieser Meridian festgesetzt und dessen Lage gegen den Hauptmeridian, worauf die geographischen Längen bezogen werden, bekannt seyn. Der Meridian, auf welchen man die Netzpunkte zunächst bezieht, geht in der Regel durch die Sternwarte des Landes, deren geographische Lage genau bekannt ist, und welche desshalb als astronomischer Punkt der Landesvermessung benützt wird. Es ist jedoch nicht gerade nothwendig, dass man die Netzpunkte auf den Meridian der Sternwarte bezieht, es kann hiezu auch der Meridian eines andern genau bestimmten Netzpunktes, welcher dann der Normalpunkt heisst, gewählt werden, wie z. B. für die bayerische Landesvermessung die Spitze des nördlichen Thurms der Frauenkirche in München. Zu diesem Meridian denkt man sich durch den Normalpunkt einen grössten Kreis der Erdkugel gelegt, welcher das Perpendikel genannt wird und in der Richtung Ostwest liegt. Der Meridian und das Perpendikel des Normalpunktes, auf das Niveau der Messung projicirt gedacht, stellen nunmehr kreisförmige Coordinatenaxen vor und auf diese werden alle Punkte der Vermessung durch kreisförmige Abscissen und

Ordinaten bezogen.[1] Die **Abscissen** sind Meridianbögen und werden entweder nach Süden oder nach Norden hin als positiv betrachtet. Die **Ordinaten** sind grösste Kreise, die auf dem Meridian des Normalpunktes senkrecht stehen und folglich ihre Pole in dem Aequator der Erde haben, ihre positive Richtung kann nach Osten oder Westen laufen: wir werden für die Ordinaten die Richtung vom Normalpunkt nach Westen und für die Abscissen jene vom Normalpunkte nach Süden als die positive annehmen.

Bei kleineren Dreiecknetzen, für welche man den von ihnen eingeschlossenen Theil der Erdkugel als eben ansehen darf, werden selbstverständlich die Axen und die Coordinaten senkrecht auf einander stehende gerade Linien.

§. 306.

Aufgabe. Ein für eine Landesvermessung hergestelltes Dreiecknetz hat eine so geringe Ausdehnung, dass es als eben angesehen werden kann; man soll aus den gegebenen Bestimmungsstücken die Coordinaten der Netzpunkte berechnen.

Es sey die vom Normalpunkte A ausgehende erste Dreieckseite $AA_1 = a_1$, die anstossende zweite $A_1A_2 = a_2$, die dritte $A_2A_3 = a_3$ u. s. f. die n^{te} $A_{n-1}A_n = a_n$. Ist das Azimuth der Seite a_1 (vom Südpunkte über West bis zu 360° gezählt) in $A = \alpha$, so ist es in $A_1 = 180^0 + \alpha$; setzt man ferner den ersten Richtungswinkel der Seite a_2 in $A_1 = \alpha$, so ist der zugehörige zweite im Punkte $A_2 = 180^0 + \alpha_1$. Für die Seite a_3 hat man den ersten Richtungswinkel in $A_2 = \alpha_2$ und den zweiten in $A_3 = 180^0 + \alpha_2$, und so fortfahrend erhält man für a_n den ersten Richtungswinkel $= \alpha_{n-1}$ und den zweiten $= 180^0 + \alpha_{n-1}$.

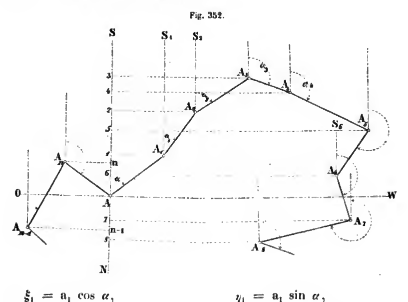
Ueber die Richtungswinkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots. \alpha_n$ ist zu bemerken, dass sie aus den nach §. 301. bei der Messung bestimmten Richtungswinkeln erhalten werden, wenn man an diesen die nöthigen Reductionen δ wegen der früher nur annähernd bekannten Lage des Meridians anbringt. Diese Lage ist aber jetzt, nachdem alle Dreieckwinkel ausgeglichen sind und das Azimuth von a_1 genau

[1] Statt dieser Linear-Coordinaten gebrauchen manche Geodäten auch Polarcoordinaten, wobei der Normalpunkt als Pol und dessen Meridian als Axe angesehen wird.

bekannt ist, zunächst für a_2, hiermit für a_3, damit für a_4 u. s. f. mit a_{n-1} für a_n bekannt.

Bezeichnen die Buchstaben $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \ldots \xi_n$ die Abscissen und $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4 \ldots \eta_n$ die Ordinaten der Netzpunkte $A_1, A_2, A_3, A_4 \ldots A_n$, so ist nach der Figur 352:

Fig. 352.



$$\xi_1 = a_1 \cos \alpha, \qquad \eta_1 = a_1 \sin \alpha,$$
$$\xi_2 = \xi_1 + a_2 \cos \alpha_1, \qquad \eta_2 = \eta_1 + a_2 \sin \alpha_1,$$
$$\xi_3 = \xi_2 + a_3 \cos \alpha_2, \qquad \eta_3 = \eta_2 + a_3 \sin \alpha_2,$$
$$\xi_4 = \xi_3 + a_4 \cos \alpha_3, \qquad \eta_4 = \eta_3 + a_4 \sin \alpha_3,$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\xi_n = \xi_{n-1} + a_n \cos \alpha_{n-1} \qquad \eta_n = \eta_{n-1} + a_n \sin \alpha_{n-1}.$$

Theils um die praktische Anwendung dieser Formeln zu zeigen, theils aber auch um nachzuweisen, dass die hieraus erhaltenen Werthe von den genaueren sphärischen Coordinaten, welche im folgenden Paragraph berechnet werden, nur sehr wenig abweichen, lassen wir hier ein aus der Gradmessung von Bessel und Baeyer entlehntes und auch von Hansen in seiner Instruction für die thüringische Triangulation benütztes Beispiel folgen. Zur leichteren Uebersicht der Lage der Punkte, welche in demselben vorkommen, mag die Fig. 353 dienen, in welcher $+ \, x A y \, +$ das positive Viertel vorstellt.

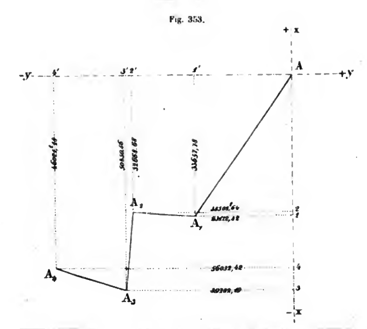


Fig. 353.

Netzpunkt.	Dreieckseite.	Logarithmus derselben.	Richtungswinkel.
	Trunz (A).		
Galtgarben (A_1)	40863',50	4,6113356	214° 32′ 48″,32
	Galtgarben (A_1).		
Trunz (A)	....	....	34° 34′ 50″,72
Kondehnen (A_2)	15168',11	4,1809313	273° 46′ 22″,32
	Kondehnen (A_2).		
Galtgarben (A_1)	....	....	93° 11′ 2″,30
Lattenwalde (A_3)	18241',50	4,2610605	184° 4′ 42″,61
	Lattenwalde (A_3).		
Kondehnen (A_2)	....	....	4° 50′ 27″,14
Gilge (A_4)	16952',67	4,2292381	286° 45′ 31″,70

Für den Normalpunkt A (Trunz) ist die geographische Breite $\varphi = 54^{0}\,13'\,11'',47$ und das Azimuth der Seite A A, (Trunz-Galtgarben) $\alpha = 214^{0}\,32'\,48,''32$. Damit nun die in Galtgarben (A_1) stattfindenden Richtungswinkel auf den richtigen Meridian bezogen werden, ist an denselben eine Verbesserung anzubringen, welche sich wie folgt ergibt: Offenbar muss nach Fig. 352 $S_1 A_1 A = \alpha_1 = 214^{0}\,32'\,48,''32 - 180^{0} = 34^{0}\,32'\,48'',32$ seyn, während nach der früheren Bestimmung laut obiger Tabelle der um δ_1 fehlerhafte Richtungswinkel

$$\omega + \delta_1 = 34^0 34' 50'',72$$

ist. Hieraus folgt die Verbesserung δ_1 für den Punkt $A_1 = 2' 2'' 40$, und es ist dieser Betrag von jedem der Winkel zu subtrahiren, wesshalb der eine von $34^0 34' 50'',72$ in $34^0 32' 48,''32$ und der andere von $273^0 46' 22,''32$ in $272^0 44' 19,''92$ übergeht. Dieser letzte Werth sey $= \omega_1$.

Für den Punkt A_2 (Kondehnen) findet man die zu addirende Verbesserung $\delta_2 = 33' 17,''62$, wodurch der in der Tabelle aufgeführte Richtungswinkel von $93^0 11' 2,''30$ in $93^0 44' 19,''92$ und der von $184^0 4' 42,''61$ in $184^0 38' 0,''23$ verwandelt wird. Der letzte Werth sey $= \omega_2$.

Für den Punkt A_3 (Lattenwalde) ist die zu subtrahirende Verbesserung $\delta_3 = 12' 26,''91$, wesshalb der Richtungswinkel von $4^0 50' 27,''14$ in $4^0 38' 0,''23$ und der von $286^0 45' 31,''70$ in $286^0 33' 4,''79$ übergergeht. Der letzte Werth sey $= \omega_3$.

Mit Hilfe der verbesserten Richtungswinkel und der gegebenen Dreieckseiten findet man die

die Abscisse	$\xi_1 =$	$40863,^t 50 \cos 214^0 32' 48,''32$	$=$	$-33657,^t 78$
„ Ordinate	$\eta_1 =$	$40863,^t 50 \sin 214^0 32' 48,''32$	$=$	$-23172,^t 82$
„ Abscisse	$\xi_2 = -33657,^t 78$	$+ a_2 \cos \omega_1$	$=$	$-32688,^t 68$
„ Ordinate	$\eta_2 = -23172,^t 82$	$+ a_2 \sin \omega_1$	$=$	$-38308,^t 64$
„ Abscisse	$\xi_3 = -32688,^t 68$	$+ a_3 \cos \omega_2$	$=$	$-50850,^t 56$
„ Ordinate	$\eta_3 = -28308,^t 64$	$+ a_2 \sin \omega_2$	$=$	$-39782,^t 19$
„ Abscisse	$\xi_4 = -50850,^t 56$	$+ a_4 \cos \omega_3$	$=$	$-46021,^t 18$
„ Ordinate	$\eta_4 = -39782,^t 19$	$+ a_4 \sin \omega_3$	$=$	$-56032,^t 42$

Nach diesen Coordinatenwerthen ist die Fig. 353 construirt.

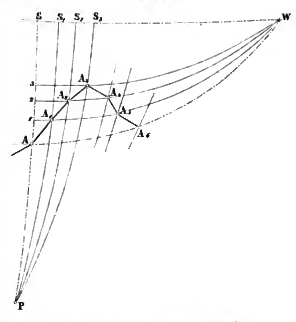
§. 307.

Aufgabe. Es sollen aus den berechneten Dreieckseiten der bekannten geographischen Breite des Normalpunktes und dem Azimuth einer Seite die Linearcoordinaten eines sphärischen Dreiecknetzes entwickelt werden.

Stellt in Fig. 354 der Bogen PS den Meridian des Normalpunktes A und AW den Perpendikel dieses Punktes, folglich SP die Abscissen- und AW die Ordinatenaxe der sphärischen Linearcoordinaten vor; sind ferner $A_1, A_2, A_3, A_4 \ldots$ aufeinander folgende Netzpunkte deren Coordinaten bestimmt werden sollen; haben die Kreisbögen AA_1, A_1A_2, A_2A_3, $A_3A_4 \ldots$ beziehlich die Längen a_1,

$a_2, a_3, a_4 \ldots$; ist φ die geographische Breite des Normalpunkts A und α das Azimuth SAA_1 der Dreieckseite AA_1 in dem Punkte A; zieht man durch $A_1, A_2, A_3, A_4 \ldots$ Meridiane und Perpendikel und nennt die hierdurch erzeugten Coordinaten dieser Punkte beziehlich x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4; ...., sowie die Azimuthe der Seiten A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 .... in den Punkten $A_1, A_2, A_3, \ldots$ nach einander $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \ldots$; und heissen endlich die sphärischen Winkel AA_1P, A_1A_2P, $A_2A_3P, \ldots \beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$, die Complemente AP, A_1P, A_2P, A_3P .... der geographischen Breiten von $A, A_1, A_2, A_3 \ldots b, b_1, b_2, b_3 \ldots$; und die sphärischen Winkel APA_1', A_1PA_2, A_2PA_3 .... $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \ldots$: so ist in dem sphärischen Dreiecke AA_1P bekannt: die Seite $AP = b = 90^0 - \varphi$; die Seite $AA_1 = a_1$ im Längenmasse und $= \mathfrak{a}_1 = 206265 \frac{a_1}{r}$ Sekunden im Gradmasse; endlich der Winkel $A_1AP = 180^0 - \alpha$.

Fig. 354.



Aus diesen drei Stücken findet man mit Hilfe der Gauss'schen Formeln:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\beta_1 - \mu_1) = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} (b - \mathfrak{a}_1)}{\sin \frac{1}{2} (b + \mathfrak{a}_1)} \quad . \quad . \quad (301)$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\beta_1 + \mu_1) = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} (b - \mathfrak{a}_1)}{\cos \frac{1}{2} (b + \mathfrak{a}_1)} \quad . \quad . \quad (362)$$

Hat man hiermit $\beta_1 - \mu_1 = \delta_1$ und $\beta_1 + \mu_1 = \sigma_1$ berechnet, so wird

$$\beta_1 = \tfrac{1}{2} (\sigma_1 + \delta_1) \text{ und } \mu_1 = \tfrac{1}{2} (\sigma_1 - \delta_1) \quad . \quad . \quad (303)$$

gefunden. Ist aber β_1 bekannt, so hat man auch das Azimuth der Seite $\mathfrak{a}_1$ im Punkte A_1 oder den über West gezählten Winkel $S_1 A_1 A$ gleich

$$\alpha' = 180^0 + \beta_1 \quad \ldots\ldots \quad (304)$$

Zieht man hievon den ebenfalls über West gezählten Dreieckwinkel $A_2 A_1 A$, welcher die Differenz $A - A_2$ der in A_1 gemessenen und in dem Winkeljournale enthaltenen Richtungswinkel nach A und A_2 ist, ab, so wird das Azimuth

$$\omega_1 = \alpha' - (A - A_2) \quad \ldots\ldots \quad (305)$$

Man sieht nun leicht ein, dass die bisherige Betrachtung auch für die Seite $A_1 A_2$ gilt, wenn vorher nur noch der Bogen $\mathfrak{b}_1$ oder sein Gradmass $\mathfrak{b}_1$ bestimmt ist, was aber sofort aus der Proportion $\sin \mathfrak{a}_1 : \sin \mathfrak{b}_1 = \sin \mu_1 : \sin \alpha$ erhalten wird, indem diese liefert

$$\sin \mathfrak{b}_1 = \frac{\sin \mathfrak{a}_1 \sin \alpha}{\sin \mu_1} \quad \ldots\ldots \quad (306)$$

Die Abscisse x_1 und die Ordinate y_1 des Punktes A_1 erhält man aus dem rechtwinkeligen sphärischen Dreiecke $A A_1 1$, in welchem die Hypotenuse $A A_1 = a_1$ oder $\mathfrak{a}_1$ und der Winkel $A_1 A 1 = \alpha$ bekannt ist. Nennt man den Winkel, welcher zu dem Bogen x_1 gehört $\mathfrak{r}_1$, und jenen, welcher dem Bogen y_1 angehört $\mathfrak{y}_1$, so dienen zur Berechnung von $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{y}_1$ die beiden Gleichungen:

$$\operatorname{tg} \mathfrak{r}_1 = \operatorname{tg} \mathfrak{a}_1 \cos \alpha \text{ und } \sin \mathfrak{y}_2 = \sin \mathfrak{a}_1 \sin \alpha \quad . \quad . \quad (307)$$

und folglich zur Bestimmung der Bögen x_1 und y_1 die Formeln:

$$x_1 = \frac{r\,\mathfrak{r}_1}{260265} \text{ und } y_1 = \frac{r\,\mathfrak{y}_1}{260265}, \quad \ldots \quad (308)$$

wobei jedoch $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{y}_1$ in Sekunden ausgedrückt seyn müssen.

Die Abscisse $x_2 = A2$ und die Ordinate $A_2 2$ des Punktes A_2 folgen aus dem rechtwinkeligen sphärischen Dreiecke $2 A_2 P$, in welchem bekannt ist die Hypotenuse $A_2 P = \mathfrak{b}_2$ und der Winkel $A P A_2 = \mu_1 + \mu_2$. Es ist somit

$$\operatorname{tg} \mathfrak{r}_2 = \operatorname{tg} \mathfrak{b}_2 \cos(\mu_1 + \mu_2) \text{ und } \sin \mathfrak{y}_2 = \sin \mathfrak{b}_2 \sin(\mu_1 + \mu_2) \quad (309)$$

und folglich, wenn man die Bögen x_2 und y_2 selbst will:

$$x_2 = \frac{r\,\mathfrak{r}_2}{206265} \text{ und } y_2 = \frac{r\,\mathfrak{y}_2}{206265} \quad \ldots\ldots \quad (310)$$

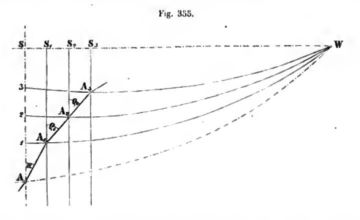
Auf gleiche Weise findet man $\mathfrak{r}_3$, $\mathfrak{y}_3$ und x_3, y_3, $\mathfrak{r}_4$, $\mathfrak{y}_4$ und x_4, y_6 u. s. w. Auch ist klar, dass die Winkel $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_3 \ldots$ die Complemente der geographischen Breiten der Punkte A_1, A_2, $A_3 \ldots$ vorstellen und dass also diese Breiten selbst gleich $90^0 - \mathfrak{b}_1$, $90^0 - \mathfrak{b}_2$, $90^0 - \mathfrak{b}_3$ etc. wären, wenn keine Rücksicht auf die elliptische

Gestalt der Erdmeridiane genommen würde. Diese Rücksicht darf jedoch nicht ausser Acht gelassen werden, wesshalb weiter unten noch besonders von den geographischen Lagen der Netzpunkte die Rede ist. Dagegen stellen die Winkel μ_1, μ_2, μ_3 .... die wirklichen Längenunterschiede zwischen A und A_1, A_1 und A_2, A_2 und A_3 etc. vor, da hierauf die elliptische Gestalt der Erdmeridiane fast gar keinen Einfluss hat, wenigstens so lange nicht, als nicht Netze zu berechnen sind, welche die bis jetzt berechneten an Ausdehnung weit übertreffen.

Obwohl die vorstehenden Formeln nicht sehr zusammengesetzt sind, so veranlassen sie doch sehr viel Rechnung, wesshalb man es vorzieht, statt dieser strengen Formeln Näherungsausdrücke anzuwenden, welche einen hinreichenden Grad von Genauigkeit gewähren. Die nachfolgend entwickelten sind bei der Berechnung des bayerischen und württembergischen Hauptnetzes zur Anwendung gekommen.

Es ist keineswegs nothwendig, die Richtungswinkel der Dreieckseiten auf die Mittagslinien ihrer Endpunkte zu beziehen, wie wir bisher gethan haben; man kann vielmehr statt der Meridiane solche Curven wählen, welche dem Hauptmeridian parallel laufen, d. h. auf allen Ordinatenkreisen gleichweit von diesem Meridiane abstehen. In der Fig. 355 stellt SAN den Hauptmeridian, S_1A_1 eine durch A_1

Fig. 355.



und S_2A_2 eine durch A_2 gehende Richtungscurve vor. Die Richtungswinkel der Seiten AA_1, A_1A_2, A_2A_3 etc. vom ersten zum zweiten Punkt sind hier beziehlich α, ϱ_1, ϱ_2 etc. und die zu lösende Aufgabe ist folgende:

Es sind die Coordinaten x_1 und y_1 eines Punktes A_1 nebst der Grösse A_2 und dem Richtungswinkel ϱ_1 der Seite $A_1 A_2$ gegeben; man sucht erstens die Coordinaten x_2 und y_2 des Punktes A_2, und zweitens den Richtungswinkel ϱ'' der Seite $A_1 A_2$ in dem Punkte A_2.

Hiernach sind in dem sphärischen Dreiecke $A_1 A_2 W$ bekannt: die Seite $A_1 W$ = dem Bogen $W A_1 1$ weniger y_1 oder auf eine Kugel vom Halbmesser 1 reducirt $= 90^0 - \mathfrak{y}_1$; die Seite $A_1 A_2$ = dem Bogen a_2 oder auf eine Kugel vom Halbmesser 1 reducirt $= \mathfrak{a}_2$; und der Winkel $A_2 A_1 W = 90^0 - \varrho_1$. Da der Bogen $A_2 W = 90^0 - \mathfrak{y}_2$ ist, so findet die Gleichung statt:

$$\sin \mathfrak{y}_2 = \cos \mathfrak{a}_2 \sin \mathfrak{y}_1 + \sin \mathfrak{a}_2 \cos \mathfrak{y}_1 \sin \varrho_1$$

und weil $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$ und $\mathfrak{a}_2$ nur sehr kleine Theile des Erdumfangs sind, so kann man in dieser Gleichung mit hinreichender Annäherung setzen:

$$\sin \mathfrak{y} = \mathfrak{y} - \frac{1}{6}\mathfrak{y}^3 = \frac{y}{r} - \frac{y^3}{6\,r^3},$$

$$\cos \mathfrak{y} = 1 - \frac{1}{2}\mathfrak{y}^2 = 1 - \frac{y^2}{2\,r^2};$$

denn indem man diese Werthe für $\sin \mathfrak{y}$ und $\cos \mathfrak{y}$ einführt, vernachlässigt man erst Grössen, deren Nenner die vierte Potenz vom Erdhalbmesser r enthalten.

Führt man die Rechnung durch und setzt zur Abkürzung

$$a_2 \cos \varrho_1 = u,\ a_2 \sin \varrho_1 = v,$$

so erhält man zunächst die gesuchte Ordinate

$$y_2 = y_1 + v - \frac{u^2}{2\,r^2}\left(y_1 + \frac{1}{3}\,v\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (311)$$

Berücksichtigt man, dass nach Seite 196 der Ausdruck $y_1 + v = y_1 + a_2 \sin \varrho_1 = \eta_2$ ist, so folgt aus der vorstehenden Gleichung: dass die sphärische Ordinate y_2 aus der ebenen η_2 erhalten wird, wenn man an dieser die von der Erdkrümmung herrührende Verbesserung

$$x = -\frac{u^2}{2\,r^2}\left(y_1 + \frac{1}{3}\,v\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (312)$$

anbringt. Dabei versteht sich von selbst, dass x einen positiven Werth erlangt, wenn der Factor $y_1 + \frac{1}{3}v$ negativ ist.

Darf man y_2 als bekannt voraussetzen, so folgt aus dem sphärischen Dreiecke $A_1 A_2 W$, wenn man sich dasselbe auf eine Kugel

vom Halbmesser 1 reducirt denkt und erwägt, dass der Winkel $A_1 W A_2 = \varphi_1 = \mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1$ ist, weiter:

$$\sin(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1) = \frac{\sin \mathfrak{a}_2 \cos \varrho_1}{\cos \mathfrak{y}_2}.$$

Setzt man auch hier wieder für $\sin(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1)$, $\sin \mathfrak{a}_2$ und $\cos \mathfrak{y}_2$ die zwei ersten Glieder der ihnen entsprechenden Reihen und entwickelt hieraus den dem Erdhalbmesser r angehörigen Bogen x_2, so ist das Ergebniss dieser Entwickelung folgendes:

$$x_2 = x_1 + u + \frac{u}{2\,r^2}\left(y_2^2 - \frac{1}{3}\,v^2\right) \quad . \quad . \quad . \quad (313)$$

Da nun $x_1 + u = x_1 + a_2 \cos \varrho_1 = \xi_2$, so lehrt diese Gleichung: dass die sphärische Abscisse x_2 gleich ist der ebenen ξ_2 nebst einer von der Erdkrümmung herrührenden Verbesserung

$$\lambda = \frac{u}{2\,r^2}\left(y_2^2 - \frac{1}{3}\,v^2\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (314)$$

Das Vorzeichen von λ hängt theils von u, d. h. von $\cos \varrho_1$, theils von dem Werthe des in Klammern eingeschlossenen Factors ab.

Sucht man endlich aus dem schon zweimal benützten sphärischen Dreiecke $A_1 A_2 W$ den Winkel bei A_2 welcher $= \varrho'' - 90^0$ ist, durch die bekannten Winkel $\mathfrak{a}_2$, ϱ_1, $\mathfrak{y}_1$ auszudrücken und führt abermals die erlaubten Näherungswerthe für $\sin \mathfrak{y}$ und $\cos \mathfrak{y}$ ein, so erhält man nach einigen Umformungen schliesslich:

$$\varrho'' = 180^0 + \varrho_1 - \frac{u}{r^2 \sin 1''}\left(y_1 + \frac{1}{2}\,r\right) \quad . \quad . \quad (315)$$

Für ein ebenes Dreiecknetz ist der Richtungswinkel ω'' der Seite $A_1 A_2$ am Endpunkte $A_2 = 180^0 + \varrho_1$; daher folgt aus dem vorstehenden Ausdrucke: dass der sphärische Richtungswinkel ϱ'' aus dem ebenen ω'' erhalten wird, wenn man diesen mit der Grösse

$$\tau = -\frac{u}{r \cdot \sin 1''}\left(y_1 + \frac{1}{2}\,r\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (316)$$

verbessert, wobei τ sowohl positiv als negativ seyn kann.

Zur näheren Erläuterung des Gebrauchs der Formeln (311) bis (315) mag folgende Berechnung einiger Dreiecke der württembergischen Landesvermessung dienen.

1. Erste Seite $A A_1 = a_1 = 9592^t,921$

Richtungswinkel $S A A_1 = \alpha = 169^0 12' 59'',88$

$\log r \quad = 6.5155492$

$$\log \frac{1}{2\,r^2} = 6{,}66787 - 20$$

$$\log \frac{1}{6\,r^2} = 6{,}19075 - 20$$

a) Die Ordinate $y_1 = y_0 + v - \frac{u^2\,y_0}{2\,r^2} - \frac{u^2\,v}{6\,r^2}$

$y_0 = \dots\dots\dots\dots\; 0',000$

$+ v = a_1 \sin\alpha = \dots + 1794{,}789$

$-\frac{u^2\,y_0}{2\,r^2} = \dots\dots\dots\; 0{,}000$

$-\frac{u^2\,v}{6\,r^2} = \dots\dots - \; 0{,}0025$

$y_1 = + 1794',7955$

b) Die Abscisse $x_1 = x_0 + u + \frac{u\,y_1^2}{2\,r^2} - \frac{u\,v^2}{6\,r^2}$

$x_0 = \dots\dots\dots\; 0',000$

$+ u = a_1 \cos\alpha = \dots - 9423{,}526$

$+\frac{u\,y_1^2}{2\,r^2} = . = \dots\dots - 0{,}0014$

$-\frac{u\,v^2}{6\,r^2} = \dots\dots + \; 0{,}0015$

$x_1 = - 9423',527$

c) Der Richtungswinkel $\varrho' = 180^0 + \alpha - \frac{u\,y_0}{r^2 \sin 1''} - \frac{u\,v}{2\,r^2 \sin 1''}$

$180^0 = \dots\dots\; 180^0\; 0'\; 0''$

$+ \varrho' = \alpha = \dots + \; 169^0\; 12'\; 59'',88$

$-\frac{u\,y_0}{r^2 \sin 1''} = \dots\; 0^0\; 0'\; 0''$

$-\frac{u\,v}{2\,r^2 \sin 1''} = . + \; 0^0\; 0'\; 0'',16$

$\varrho' = 349^0\; 13'\; 0'',04$

2. Zweite Seite $A_1 A_2 = a_2$; $\log a_2 = 4{,}3136942$

Dreieckwinkel $A A_1 A_2 = \dots\dots\dots\; 132^0\; 54'\; 27'',70$;

Der vorige Richtungswinkel $\varrho^1 = \dots\; 349^0\; 13'\; 0'',04$;

Der neue Richtungswinkel $S_1 A_1 A_2 = \varrho_1 = 122^0\; 7'\; 27''\; 74$

a) Die Ordinate $y_2 = y_1 + v - \frac{u^2\,y_1}{2\,r^2} - \frac{u^2\,v}{6\,r^2}$:

$y_1 = \quad . \; . \; . \; . \; . \quad + \quad 1794,7955$

$+ v = a_2 \sin \varrho_1 = \quad . \quad + \quad 17439,1040$

$- \frac{u^2 y_1}{2 r^2} = \quad . \; . \; . \; . \; . \quad - \quad 0,0080$

$- \frac{u^2 v}{6 r^2} = \quad . \; . \; . \; . \; . \quad - \quad 0,0324$

$y_2 = + \; 19233,859$

b) Die Abscisse $x_2 = x_1 + u + \frac{u y_2^2}{2 r^2} - \frac{u v^2}{6 r^2}$:

$x_1 = \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; : \quad 9423,527$

$+ u = a_2 \cos \varrho_1 = \quad . \; . \; - \quad 10949,870$

$+ \frac{u y_2^2}{2 r^2} = \quad . \; . \; . \; . \; . \; - \quad 0,188$

$- \frac{u v_2}{6 r^2} = \quad . \; . \; . \; . \; . \; + \quad 0,052$

$x_2 = - \quad 20373,533$

c) Der Richtungswinkel $\varrho'' = 180^0 + \varrho_1 - \frac{u \; y_1}{r^2 \sin 1''} - \frac{u \; v}{2 r^2 \sin 1''}$

$180^0 = \quad . \; . \; . \; . \quad 180^0 \; 0' \; 0''$

$+ \varrho_1 = \quad . \; . \; . \; . \quad 122^0 \; 7' \; 27'',74$

$- \frac{u \; y_1}{r^2 \sin 1''} = \quad . \; . \; + \quad 0^0 \; 0' \; 0'',377$

$- \frac{u \; v}{2 r^2 \sin 1''} = \quad . \; . \; + \quad 0^0 \; 0 \; 1'',833$

$\varrho'' = 302^0 \; 7' \; 29'',95.$

3. Dritte Seite $A_2 A_3 = a_3$; $\log a_3 = 4,5361063$
Dreieckwinkel $A_1 A_2 A_3 = \quad . \; . \; . \quad 194^0 \; 49' \; 9'',6$
Der vorige Richtungswinkel $\varrho'' = \quad 302^0 \; 7' \; 29'',95$
Der neue Richtungswinkel $\varrho_2 = \quad 136^0 \; 56' \; 59'',55$

a) Die Ordinate $y_3 = y_2 + v - \frac{u^2 y_2}{2 r^2} - \frac{u^2 v}{6 r^2}$:

$y_2 = \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 19233,859$

$+ v_3 = a_3 \sin \varrho_2 = \quad . \; . \; + \; 23460,746$

$- \frac{u^2 y_2}{2 r^2} = \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; - \quad 0,564$

$- \frac{u^2 v}{6 r^2} = \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; - \quad 90,22$

$y_3 = + \; 42693,812.$

b) Die Abscisse $x_3 = x_2 + u = \frac{u\,y_3^2}{2\,r^2} - \frac{u\,v^2}{6\,r^2}$:

$$
\begin{array}{lr}
x_2 = \ldots\ldots\ldots & -\ 20373{,}533 \\
+\ u = a_3 \cos \varrho_2 = \ldots & -\ 25109{,}600 \\
+\ \frac{u\,y_3^2}{2\,r^2} = \ldots\ldots & -\ \ \ \ 2{,}130 \\
-\ \frac{u\,v^2}{6\,r^2} = \ldots\ldots & +\ \ \ \ 0{,}214 \\
\hline
x_3 = & -\ 45485{,}049
\end{array}
$$

c) Der Richtungswinkel $\varrho''' = 180^0 + \varrho_2 - \frac{u\,y_2}{r^2 \sin 1''} - \frac{u\,v}{2\,r^2 \sin 1''}$:

$$
\begin{array}{lr}
180^0 = \ldots & 180^0\ 0'\ 0'' \\
+\ \varrho_2 = \ldots & 136^0\ 56'\ 59'',55 \\
-\ \frac{u\,y_2}{r^2 \sin 1''} = \ .\ + & 0^0\ 0'\ 9'',272 \\
-\ \frac{u\,v}{2\,r^2 \sin 1''} = \ .\ + & 0^0\ 0'\ 5'',655 \\
\hline
\varrho''' = & 316^0\ 56'\ 54'',477
\end{array}
$$

4. Wie unbedeutend die Verbesserungen x, λ, τ sind, ergibt sich aus dem eben berechneten Beispiele; denn wenn die ebenen Coordinaten mit η und ξ bezeichnet werden, so ist bei der ersten Dreieckseite $A A_1$:

$$
\begin{array}{llll}
\eta_1 = + & 1794',798 & \text{und} & x = -\ 0',0025, \\
\xi_1 = - & 9423',526 & \text{"} & \lambda = +\ 0',0001, \\
\varrho^1 = & 349^0\,12'\,59'',8 & \text{"} & \tau = +\ 0'',16;
\end{array}
$$

bei der zweiten Dreieckseite $A_1 A_2$:

$$
\begin{array}{llll}
\eta_2 = + & 19233',819 & \text{und} & x = -\ 0',0404 \\
\xi_2 = - & 20373,397 & \text{"} & \lambda = -\ 0,136 \\
\varrho'' = & 302^0\,7'\,27'',74 & \text{"} & \tau = +\ 2'',210;
\end{array}
$$

bei der dritten Dreieckseite $A_2 A_3$:

$$
\begin{array}{llll}
\eta_3 = + & 42693',019 & \text{und} & x = -\ 0',793 \\
\xi_3 = - & 45483,133 & \text{"} & \lambda = -\ 1,916 \\
\varrho''' = & 316^0\,56'\,59'',55 & \text{"} & \tau = \ \ 14'',927.
\end{array}
$$

Dieselbe Ueberzeugung gewährt das Beispiel, welches Hansen in seiner Instruction für die thüringische Landesvermessung nach folgenden Formeln berechnet hat. Will man nämlich die bereits auf Seite 198 berechneten ebenen Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 .... und η_1, η_2, η_3, η_4 .... auf die kugelförmige Erdoberfläche reduciren, so hat man erst folgende Hilfsgrössen zu berechnen

$$\varepsilon_2 = \varrho' (\eta_2 \xi_1 - \xi_2 \eta_1)$$
$$\varepsilon_3 = \varrho' (\eta_3 \xi_2 - \xi_3 \eta_2)$$
$$\varepsilon_4 = \varrho' (\eta_4 \xi_3 - \xi_3 \eta_4) \text{ etc.},$$

wobei $\varrho' = \frac{1}{2\,r^2}$ und für das berührte Beispiel log $\varrho' = 6{,}66844-20$ ist.

Sind diese Hilfsgrössen berechnet, so wird

$x_1 = \xi_1$

$x_2 = \xi_2 - \varepsilon_2 \eta_2 + \frac{1}{3} \varepsilon_2 (\eta_2 + \eta_1)$

$x_3 = \xi_3 - (\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \eta_3 + \frac{1}{3} \varepsilon_2 (\eta_2 + \eta_1) + \frac{1}{3} \varepsilon_3 (\eta_3 + \eta_2)$

$x_4 = \xi_4 - (\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) \eta_4 + \frac{1}{3} \varepsilon_2 (\eta_1 + \eta_1) + \frac{1}{3} \varepsilon_3 (\eta_3 + \eta_2) + \frac{1}{3}$ $\varepsilon_4 (\eta_4 + \eta_3)$ etc.

$y_1 = \eta_1$

$y_2 = \eta_2 + \varepsilon_2 \xi_2 - \frac{1}{3} \varepsilon_2 (\xi_2 + \xi_1)$

$y_3 = \eta_3 + (\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \xi_3 - \frac{1}{3} \varepsilon_2 (\xi_2 + \xi_1) - \frac{1}{3} \varepsilon_3 (\xi_3 + \xi_2)$

$y_4 = \eta_4 + (\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) \xi_4 - \frac{1}{3} \varepsilon_2 (\xi_2 + \xi_1) - \frac{1}{3} \varepsilon_3 (\xi_3 + \xi_2) - \frac{1}{3}$ $\varepsilon_4 (\xi_4 + \xi_3)$ etc.

Werden für ξ und η die auf Seite 198 angeführten Werthe gesetzt, so erhält man

$\varepsilon_2 = +\,0{,}00002481$, $\varepsilon_3 = -\,0{,}00003022$, $\varepsilon_4 = +\,0{,}00004746$,

und hiermit die

Reduction zu $\xi_2 = +\,0',442$, also $x_2 = -\,32668',24$
" " $\xi_3 = +\,0{,}064$, " $x_3 = -\,50850{,}50$
" " $\xi_4 = +\,1{,}119$, " $x_4 = -\,46020{,}06$ etc.,
" " $\eta_2 = -\,0{,}261$, " $y_2 = -\,38308',90$
" " $\eta_3 = -\,0{,}017$, " $y_3 = -\,39782{,}21$
" " $\eta_4 = +\,0{,}694$, " $y_4 = -\,56033{,}11$ etc.

5. Die Berechnung der Coordinaten der Netzpunkte dritter Ordnung geschieht ohne Anwendung der Verbesserungen wegen der Erdkrümmung, und es kann diese Berechnung keine Schwierigkeit machen, da jedes Dreieck dritter Ordnung sich an eine Seite zweiter Ordnung anschliesst und für deren beide Enden die Coordinaten und Richtungswinkel bekannt sind. Ist ein Punkt dritter Ordnung von mehreren Seiten zweiter Ordnung aus eingeschnitten worden, so kann man seine Coordinaten mehrmals berechnen, was auch der Controle wegen nicht unterlassen werden darf. Weichen die Coordinatenwerthe nur äusserst wenig von einander ab, so genügt es meistens, diese Abweichungen durch die arithmetischen Mittel der

Coordinatenwerthe auszugleichen; wollte man aber strenger verfahren, so müsste die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate vorgenommen werden, worüber in den betreffenden Werken näherer Aufschluss zu suchen ist.

6) Die geographische Lage der Netzpunkte und Seiten.

§. 308.

Die in §. 307 entwickelten Formeln Nr. 301 bis Nr. 310 enthalten bereits eine Auflösung der vorliegenden Aufgabe; bei wirklichen Ausrechnungen bedient man sich aber jener Formeln in der Regel nicht, sondern gebraucht Näherungsausdrücke, welche bequemer zu handhaben sind. Dergleichen Ausdrücke sollen hier entwickelt werden, und zwar mit Bezug auf dieselbe Fig. 354, welche den früheren Entwickelungen zu Grunde lag, und aus strengen Formeln, welche zuerst aufzustellen sind. Die zu lösende Aufgabe kann nunmehr so ausgedrückt werden:

Fig. 354.

Auf der Erdoberfläche seyen zwei Punkte A und A_1' in der Art gegeben, dass man von A die geographische Breite (φ) und Länge (λ), von A_1 seine kürzeste Entfernung a_1 von A, und von dem Bogen AA_1 das Azimuth α in dem Punkte A kennt: es soll die geographische Breite (φ') und Länge λ' des Punktes A_1 nebst dem Azimuth α' der Seite AA_1 in dem Punkte A_1 bestimmt werden.

Wie bisher nehmen wir auch jetzt die Fläche, auf der das Netz liegt, als eine Kugel vom Halbmesser r an. Soll demnach der auf dieser Kugel gegebene Bogen $AA_1 = a_1$ in Sekunden ausgedrückt und $= \mathfrak{a}_1$ gesetzt werden, so haben wir nach früheren Entwickelungen:

$$\mathfrak{a}_1 = 206265 \cdot \frac{a_1}{r} \text{ Sekunden.}$$

In dem sphärischen Dreiecke AA_1P, das durch die Seite AA_1 und die beiden Meridiane von A und A_1 gebildet wird, ist bekannt:

die Seite AA_1 oder $\mathfrak{a}_1 = 206265 \frac{a_1}{r}$ Sek.

die Seite AP oder $\mathfrak{b} = 90^0 - \varphi$ und

der Winkel $A_1AP = 180^0 - \alpha$.

Setzen wir nun wie früher den Winkel $APA_1 = \mu_1$, den Winkel $AA_1P = \beta_1 = \alpha' - 180^0$, und die Seite $PA_1 = \mathfrak{b}_1 = 90^0 - \varphi'$, so liefern einige bekannte Formeln der sphärischen Trigonometrie folgende zwei Gleichungen:

$$\cos\varphi \quad \operatorname{tg}\varphi' = \sin\varphi\cos\mu_1 - \sin\mu_1\operatorname{cotg}\alpha$$

$$\sin\alpha\operatorname{cotg}\mu_1 = \cos\varphi\operatorname{cotg}\mathfrak{a}_1 + \sin\varphi\cos\alpha.$$

Berechnet man nach dem Vorgange von Gauss[1] den Hilfswinkel ψ aus der Gleichung

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\mathfrak{a}_1\cos\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (317)$$

und führt ψ als bekannte Grösse in die folgenden Entwickelungen ein, so erhält man zunächst aus der vorletzten Gleichung:

$$\operatorname{tg}\mu_1 = \operatorname{tg}\alpha\sin\psi\sec(\varphi - \psi) \quad \ldots\ldots \quad (318)$$

und hierauf aus der ersten Grundgleichung, wenn man den Werth von $\operatorname{tg}\mu_1$ substituirt:

$$\operatorname{tg}\varphi' = \cos\mu_1\operatorname{tg}(\varphi - \psi) \quad \ldots\ldots \quad (319)$$

Führt man noch einen zweiten Hilfswinkel χ ein, welcher aus der Gleichung

$$\operatorname{tg}\chi = \sin\alpha\sin\mathfrak{a}_1\operatorname{tg}(\varphi - \psi) \quad \ldots\ldots \quad (320)$$

berechnet wird; setzt man die algebraische Winkelsumme

$$\varphi - \psi - \varphi' = \sigma, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (321)$$

zieht $\operatorname{tg}\varphi'$ von $\operatorname{tg}(\varphi - \psi)$ ab und berücksichtigt, dass $\cos\varphi'\sin\mu_1 = \sin\mathfrak{a}_1\sin\alpha$, so folgt nach kurzer Entwickelung

$$\sin\sigma = \operatorname{tg}\chi\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\mu_1\cos(\varphi - \psi) \quad \ldots\ldots \quad (322)$$

Zur Berechnung des Azimuths $\alpha' = 180^0 + \beta_1$ dient zunächst folgende aus den Neperschen Analogien entspringende Gleichung:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta_1)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi' - \varphi) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\mu_1\sin\tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi).$$

Entwickelt man hieraus $\operatorname{cotg}(\alpha - \beta_1)$ und zieht davon $\operatorname{cotg}\chi$ ab, so wird

$$\sin\chi\sin(\alpha - \beta_1)\,[\operatorname{cotg}(\alpha - \beta_1) - \operatorname{cotg}\chi] = \sin(\alpha - \beta_1 - \chi).$$

[1] Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie. Göttingen 1844.

Setzt man den Winkel

$$\alpha - \beta_1 - \chi = \tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (323)$$

und eliminirt mit Hilfe der vorausgehenden Gleichungen aus dem Ausdrucke für sin τ alle Grössen bis auf α, $\mathfrak{a}_1$ und ψ, so ergibt sich:

$$\sin \tau = \sin \alpha \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \mathfrak{a}_1 \sin \psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (324)$$

Ist der Hilfswinkel τ berechnet, so erhält man aus Gleichung (323) den Winkel

$$\beta_1 = \alpha - \chi - \tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (325)$$

und damit das Azimuth

$$\alpha' = \pm 180^0 + \alpha - \chi - \tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (326)$$

Liefert diese Gleichung das gesuchte Azimuth der Linie $A A_1$ in dem Punkte A_1, so erhält man aus Gleichung (321) die Breite jenes Punktes gleich

$$\varphi' = \varphi - \psi - \sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (327)$$

und aus Gleichung (322) den Längenunterschied μ_1 zwischen A und A_1. Diese Formeln sind strenge richtig, aber die Bestimmung der in ihnen vorkommenden kleinen Bögen aus den Logarithmen der Sinusse und Tangenten erheischt eine mühsame Interpolation, wesshalb man sie nicht unmittelbar anwendet, sondern mittelbar dadurch, dass man die trigonometrischen Functionen in Reihen entwickelt, wie im Nachstehenden an einigen dieser Formeln gezeigt wird.

Setzt man nämlich

$$\mathfrak{a}_1 \cos \alpha = \mathrm{m} \text{ und } \mathfrak{a}_1 \sin \alpha = \mathrm{n}$$

und berücksichtigt, dass, wenn $\mathfrak{a}_1$ als Grösse erster Ordnung gilt, bis auf Grössen fünfter Ordnung genau

$$\operatorname{tg} \psi = \psi \sin 1'' \left(1 + \tfrac{1}{3} \psi^2 \sin^2 1''\right)$$

gesetzt werden darf, so folgt aus der Gleichung (324), wenn man für tg $\mathfrak{a}_1$ einen ähnlichen Werth substituirt:

$$\psi \left(1 + \tfrac{1}{3} \psi^2 \sin^2 1''\right) = \mathrm{m} \left(1 + \tfrac{1}{3} \mathfrak{a}_1^2 \sin^2 1''\right).$$

Da nach derselben Gleichung sehr nahe $\varphi = \mathfrak{a}_1 \cos \alpha = \mathrm{m}$, so darf man innerhalb der vorhin bezeichneten Genauigkeitsgrenze $\psi^3 = \mathrm{m}^3$ und desshalb

$$\varphi = \mathrm{m} \left[1 + \tfrac{1}{3} (\mathfrak{a}_1^2 - \mathrm{m}^2) \sin^2 1''\right]$$

setzen. Nun ist aber $\mathrm{m}^2 + \mathrm{n}^2 = \mathfrak{a}_1^2$, folglich $\mathfrak{a}_1^2 - \mathrm{m}^2 = \mathrm{n}^2$ und daher

$$\psi = \mathrm{m} \left(1 + \tfrac{1}{3} \mathrm{n}^2 \sin^2 1''\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (328)$$

Drückt man diese Gleichung logarithmisch aus, wodurch der Genauigkeit nichts vergeben, aber an Bequemlichkeit der Rechnung gewonnen wird, so erhält man

$$\log \psi = \log m + \log (1 + \tfrac{1}{3} n^2 \sin^2 1'').$$

Bezeichnet M den Modul des Logarithmensystems, also hier, wo briggische Logarithmen angewendet werden, die Zahl 0,43429448....., so wird nach der Reihe $\log (1 + z) = M (z - \tfrac{1}{2} z^2 + \tfrac{1}{3} z^3 + ...)$ genau genug

$$\log (1 + \tfrac{1}{3} n^2 \sin^2 1'') = \tfrac{1}{3} M n^2 \sin^2 1''$$

und folglich, wenn das Product $\tfrac{1}{12} M \sin^2 1'' = k$, also

$$\log k = 7{,}9397528 - 20$$

ist, die an dem Logarithmus von m anzubringende Verbesserung $= 4 k n^2$ und somit

$$\log \psi = \log m + 4 k n^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (329)$$

Aus der Gleichung (318), welche den Längenunterschied μ_1 liefert, folgt, wenn man wieder mit der früheren Genauigkeitsgrenze

$$\operatorname{tg} \mu_1 = \mu_1 \sin 1'' (1 + \tfrac{1}{3} \mu_1^2 \sin^2 1'')$$
$$\sin \psi = \psi \sin 1'' (1 - \tfrac{1}{6} \psi^2 \sin^2 1'')$$

setzt, für ψ seinen Werth aus der Gleichung (328) einführt und das Product $\tfrac{1}{18} n^2 \psi^2 \sin^4 1''$ weglässt,

$$\mu_1 = m \operatorname{tg} \alpha \sec (\varphi - \psi) (1 + \tfrac{1}{3} n^2 \sin^2 1'' - \tfrac{1}{6} m^2 \sin^2 1'')$$
$$- \tfrac{1}{3} \mu_1^3 \sin^2 1''.$$

Wird zur Abkürzung

$$m \operatorname{tg} \alpha \sec (\varphi - \psi) = u \sec (\varphi - \psi) = u$$

geschrieben und berücksichtigt, dass $\mu_1^3 = u^3$ genommen werden darf, so erhält man zunächst

$$\mu_1 = u [1 + \tfrac{1}{3} (n^2 - u^2) \sin^2 1'' - \tfrac{1}{6} m^2 \sin^2 1'']$$

und hierauf, da $n^2 - u^2 = - v^2$ ist, wenn

$$n \operatorname{tg} (\varphi - \psi) = v$$

gesetzt wird, den zur Berechnung von μ_1 geeigneten Ausdruck:

$$\mu_1 = u (1 - \tfrac{1}{3} v^2 \sin^2 1'' - \tfrac{1}{6} m^2 \sin^2 1'') \quad . \quad . \quad (330)$$

Diese Gleichung geht aber, wenn man sie logarithmisch ausdrückt und das Product k beizieht, in folgende über:

$$\log \mu_1 = \log u - 2 k m^2 - 4 k v^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (331)$$

Wird die Gleichung (322), welche den Winkel σ liefert, zuvörderst so geschrieben:

$$\sin \sigma = \sin a_1 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \mu_1 \sin \alpha \sin (\varphi - \psi);$$

werden hierauf folgende Werthe substituirt:

$$\sin \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1 \sin 1'' \left(1 - \tfrac{1}{6}\, \mathfrak{a}_1^2 \sin^2 1''\right),$$
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \mu_1 = \tfrac{1}{2} \mu_1 \sin 1'' \left(1 + \tfrac{1}{12} \mu_1^2 \sin^2 1''\right),$$
$$\sin (\varphi - \psi) = \mathrm{v} : \mathrm{u},$$

und wird berücksichtigt, dass die Grösse σ in Bezug auf $\mathfrak{a}_1$ selbst schon von der zweiten Ordnung ist, und dass also $\sin \sigma = \sigma \sin 1''$ gesetzt werden darf, da das zweite Glied der Reihe für $\sin \sigma$ schon Grössen sechster Ordnung enthält; so findet man nach kurzer Entwickelung:

$$\sigma = \tfrac{1}{2}\, \mathrm{n\, v} \sin 1'' \left(1 - \tfrac{1}{6}\, \mathfrak{a}_1^2 \sin^2 1'' + \tfrac{1}{12} \mu_1^2 \sin^2 1''\right) \frac{\mu_1}{\mathrm{u}}\,.$$

Nimmt man den Werth von $\frac{\mu_1}{\mathrm{u}}$ aus der Gleichung (330), setzt $\mu_1^2 = \mathrm{u}^2 = \mathrm{v}^2 + \mathrm{n}^2 = \mathrm{v}^2 + \mathfrak{a}_1^2 - \mathrm{m}^2$, und vollzieht die angezeigten Operationen und Reductionen, so wird

$$\sigma = \tfrac{1}{2}\, \mathrm{v\, n} \sin 1'' \left[1 - \tfrac{1}{12} \sin^2 1'' \left(\mathfrak{a}_1^2 + 3\, \mathrm{m}^2 + 3\, \mathrm{v}^2\right)\right]; \quad (332)$$

und wenn man diese Gleichung wieder logarithmisch ausdrückt und das constante Product k beizicht:

$$\log \sigma = \log \left(\tfrac{1}{2}\, \mathrm{v\, n} \sin' 1''\right) - \mathrm{k}\, \mathfrak{a}_1^2 - 3\, \mathrm{k\, m}^2 - 3\, \mathrm{k\, v}^2\,. \quad (333)$$

In gleicher Weise kann man aus den Gleichungen (323) und (324) die Werthe von χ und τ, sowie von $\log \chi$ und $\log \tau$ bestimmen; wir überlassen jedoch die Entwickelung derselben dem eigenen Fleisse des Lesers und setzen bloss die Resultate hieher:

$$\chi = \mathrm{v} \left(1 - \tfrac{1}{6}\, \mathfrak{a}_1^2 \sin^2 1''\right) \quad \ldots \ldots \quad (334)$$
$$\log \chi = \log \mathrm{v} - 2\, \mathrm{k}\, \mathfrak{a}_1^2 - 4\, \mathrm{k\, v}^2 \quad \ldots \ldots \quad (335)$$
$$\tau = \tfrac{1}{2}\, \mathrm{m\, n} \sin'' \left(1 + \tfrac{5}{12}\, \mathfrak{a}_1^2 \sin^2 1'' - \tfrac{1}{2}\, \mathrm{m}^2 \sin^2 1''\right. \quad . \quad (336)$$
$$\log \tau = \log \left(\tfrac{1}{2}\, \mathrm{m\, n} \sin 1''\right) + 5\, \mathrm{k}\, \mathfrak{a}_1^2 - 6\, \mathrm{k\, m}^2 \quad . \quad (337)$$

Sind nach den vorausgehenden Gleichungen die Grössen ψ, σ, χ, τ bestimmt, so findet man aus Gleichung (327) die Breite φ' aus Gleichung (326) das Azimuth α' und aus Gleichung (330) den Längenunterschied μ_1, also alle Grössen, welche die vorliegende Aufgabe als zu suchende bezeichnet.

Die so gefundenen Längenunterschiede, Breiten und Azimuthe beziehen sich alle auf eine Kugelfläche vom Halbmesser r, während die mathematische Oberfläche der Erde ein Umdrehungsellipsoid ist. Es käme also darauf an, zu zeigen, wie die Grössen μ_1, φ' und α' gefunden werden, wenn man ihrer Bestimmung ein Ellipsoid zu Grunde legte, dessen Dimensionen nach Bessel folgende sind:

grosse Halbaxe $a = 3272077$ Toisen, $\log a = 6{,}5148235$
kleine Halbaxe $b = 3261139$ „ $\log b = 6{,}5133692$
Excentricität $e = 0{,}081696$ „ $\log e = 8{,}9122052 - 10$.

Der Zweck dieses Buches fordert jedoch, dass wir uns hierüber nicht verbreiten, sondern lediglich, auf die ausgezeichneten Arbeiten von Gauss[1] und Bessel[2] verweisend, einige Ergebnisse der hieher gehörigen Rechnungen anführen.

Was zunächst die Azimuthe der Dreieckseiten betrifft, so ist zu bemerken, dass deren Werthe für die Kugel auch für das Sphäroid gelten, da die Unterschiede selbst bei den grössten Landesvermessungen oft kaum $^1/_{100}$ Sekunde betragen. Um diese Behauptung wenigstens theilweise zu begründen, führen wir folgende numerische Berechnung eines Beispiels von Gauss an.

In dem hannoverschen Dreiecknetze ist das Dreieck Brocken-Hohehagen-Inselsberg eines der grössten und vom mittleren Parallelkreise des Landes am weitesten entfernt. Die Logarithmen der in Toisen gegebenen Dreieckseiten sind:

Hohehagen-Inselsberg = 4,6393865,
Inselsberg-Brocken = 4,7353929,
Brocken-Hohehagen = 4,5502669,

und die von Gauss berechneten Reductionen, wie sie mit ihren Vorzeichen zu den Azimuthen auf dem Sphäroid addirt werden müssten, um die Azimuthe auf der Kugel zu erhalten, folgende:

Brocken-Inselsberg = + 0,″00055,
Brocken-Hohehagen = + 0,″00196,
Hohehagen-Brocken = − 0, 00238,
Hohehagen-Inselsberg = − 0, 00332,
Inselsberg-Hohehagen = + 0, 00428,
Inselsberg-Brocken = − 0, 00083.

Demnach müssen die auf dem Sphäroid zwischen geodätischen Linien gemessenen Dreieckwinkel wie folgt abgeändert werden, um die zwischen grössten Kreisbögen liegenden Winkel auf der Kugel zu erhalten:

[1] 1) Astronomische Abhandlungen, herausgegeben von Schumacher 1825. 2) Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, 1844.

[2] 1) Gradmessung in Ostpreussen, Berlin 1838. 2) Astronomische Nachrichten, herausgegeben von Schumacher Nr. 86.

Winkel Brocken um $+ 0,''00141$,
„ Hohehagen „ $- 0, 00094$,
„ Inselsberg „ $- 0, 00511$.

Auch der Unterschied zwischen den **geographischen Längen** auf der Kugel und dem Sphäroid ist im Allgemeinen nur sehr klein, und es besteht zwischen beiden die Beziehung

$$\mu_1 = \gamma\,\mu \quad \ldots\ldots\ldots \quad (338)$$

wobei μ_1 die Länge auf der Kugel, μ jene auf dem Ellipsoid und γ einen Factor bezeichnet, der sich aus folgenden Gleichungen, in denen φ die Breite des Normalpunktes vorstellt, ergibt:

$$\gamma = \frac{1}{\cos\zeta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (339)$$

$$\operatorname{tg}\zeta = \operatorname{tg}\varepsilon \cdot \cos^2\varphi \quad \ldots\ldots \quad (340)$$

$$\sin\varepsilon = e \quad \ldots\ldots\ldots \quad (341)$$

$$\varepsilon = 4^0\,41'\,9'',9826 \quad \ldots\ldots \quad (342)$$

Ist beispielsweise $\varphi = 52^0\,42'\,2'',532$, so wird der Hilfswinkel $\zeta = 1^0\,43'\,26'',804$ und

$$\log\gamma = 0,0001966$$

Hat man nun für einen Ort, dessen Breite und Länge von der des Normalpunktes nur höchstens 5^0 bis 6^0 verschieden ist, den Längenunterschied auf der Kugel

$$\mu_1 = 2^0\,16'\,10'' = 8170''$$

gefunden, so erhält man den Längenunterschied μ auf dem Ellipsoid aus der Gleichung

$$\log\mu = \log\mu_1 - \log\gamma = 3,9120255,$$

welche $\mu = 8166'',305 = 2^0\,16'\,6'',305$ liefert. Die Differenz $\mu_1 - \mu$ beträgt somit nur 3,7 Sekunden.

Bedeutender ist die Abweichung zwischen den **geographischen Breiten** auf der Kugel und dem Ellipsoide. Wie man die einen auf die anderen in der einfachsten Weise reduciren kann, hat Gauss in seinen schon mehrmals angeführten „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie" gezeigt, auf die wir desshalb verweisen. Ebendaselbst hat er aber auch eine Tafel mitgetheilt, welche alle Rechnungen in dieser Beziehung erspart, indem sie die einander entsprechenden Breiten auf der Kugel und dem Sphäroide zwischen $46^0\,10'$ und $58^0\,40'$ enthält. Wir haben diese Tafel unter Nr. XI im Anhange aufgenommen und dazu nur noch zu bemerken, dass

die erste Columne die Breiten auf der Kugel und die zweite jene auf dem Sphäroide angibt.

7) Verbindung der Messtischblätter mit dem Dreiecknetze.

§. 309.

Ist die Triangulation des Landes vollendet, so besteht die nächste Arbeit in der Eintheilung der aufzunehmenden Fläche in Vierecke von solcher Ausdehnung, dass jedes derselben in dem Massstab der Aufnahme ein Messtischblatt von $1\frac{1}{2}'$ bis $2'$ Seitenlänge nahezu ausfüllt. Diese unter sich zusammenhängenden Vierecke bilden im Gegensatze des trigonometrischen Netzes das graphische Netz und es bestehen dieselben entweder aus Quadraten, Rechtecken oder Paralleltrapezen, welche sich an den Meridian und den Perpendikel (beziehungsweise Parallelkreis) des Normalpunktes der Aufnahme anschliessen. Die Form der Netzvierecke hängt lediglich von den Bestimmungen der Direction der Landesvermessung ab; welche Form aber auch gewählt werden mag, so kommt es doch immer darauf an, die Begrenzungslinien der Vierecke auf die Messtischblätter und innerhalb derselben die auf sie treffenden Netzpunkte genau aufzutragen, damit der Geometer auf dem Felde den Messtisch oder seine Operationslinien so gut als möglich orientiren kann. Wir werden die Lösung dieser Aufgabe für zwei Formen des graphischen Netzes geben, nämlich:

a) für eine Abtheilung der Terrainoberfläche nach Paralleltrapezen, welche (wie in Preussen und Sachsen-Gotha) aus Abschnitten von Meridianen und Parallelkreisen gebildet sind, und

b) für eine Eintheilung der Landesfläche in Quadrate, welche (wie in Bayern und Württemberg) aus Abschnitten von Curven gebildet werden, die dem Meridian und Perpendikel des Normalpunktes nahezu parallel laufen.

§. 310.

Aufgabe. Es sollen auf Grund einer vorausgegangenen Triangulirung die Messtischblätter für die Detailaufnahme vorbereitet werden, wenn das graphische Netz aus Abschnitten von Meridianen und Parallelkreisen gebildet wird.

In Preussen und Sachsen-Gotha geschieht die topographische Vermessung im Massstabe von 1 : 25000; man hat daher zu dem graphischen Netze Vierecke gewählt, welche in der Richtung von Osten nach Westen von zwei Meridianabschnitten begrenzt werden, die 6 Minuten der geographischen Breite umfassen, während sie in der Richtung von Süden nach Norden aus zwei Abschnitten von Parallelkreisen bestehen, die einem Längenunterschied von 10 Minuten entsprechen. Auf diese Weise wird ein Stück der Erdoberfläche, welches einen Grad Länge und Breite umfasst, auf 60 Blättern dargestellt. Die Abschnitte der Meridiane und Parallelkreise sind zwar in aller Strenge krumme Linien, aber so lange diese Abschnitte sich nur über 6 und 10 Minuten Breite und Länge ausdehnen, können sie unbedenklich als gerade Linien angesehen werden.

Die Höhen und Breiten der einzelnen Blätter müssen aus den bekannten Dimensionen des Erdsphäroids und den geographischen Längen und Breiten der Blattmittelpunkte berechnet werden. Will man, dass auch die Parallelkreise, welche ganzen Breitengraden angehören, als Mittellinien der Netzvierecke erscheinen, so muss man von einem Normalpunkte ausgehen, dessen Breite ein Vielfaches von 6 Minuten ist; wobei man aus anderen Gründen gut thut, diesen Punkt soviel als möglich in der Mitte des zu vermessenden Landes anzunehmen. Eine ähnliche Rücksicht kann man bezüglich der Länge dieses Punktes eintreten lassen, welche demnach ein Vielfaches von 10 Minuten seyn müsste. Auf den Meridian und den Perpendikel dieses Normalpunktes sind alle Coordinaten der Netzpunkte zu reduciren, wenn sie nicht ursprünglich darauf bezogen wurden. Wir nehmen an, dass diese Reduction schon geschehen sey, und dass $x_1\ y_1$, $x_2\ y_2$, $x_3\ y_3$ etc. die für den Normalpunkt geltenden Coordinaten der Netzpunkte A_1, A_2, A_3 etc. vorstellen. Ist die geographische Länge des Normalpunktes z. B. $= 28^0\ 20'$ und seine Breite $= 50^0\ 36'$ gegeben, so sind die den Mitten der Messtischblätter entsprechenden geographischen Lagen folgende:

Breiten von Süd nach Nord:

$50^0\ 36'$; $50^0\ 42'$; $50^0\ 48'$; $50^0\ 54'$ etc.

Breiten von Nord gegen Süd:

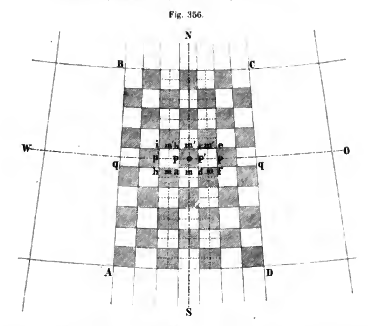
$50^0\ 36'$; $50^0\ 30'$; $50^0\ 24'$; $50^0\ 18'$ etc.

Längen von West nach Ost:

$28^0\ 20'$; $28^0\ 30'$; $28^0\ 40'$; $28^0\ 50'$ etc.

Längen von Ost nach West:
28° 20′; 28° 10′; 28° 0′; 27° 50′ etc.

Fig. 356.



Um die Abmessungen der Netzvierecke kennen zu lernen, sind dieselben beispielsweise für die Breite von 50° bis 51° in der nachfolgenden von Hansen berechneten Tabelle in preussischen Fussen zusammengestellt. Die Blattdimensionen ergeben sich selbstverständlich durch Division mit 25000.

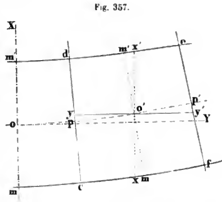
Geograph. Breite.	Höhe	Breite	Geograph. Breite.	Höhe	Breite
	des Vierecks.			des Vierecks.	
		31754′			31424′
50° 0′	29529′	31690′	50° 30′	29531′	31358′
50° 6′	29530′	31624′	50° 36′	29532′	31292′
50° 12′	29530′	31558′	50° 42′	29532′	31226′
50° 18′	29530′	31492′	50° 48′	29533′	31160′
50° 24′	29531′	31424′	50° 54′	28533′	31092′
			51° 0′	29534′	31026′

Nachdem diese Dimensionen berechnet sind, hat man auf jedes mit Papier bespannte Messtischblatt zunächst den ihm zugehörigen

mittleren Meridian und die Grenzlinien mit feinen Tuschlinien zu zeichnen, was mit genauen Massstäben und Stangenzirkeln so sorgfältig als möglich geschieht. Es wird zu dem Ende jedes Blatt durch eine von Süden nach Norden laufende Linie (m m') halbirt, diese Linie wird gleich der berechneten Blatthöhe gemacht, an ihren Endpunkten werden Senkreckte zu ihr errichtet, auf diesen trägt man die halben Blattbreiten und zwar an der Nordseite die kleineren (m'b = m'c) und an der Südseite die grösseren (ma = md) ab, und endlich verbindet man die Eckpunkte (a, b, c, d) durch gerade Linien.

Sind alle Blätter so weit zubereitet, so kommt es darauf an, ob die einzelnen Netzpunkte mittels ihrer Coordinaten oder ihrer geographischen Längen und Breiten in die Blätter eingetragen werden sollen. Ist letzteres der Fall, so theilt man jedes Netzviereck (abcd) an der Südseite (ad) und an der Nordseite (bc) in 10, an der Ost- und Westseite aber in je 6 gleiche Theile und verbindet die Theilungspunkte so durch gerade Linien, dass man 60 kleine Vierecke erhält, wovon jedes eine Minute Länge und Breite umfasst. In diesen kleinen Vierecken werden alsdann die durch ihre geographischen Längen und Breiten ausgedrückten Netzpunkte mittels senkrechter Abstände, oder, wenn man will, durch fortgesetzte Theilung der Vierecke durch Meridian- und Parallelkreisabschnitte bestimmt. Hat man es dagegen unterlassen, die geographischen Längen und Breiten der Netzpunkte zu berechnen, so muss man, wie bei der thüringischen Landesvermessung geschieht, in jedem Messtischblatte die in der Mitte seines Meridianabschnittes entspringenden Coordinatenaxen dieses Blattes einzeichnen, was auf folgende Weise geschieht.

Für die Blätter, deren mittlerer Meridian mit dem Hauptmeridian zusammenfällt, ist selbstverständlich der mittlere Meridian (m m') die Abscissenaxe und die Senkrechte (p p') in seiner Mitte (0) die Ordinatenaxe. Auf allen Blättern aber, welche östlich oder westlich vom Hauptmeridian liegen, weicht die Abscissenaxe von dem mittleren Meridiane und folglich die Ordinatenaxe von dem mittleren Parallelkreis ab; denn die Seitenmeridiane convergiren gegen den Hauptmeridian und die Parallelkreise stehen auf ihnen senkrecht, während die Abscissenaxen dem Hauptmeridian und die Ordinatenaxen dessen Perpendikel parallel laufen. Die beigedruckte Fig. 357, in welcher m m' die Meridiane, p p' die Parallelkreise, x x' die



Abscissen- und yy' die Ordinatenaxen vorstellen, macht dieses anschaulich, und man entnimmt daraus leicht, dass, um die Axen xx' zu erhalten, auf allen Blättern der Ostseite des Hauptmeridians oben die Abweichung m'x' rechts und unten dieselbe Abweichung = mx links von mm' anzutragen ist, während auf allen Blättern der Westseite des Hauptmeridians m'x' links und mx rechts von mm' liegen muss. Wie gross die Abweichungen mx = m'x' für die einzelnen Blätter sind, lässt sich aus den Dimensionen des Erdsphäroids berechnen. Wir wollen indess auf diese Rechnungen hier nicht näher eingehen, da wir bei den Kartenprojectionen umständlicher davon zu reden haben, sondern lediglich bemerken, dass für jene vom Hauptmeridian gerechnete Länge von 10 Minuten die Abweichung der xAxe = 33', für 20 Minuten = 66', für 30 Minuten = 99', für 40 Minuten = 133', für 50 Minuten = 166' und für 60 Minuten = 199' ist. Entspricht demnach der Abstand 00' der Blattmitten 10 Minuten, so ist $m'x' = \frac{33'}{25000} = \frac{3300'''}{25000} = 0''',13$, bei dem östlichen (rechtseitigen) Blatte rechts, bei dem westlichen (linkseitigen) Blatte aber links und mx = 0''',13 bei dem östlichen Blatte links, bei dem westlichen aber rechts vom Meridian mm' aufzutragen.

Es bleibt nun noch übrig, zu zeigen, wie die Coordinaten der Dreieckpunkte in die nunmehr auch mit den Axen versehenen Detailblätter eingetragen werden; dieses Eintragen setzt jedoch voraus, dass man die Coordinaten der Blatt-Mittelpunkte kenne. Da indessen diese Punkte nicht von der Triangulirung abhängen, sondern auf beliebigen Annahmen beruhen, so kann man sie im Voraus ein für allemal berechnen und in einer Tabelle zusammenstellen. Einen Theil einer solchen von Hansen berechneten Tabelle theilen wir nachstehend mit dem Bemerken mit, dass die in der Ueberschrift vorkommenden Längenunterschiede 0 und $\pm$ 10 und $\pm$ 20 Minuten

sich auf den Hauptmeridian der Messung beziehen, und dass die Coordinaten in preussischen Ruthen ausgedrückt sind.

Geograph. Breite φ.	Längenunterschied = 0.		Längenunterschied = + 10'.		Längenunterschied = $\pm$ 20'	
	x	$\pm$ y	x	$\pm$ y	x	$\pm$ y
51° 12'	— 17720,04	0	— 17723.52	3092,60	— 17733.98	6185,18
51 6	14766,57	0	14770,06	3099,27	14780.53	6198,53
51 0	11813,15	0	11816.64	3105.93	11827.14	6211.86
50 54	8859,78	0	8863.28	3112.59	8873,79	6225,18
50 48	5906,47	0	5909.97	3119.24	5920.50	6238.49
50 42	— 2953.21	0	2956,72	3125.90	2967.27	6251,79
50 36	0	0	— 3,52	3132.55	— 14.08	6265.08
50 30	+ 2953.15	0	+ 2949.62	3139.18	+ 2939.06	6278.35
50 24	5906.26	0	5902.62	3145.80	5892.13	6291,60
50 18	8859.32	0	8855,78	3152.42	8845,17	6304,84
50 12	11812.34	0	11808.79	3159.04	11798.17	6318.07
50 6	14765.30	0	14761.75	3165,65	14751.11	6331,29
50 0	+ 17718,21	0	+ 17714.66	3172.25	+ 17704.00	6344 50

Was den Gebrauch dieser Tafel betrifft, so ist derselbe folgender. Hat man die Coordinaten des einzutragenden Dreieckpunktes, so findet man damit das Messtischblatt, in welches er fällt, indem man in der Tafel die Coordinatenwerthe aufsucht, welche den seinigen am nächsten kommen. Sind z. B. die Coordinaten eines solchen Punktes

$$x = + 12734^0{,}94 \text{ und } y = - 2783^0{,}12,$$

so liegen diesen Werthen am nächsten die Coordinaten

$$x' = + 11808^0{,}79 \text{ und } y' = - 3159^0{,}04,$$

welche zu der geographischen Breite $\varphi = 50^0\ 12'$ und zu der östlichen Längenunterschiede $\lambda = 10'$ gehören. Der Punkt fällt somit auf das Blatt, dessen Mitte diese Breite und Länge hat. Stellt man hierauf die Coordinatenunterschiede

$$x - x' = + 926^0{,}15 \text{ und } y - y' = + 375^0{,}92$$

her, so ist die Länge $x - x'$ südlich und $y - y'$ westlich von der Mitte des Blattes auf den in demselben eingetragenen Axen abzuschneiden und durch Perpendikel der Punkt, den man sucht, zu bestimmen.

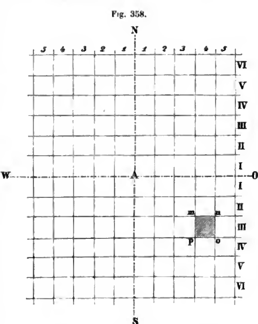
§. 311.

Aufgabe. Die Messtischblätter für die Detailaufnahme eines Landes in dem Falle vorzubereiten, wo das

graphische Netz aus Quadraten besteht, deren Seiten dem Hauptmeridian und dessen Perpendikel parallel laufen.

Ein graphisches Netz von Quadraten mit 8000′ Seite ist in Bayern und eines mit 4000′ Seite in Württemberg zur Anwendung gekommen. In dem erstgenannten Lande beträgt der Massstab der Detailmessung (mit geringen Ausnahmen) 1 : 5000 und in letzterem 1 : 2500; in beiden Ländern erhalten folglich die Messtischblätter Seiten von 16 Dezimalzoll Länge. Da das württembergische Messsystem im Wesentlichen mit dem bayerischen übereinstimmt, so werden wir die vorliegende Aufgabe lösen, indem wir lediglich das in Bayern beobachtete Verfahren zur Vorbereitung der Messtischblätter für die Detailaufnahme beschreiben.

Fig. 358.



Stellt der Punkt A in Fig. 358 den Normalpunkt der Messung (nördl. Frauenthurm), SN dessen Meridian und OW den Perpendikel desselben vor, so wird zunächst die ganze Landesoberfläche in vier Theile zerlegt, welche durch Südwest (SW), Nordwest (NW), Nordost (NO) und Südost (SO) bezeichnet werden. Theilt man hierauf den Meridian SN in lauter gleiche Theile von 8000′ Länge und zieht durch die Theilungspunkte grösste Kreise, welche auf SN senkrecht stehen, so wird jedes Viertel in Schichten zerlegt, welche fast durchgehends gleich breit sind, da die Ordinatenkreise (s. §. 305) auf die Breite des Landes nur äusserst wenig convergiren. Diese Schichten werden mit römischen Ziffern bezeichnet, wie aus der Figur zu entnehmen ist. Theilt man ferner jeden Ordinatenkreis vom

Meridian ab in lauter gleiche Theile von 8000′ Länge und verbindet diese Theilungspunkte durch gerade Linien, so wird jede Schichte in Vierecke zerlegt, welche nahezu Quadrate sind und auf die in der Figur angegebene Weise durch arabische Ziffern (Nummern) bezeichnet werden. Will man nun irgend ein Viereck (Messtischblatt, Steuerblatt) benennen, so geschieht diess durch Angabe des Viertels, der Schichte und der Nummer. Das schraffirte Blatt mnop z. B. wird genannt und auch überschrieben: S. O. III. 5.

Nach dieser geometrischen Eintheilung der Oberfläche des Landes stellen die Detailblätter Theile der Kugelfläche vor, welche in der Richtung von Ost nach West stets gleich breit sind, in der Richtung von Süd nach Nord aber eine etwas kleinere Höhe als 8000 Fuss haben, da die Ordinatenkreise convergiren und sich im Aequator schneiden. Diese Verschiedenheit der Höhe wächst mit dem Abstande der Blätter vom Münchener Meridiane und beträgt für ein Blatt, dessen Nummer = n ist, 0,0005344 n^2 Fuss. Ein Blatt also, das die Nummer 100 hat, von München somit im Mittel 804000 Fuss östlich oder westlich entfernt ist, hat eine Höhe von 8000′ — 5,344 = 7994,656 Fuss. Die Differenz von 5′.344 = 534‴,4 beträgt aber im Massstabe von 1 : 5000 nur 0‴,106 oder nahezu 1 Zehntel Linie, was in der Zeichnung des Vierecks kaum zu bemerken ist. Wegen dieses geringen Unterschiedes — der noch dazu der grösste ist, da weder die östlichen noch die westlichen Grenzen des Landes mehr als 804000 Fuss vom Münchener Meridian abliegen — kann man wohl alle Netzvierecke als Quadrate bezeichnen, wenn sie es auch in aller Strenge nicht sind.

Soll nun ein trigonometrischer Punkt, dessen Coordinaten

$$x = + 124824',5 \text{ und } y = - 93218',3$$

sind, wobei die positive Axe der x der südliche Theil (AS) des Meridians und die positive Axe der y der westliche Theil (AW) des Perpendikels ist, aufgetragen werden, so ist zunächst das Blatt zu bestimmen, in das er fällt. Dieses Blatt liegt aber offenbar in dem südöstlichen Viertel, und zwar in der 12. Nummer der XVI. Schichte; seine Bezeichnung ist demnach SO. XVI. 12. Man findet nämlich die Schichte, wenn man die Abscisse, und die Nummer, wenn man die Ordinate durch 8000′ dividirt und die Ganzen des Quotienten um 1 vermehrt.

So ist hier

$$\frac{x}{8000} = \frac{124824',5}{8000'} = 15,6, \text{ also die Schichte} = \text{XVI},$$

$$\frac{y}{8000} = \frac{93218',3}{8000'} = 11,6, \text{ mithin die Nummer} = 12.$$

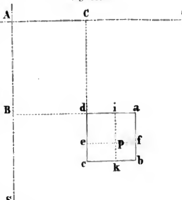


Fig. 359

Stellt in der Fig. 359 das Viereck a b c d das Blatt S O. XVI. 12. vor, so ist die Abscisse des Punktes d oder

$$AB = Cd = 15 \cdot 8000 = 120000'$$

und die Ordinate desselben Punktes d oder

$$AC = Bd = 11 \cdot 8000 = 88000'.$$

Es sind folglich auf der westlichen Seite und vom nördlichen Rande (d a) des Blattes gegen den südlichen (c b) hin noch

$$124824',5 - 120000' = 4824',5 = de$$

aufzutragen, um die Abscisse des gegebenen Punktes

$$Ce = x = + 124824',5$$

zu erhalten, und auf der nördlichen Seite (d a) vom westlichen Rande (d c) gegen den östlichen (a b)

$$93218',3 - 88000' = 5218',3 = di$$

abzuschneiden, um durch die Parallelen zu a d und e d den gesuchten Punkt p zu finden. Es versteht sich von selbst, dass die Abmessungen d e und d i durch ihre Ergänzungen e c und a i controlirt werden, und dass man die Parallelen e f, i k nur durch die Punkte f und k zieht, welche ebenso auf den Quadratseiten einzumessen sind, wie e und i.

Sind die Abscissen der aufzutragenden Punkte sehr gross, so bedürfen sie wegen der Convergenz der Ordinatenkreise noch einer kleinen Reduction. Nennt man diese Reduction δ, die Ordinate y, den Erdhalbmesser r, und bezeichnet u den Rest, welcher sich bei der Bestimmung der Schichte eines Blattes ergibt, nachdem man die Ganzen des Quotienten gefunden hat, so ist

$$\delta = \frac{u\, y^2}{2\, r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (343)$$

und diese Grösse wird von der Abscisse u, die nach der Lage des

Blattes von der Ecke an auf der östlichen oder westlichen Grenzlinie nach Norden oder Süden hin aufzutragen ist, abgezogen, so dass man also statt u die Länge

$$u - \delta = u - \frac{u^2 y^2}{2 r}$$

abzumessen hat, um die Abscisse des trigonometrischen Punktes auf dem ihm angehörigen Blatte zu erhalten. Diese Reductionen δ sind freilich sehr klein, wie das folgende Beispiel zeigt, müssen aber doch berücksichtigt werden, wenn die Ordinate y gross ist, d. h. wenn das Blatt weit vom Hauptmeridiane abliegt. Berechnet man δ für den Punkt p, der dem vorigen Beispiele zu Grunde lag, so ist hier

$$u = x - 15 \cdot 8000 = 4824',5 = 482^0,45$$

$$y = - 93,218',3 = - 9321^0,83$$

$$\log r = 6,3402033; \ \log \frac{1}{2 r^2} = 0,01856 - 13;$$

folglich, wenn man substituirt und ausrechnet, $\delta = 0,00437$ Ruthen $= 0,0437$ Fuss. Würde die Abscisse x bleiben, y_1 aber 10 mal so gross seyn als y, so erhielte man selbstverständlich für δ_1 die 100-fache Grösse des vorigen Werthes, also $\delta_1 = 4,37$ Fuss. Diese Reduction entspräche somit einem Blatte, dessen Nummer

$$n = \frac{93218,'3}{8000'} = 117$$

wäre, und welches über 36 Meilen vom Hauptmeridiane entfernt läge. In dem Massstabe von 1 : 5000 ist aber die absolute Grösse von 4,37 Fuss = 0',00087 = 0''',087, somit kleiner als $\frac{1}{10}$ Linie. Es sind demnach auch auf den entferntesten Detailblättern die Reductionen δ ganz unbedeutend.

8) Die Detailmessung der Bodenfläche.

§. 312.

Die Aufnahme der Einzelnheiten der Bodenfläche eines Landes zerfällt in zwei besondere Verrichtungen, nämlich in die Bestimmung der Richtpunkte und Richtungslinien, und in die Vermessung der einzelnen Parzellen. Mit dem ersteren Geschäfte haben sich nach den in mehreren Ländern üblichen Titeln die „Obergeometer," mit dem letzteren die „Geometer" zu befassen, während die unter Nr. 1 bis 6 betrachteten Arbeiten, welche sich auf die Anlage und Berechnung des Dreiecknetzes beziehen, den „Trigonometern," die

Bestimmungen der geographischen Lage des Normalpunktes und des Azimuths einer Dreieckseite aber dem „Astronomen" des Landes übertragen werden. Hier ist fast nur von dem Geschäfte der Obergeometer die Rede, da die Arbeiten der Geometer schon im Abschnitte C besprochen wurden. Nur das Rückwärtseinschneiden mit dem Messtische, welches am Schlusse abgehandelt ist, kommt beiden zu.

Die bisherige Vorbereitung der Messtischblätter, wenn sie nach Nr. 7 von den Obergeometern vollzogen ist, reicht zur Orientirung auf dem Felde noch nicht hin, weil bei einem Massstabe der Aufnahme von 1 : 5000 von den Punkten erster, zweiter, dritter Ordnung selten mehr als einer auf ein Blatt trifft, während viele Blätter gar keinen enthalten. Es müssen also ausser den schon bestimmten Netzpunkten noch so viele neue abgesteckt, eingemessen und auf die Blätter übergetragen werden, dass der Geometer im Stande ist, behufs der Parzellarmessung seinen Messtisch oder seine Abscissenlinien vollständig zu orientiren.

Zur einfachen Orientirung des Messtisches genügen zwar zwei Punkte (A, B) des Feldes, welche in verjüngter Entfernung (a, b) auf dem Blatte bezeichnet sind; aber die Prüfung der Aufstellung erfordert ausser diesen zwei Punkten entweder noch einen dritten Punkt (C, c) auf dem Felde und dem Messtiche, oder aber eine Visirrichtung (ef) zwischen zwei anderen Punkten (E, F), die zwar ausserhalb des Blattbezirkes liegen dürfen, wovon aber doch stets einer von den beiden ersten Punkten (A, B) aus sichtbar seyn muss.

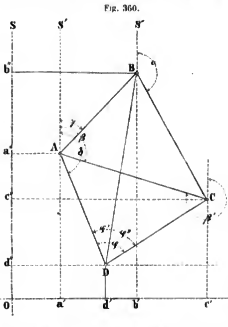
Wo nun von den erforderlichen drei Punkten einer oder zwei oder alle fehlen, müssen diese, und wo ein dritter Punkt schwer zu bestimmen ist, muss statt desselben eine Visirrichtung angegeben werden. Diese Bestimmungen können offenbar nur von dem trigonometrischen Netze ausgehen und sind im Grunde nichts als eine weitere Fortsetzung dieses Netzes. So lange die hierauf bezüglichen Arbeiten bloss darin bestehen, neue auf dem Felde bezeichnete Punkte durch Vorwärtsabschneiden mit dem Theodolithen zu bestimmen, ist hier weiter nichts mehr zu bemerken; sind aber die trigonometrischen Punkte, wie dieses namentlich bei denen dritter Ordnung häufig der Fall ist, unzugänglich, so dass kein Vorwärtsabschneiden stattfinden kann: so hat man eine oder mehrere der nachfolgenden Aufgaben zu lösen.

§. 313.

Aufgabe. Mit Hilfe der bekannten Lage dreier unzugänglicher Punkte des Feldes die unbekannte Lage eines gegebenen vierten Punktes von dessen Stelle aus zu bestimmen.

Diese zuerst von Pothenot behandelte und nach ihm benannte Aufgabe lässt sich sowohl durch Rechnung als durch Zeichnung auf verschiedene Arten lösen. Hier haben wir es nur mit der analytischen Lösung zu thun; die graphische wird erst bei den Detailmessungen oder dann nöthig, wenn sich auf einem Messtischblatte schon drei Punkte befinden, welche drei gegebenen in der Natur entsprechen.

Fig. 360.



Es seyen nun (Fig. 360) A, B, C die drei Punkte des Feldes, deren Coordinaten x_1, x_2, x_3 und y_1, y_2, y_3 in Bezug auf die Abscissenaxe OS und die senkrechte Ordinatenaxe OW gegeben sind, und D stelle den Punkt des Feldes vor, dessen Coordinaten x und y gesucht werden. Da man die Coordinaten der drei Eckpunkte des Dreiecks ABC kennt, so sind auch dessen Seiten $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, sowie seine Winkel A, B, C und die Neigungswinkel der Seiten gegen die Abscissenaxe, nämlich $S'AB = \gamma$, $S'AC = \beta$, $S''BC = \alpha$ bekannt, oder doch aus den Coordinaten leicht zu berechnen.

Setzt man die unbekannte Länge der Seite $AD = d$ und deren Neigungswinkel $S'AD$ gegen die Abscissenaxe $= \delta$, so ist leicht einzusehen, dass

$$x = x_1 + d \cos \delta \quad \ldots \ldots \quad (344)$$

$$y = y_1 + d \sin \delta \quad \ldots \ldots \quad (345)$$

ist, und dass folglich nur die zwei Unbekannten d und δ zu bestimmen sind, um die Aufgabe zu lösen.

Nun folgt aber aus den beiden Dreiecken DAB und DAC sehr einfach

$$\frac{c \sin \varphi}{b \sin \varphi'} = \frac{\sin [\delta - (\beta - \varphi)]}{\sin [\delta - (\gamma - \varphi')]},$$

und wenn man den Hilfswinkel μ aus der Gleichung

$$\frac{c \sin \varphi}{b \sin \varphi'} = \operatorname{tg} \mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (346)$$

berechnet und $\beta - \varphi = \varepsilon$, $\gamma - \varphi' = \varepsilon'$ setzt:

$$\frac{1 + \operatorname{tg} \mu}{1 - \operatorname{tg} \mu} = \frac{\sin(\delta - \varepsilon') + \sin(\delta - \varepsilon)}{\sin(\delta - \varepsilon') - \sin(\delta - \varepsilon)},$$

oder nach den bekannten Umformungen:

$$\operatorname{tg}(45^0 - \mu) = \cot \tfrac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon') \,.\, \operatorname{tg}[\delta - \tfrac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon')]$$

woraus, wenn man $\delta - \frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon') = \zeta$ setzt, weiter folgt:

$$\operatorname{tg} \zeta = \operatorname{tg}(45^0 + \mu) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (347)$$

Ist hieraus ζ berechnet, so erhält man

$$\delta = \zeta + \tfrac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (348)$$

und hiermit aus den Dreiecken DAB und DAC zwei Werthe von d, nämlich

$$d = \frac{b \sin(\delta - \varepsilon)}{\sin \varphi} = \frac{c \sin(\delta - \varepsilon')}{\sin \varphi'} \quad . \quad . \quad . \quad (349)$$

Um die vorliegende Aufgabe numerisch zu lösen, wird man aus den gegebenen Coordinaten zuerst die zwei Seiten b, c und ihre Neigungswinkel mittels der Formeln:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$b = \frac{y_3 - y_1}{\sin \beta}$$

$$c = \frac{y_2 - y_1}{\sin \gamma}$$

und hierauf mit Hilfe der gemessenen Winkel φ und φ' die Differenzen $\beta - \varphi = \varepsilon$, $\gamma - \varphi' = \varepsilon'$ und nach Gleichung (346) den Hilfswinkel μ berechnen. Damit erhält man aus Gleichung (347) den Winkel ζ mit diesem nach Gleichung (348) den Winkel δ, hiemit nach Gleichung (349) die Seite d, und wenn auch diese gefunden ist, nach den Gleichungen (344) und (345) die gesuchten

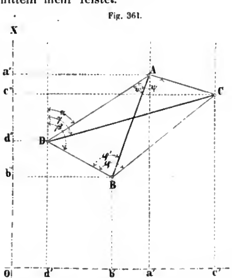
Coordinaten x und y. Dass bei diesen Rechnungen die algebraischen Vorzeichen gehörig zu berücksichtigen sind, bedarf wohl kaum der Erinnerung.

§. 314.

Aufgabe. Von zwei unzugänglichen Punkten des Feldes sind die Coordinaten bekannt und zwei andere Punkte sind auf dem Felde gegeben; man soll deren Lage durch blosse Winkelmessung bestimmen.

Da diese Aufgabe zuerst von Hansen (in Nr. 419 der astronomischen Nachrichten von Schumacher) aufgestellt und gelöst wurde, so kann sie, wie die vorige nach Pothenot, füglich nach ihm benannt werden. Ihr Nutzen in der praktischen Geometrie ist mindestens eben so gross als jener der Pothenot'schen Aufgabe, da sie aus der bekannten Lage von nur zwei Punkten die unbekannte Lage von zwei anderen Punkten finden lehrt, also mit geringeren Hilfsmitteln mehr leistet.

Fig. 361.



Bezeichnen (in Fig. 361) C, D die bekannten, A, B die unbekannten Punkte; sind ferner die Coordinaten von A, B, C, D der Reihe nach x_1, x_2, x_3, x_4 und y_1, y_2, y_3, y_4; setzt man die Längen der Linien AD = a. BD = b, Cd = c und ihre Neigungswinkel gegen die Axe der x in dem Punkte D nach einander = α, β, γ, und heissen endlich die in A und B beobachteten und in der Figur angedeuteten Horizontalwinkel φ, φ' und ψ, ψ': so ergeben sich aus den drei Dreiecken ACD, CBD, ABD folgende vier Gleichungen:

$$a \sin \psi = c \sin (\psi + \gamma - \alpha)$$
$$b \sin \varphi = c \sin (\varphi + \beta - \gamma)$$

$$a \sin \varphi' = b \sin \varphi'$$
$$\beta - \alpha = 180^0 - (\varphi' + \psi'),$$

welche gerade hinreichen, die vier unbekannten Grössen a, b, α, β zu bestimmen. Hat man aber diese, so ist für die Punkte A und B

$$x_1 = x_4 + a \cos \alpha \quad , \quad y_1 = y_4 + a \sin \alpha \quad . \quad . \quad (350)$$
$$x_2 = x_4 + b \cos \beta \quad , \quad y_2 = y_4 + b \sin \beta \quad . \quad . \quad (351)$$

und folglich Alles gefunden, was man sucht.

Setzt man die bekannte Differenz $\beta - \alpha = 2\delta$ und die noch unbekannte Summe $\beta + \alpha = 2\sigma$, so findet man hieraus

$$\alpha = \sigma - \delta \text{ und } \beta = \sigma + \delta,$$

und setzt man ferner die bekannten Winkel

$$\psi + \gamma + \delta = \zeta \text{ und } \varphi - \gamma + \delta = y,$$

so nehmen die zur Bestimmung der noch übrigen drei unbekannten Grössen a, b, σ dienenden drei Gleichungen folgende Form an:

$$a \sin \psi = c \sin (\zeta - \sigma)$$
$$b \sin \varphi = c \sin (\eta + \sigma) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (352)$$
$$a \sin \varphi' = b \sin \varphi'.$$

Dividirt man die erste durch die zweite und nimmt den Werth von a : b aus der dritten, so fallen alle Entfernungen weg und man erhält:

$$\frac{\sin \varphi' \sin \psi}{\sin \varphi \ \sin \psi'} = \frac{\sin (\zeta - \sigma)}{\sin (\eta + \sigma)}.$$

Setzt man die bekannte erste Seite dieser Gleichung $= \operatorname{tg} \mu$, so gelangt man durch dasselbe Verfahren, welches im vorigen Paragraph beobachtet wurde, zu der Gleichung

$$\operatorname{tg} [\sigma + \tfrac{1}{2} (\eta - \zeta)] = \operatorname{tg} (45^0 - \mu) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\eta + \zeta),$$

aus welcher somit σ gefunden werden kann. Denn setzt man $\operatorname{tg} [\sigma + \frac{1}{2} (\eta - \zeta)] = \operatorname{tg} \omega$, so ist ω als bekannt anzusehen und daher

$$\sigma = \omega + \tfrac{1}{2} (\zeta - \eta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (353)$$

Mit σ sind aber auch α und β gefunden, da

$$\alpha = \sigma - \delta$$
$$\beta = \sigma + \delta$$

ist, und damit sind auch a und b bekannt, denn aus den Gleichungen (352) folgt:

$$a = \frac{c \sin (\zeta - \sigma)}{\sin \psi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (354)$$

$$b = \frac{c \sin (\eta + \sigma)}{\sin \varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (355)$$

Führt man diese Werthe von a, b, α, β in Gleichung (350) und (351) ein, so findet man die gesuchten Coordinaten x_1, y_1, x_2, y_2, und die vorliegende Aufgabe ist somit gelöst.

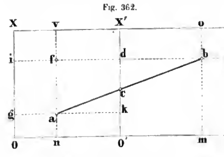
Der Ausdruck für $\operatorname{tg} \mu$ (Gleichung 346) nimmt die Form $0/_0$ an, wenn die zwei Punkte A und B gleichzeitig auf der Linie CD liegen; denn in diesem Falle ist der Winkel $\psi = \varphi = 180^0$ und folglich $\sin \psi = 0$. Man muss also zu vermeiden suchen, dass A und B auf CD oder auch nur sehr nahe an CD liegen. Liegt jedoch nur einer der unbekannten Punkte auf der Linie CD, so geben die entwickelten Formeln ohne Anstand die Lage der beiden Punkte A und B.

Es versteht sich von selbst, dass man aus den Coordinaten von A und B die Länge AB berechnen und diese Coordinaten wieder als gegeben ansehen kann, um zwei andere unbekannte Punkte daraus zu bestimmen.

§. 315.

Aufgabe. Auf zwei aneinanderstossenden Messtischblättern sind zwei trigonometrische Punkte A, B unter a, b eingetragen; man soll die Orientirungslinie zwischen diesen Punkten berechnen und auftragen (Fig. 362).

Fig. 362.



Sind die Coordinaten des Punktes a in Bezug auf die Axen OX, OY $= x_1, y_1$, und die des Punktes b in Bezug auf die Axen O'X', O'Y $= x_2, y_2$ gegeben, so handelt es sich darum, den Abstand O'c = y zu bestimmen, um auf dem einen Blatte die Orientirungslinie ac, welche durch B, b geht, und auf dem anderen Blatte die Richtung bc, welche durch A, a geht, auftragen und bei der Aufstellung des Messtisches benützen zu können.

Denkt man sich durch b die Linie bi senkrecht zu O'X' und OX, durch a aber die Linie ae parallel zu O'X und OX gezogen, so entstehen zwei rechtwinkelige ähnliche Dreiecke abf und cbd, in denen

$$af = x_2 - x_1,\ fb = y_1 + y_2,\ db = y_2$$

bekannt ist; man kann folglich

$$cd = \frac{x_2 - x_1}{y_1 + y_2} \cdot y_2$$

berechnen. Hat man aber cd, so ist cd + cO' = y_2 und daher

$$y = cO' = y_2 - cd = y_2 \left(1 - \frac{x_2 - x_1}{y_1 + y_2}\right)$$

Trägt man die Länge y von O' auf der Seite O'X' der beiden Blätter ab, so ist o und damit auf dem einen Blatte ac, auf dem anderen bc bestimmt. Als Controle der Zeichnung ist anzuwenden, dass man von X_1 aus die Länge s — y abschneidet, wobei s die Länge der Quadratseite bezeichnet.

So wie die Richtungen ae, bc zwischen den Punkten A, a und B, b berechnet und aufgetragen wurden, lassen sich zwischen irgend zwei anderen Punkten Absehlinien herstellen; die dabei vorkommenden Rechnungen und Zeichnungen sind aber in allen Fällen (auch wenn die Punkte auf nicht aneinanderstossenden Blättern liegen) so einfach, dass wir sie unbedenklich dem Leser selber überlassen können. Hinsichtlich der Zeichnung der Richtungslinien ist nur zu bemerken, dass man sie so scharf und so lang als möglich zieht, um das Lineal der Kippregel genau anlegen zu können, und dass die Bezeichnung derselben ausserhalb der Randlinien (d. i. der Viereck- oder Quadratseiten) angebracht wird.

Sind auf ein Messtischblatt drei Punkte a, b, c, welche drei ähnlich liegenden Punkten A, B, C des Feldes entsprechen, aufzutragen, so geschieht das Orientiren des Messtisches sehr leicht und sicher, wenn alle oder auch nur zwei Punkte zugänglich sind. Dagegen wird die Aufstellung umständlicher und auch weniger sicher, wenn keiner der drei Punkte des Feldes zugänglich ist. Wie man in solchen Fällen den Messtisch auf einem gegebenen Punkte D orientirt, lehrt der folgende Paragraph.

§. 316.

Aufgabe. Mit Hilfe des Messtisches aus der bekannten Lage dreier Punkte die unbekannte Lage eines vierten auf dem Felde gegebenen Punktes zu bestimmen, ohne sich an die drei bekannten Punkte zu begeben.

Diese auch unter dem Namen „Rückwärtseinschneiden“ auf drei Punkte bekannte Aufgabe wurde bereits in §. 313 durch Rechnung

gelöst; hier wird bloss die Zeichnung als Hilfsmittel gebraucht. Die drei bekannten Punkte sollen auf dem Felde mit A, B, C und auf dem Messtische mit a, b, c bezeichnet seyn: das Bilddreieck **abc** ist selbstverständlich dem Naturdreieck ABC ähnlich, und beide hat man sich auf eine horizontale Ebene, wofür man die des richtig gestellten Messtischblattes ansehen kann, projicirt zu denken. Der vierte auf dem Felde gegebene Punkt heisse D und sein auf dem Messtische gesuchtes Bild d. Unsere Aufgabe verlangt nun: dass von D aus durch blosse Winkelmessung und Zeichnung der Punkt d so bestimmt werde, dass das Viereck **abcd** dem Vierecke ABCD völlig ähnlich sey.

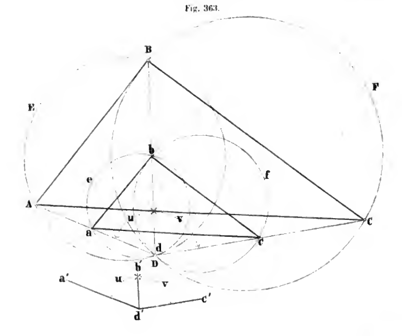
Es gibt verschiedene Auflösungen dieser Aufgabe: die einen geben den gesuchten Punkt d direkt durch Construction, die anderen indirekt durch Probiren.

Das indirekte Verfahren führt hier in der Regel schneller zum Ziele als das direkte, wesshalb es auch meist angewendet wird. Wir werden beide Verfahrungsweisen erörtern.

1) Direkte Auflösungen der Pothenoth'schen Aufgabe.

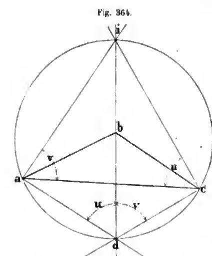
a) Denkt man sich von dem Punkte D aus die Horizontalwinkel

Fig. 363.



u und v, unter welchen die Dreieckseiten AB und CB gesehen werden, bestimmt und über AB einen Kreis ACB beschrieben, welcher in der Richtung nach D auf dem Bogen ACB den Peripheriewinkel u fasst, so muss dieser Kreis offenbar durch D gehen, weil der Winkel ADB = u ist. Denkt man sich ebenso über BC einen Kreis beschrieben, der auf dieser Sehne und gegen D hin einen Peripheriewinkel v fasst, so muss dieser Kreis ebenfalls durch D gehen, weil der Winkel BDC = v ist. Was nun von dem Vierecke ABCD gilt, muss offenbar auch für das Viereck abcd gelten, weil dieses jenem ähnlich ist: d. h. der Punkt d liegt gleichzeitig auf dem Kreise aeb, welcher rechts der Sehne ab und auf ihr den Peripheriewinkel u fasst, und auf dem Kreise bfe, welcher über der Sehne be so beschrieben ist, dass er links von ihr und auf ihr den Peripheriewinkel v liefert; der Punkt d kann folglich nur in dem Schnittpunkte der beiden Kreise liegen. Dieses direkte Verfahren erfordert also nichts als die Messung der Winkel u, v und die Construction der eben beschriebenen zwei Kreise aeb, bfc, welche die Fig. 363 ebenfalls darstellt. Diese zwei Kreise fallen aber, wie man sich leicht überzeugt, in einen zusammen, wenn der Punkt D entweder auf dem Kreise ABC liegt, oder wenn die drei Punkte A,B,C eine Gerade bilden, welche durch D geht. In dem ersten Falle liefert jeder Punkt des Kreises ABCD die Peripheriewinkel u und v, wodurch D unbestimmt bleibt; und in dem letzteren Falle hätte man es eigentlich mit einem Kreise von unendlichem Halbmesser und mit Winkeln u und v, welche beziehungsweise = 0 und 180° wären, zu thun; D bleibt also auch hier unbestimmt. Diese zwei Fälle (welche im Grunde nur einer sind) ausgenommen, erhält man durch die Messung der Winkel u, v und die Construction der Kreise aeb, bfe stets den gesuchten Punkt d. Bei den folgenden Betrachtungen sind diese Fälle stillschweigend ausgeschlossen.

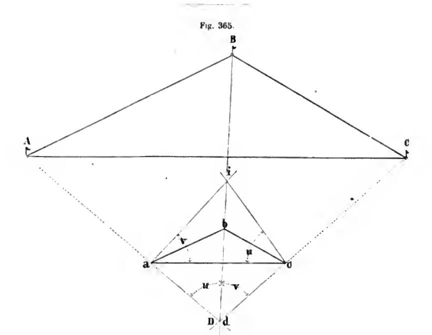
b) Eine zweite direkte Auflösung der Pothenot'schen Aufgabe besteht darin, die Winkel u und v zu messen und wie Fig. 364 zeigt, u an die Linie ac und die Ecke c = aei, v aber an dieselbe Linie ac und die Ecke a = cai anzutragen, den Schnittpunkt i der Schenkel ei, ai zu suchen, über a, i, e einen Kreis zu beschreiben, ib zu ziehen und den Schnittpunkt d dieser Geraden mit dem Kreise als den gesuchten Punkt zu nehmen. Der Punkt d entspricht offenbar den gestellten Bedingungen: denn es ist der Winkel adb =



aci = u, weil beide Winkel auf der Sehne ai des Kreises aic stehen; und es ist ferner der Winkel adb = cai = v, weil cdb und cai zu der Sehne ic des Kreises aic gehören. Man sieht leicht ein, dass diese direkte Lösung um so unsicherer wird, je kleiner der Abstand der Punkte i und b ist, weil mit der Abnahme der Länge ib die Unsicherheit der Richtung ibd, in welcher d liegt, wächst. Dieser Umstand und die Schwierigkeit, auf dem Messtische Kreise zu construiren, welche durch drei gegebene Punkte gehen, bewirken, dass diese zweite direkte Lösung fast so wenig als die erste angewendet wird.

c) Das von Bohnenberger angegebene Verfahren, einen Punkt auf drei andere rückwärts einzuschneiden, unterscheidet sich von dem zweiten nur dadurch, dass man die Winkel u und v sofort bei der Aufnahme an die Seite ac legt und die Construction des Kreises aic erspart. Denkt man sich nämlich den Punkt a über D gestellt und ac nach DC gerichtet, so wird die Kippregel, wenn sie an a liegt und auf B eingestellt ist, den Winkel cai = v geben; denkt man sich dann ferner den Punkt c über D und die Seite ca in die Richtung DA gebracht, so liefert die an c liegende und auf B gerichtete Kippregel den Winkel aci = u, und den Schnittpunkt i, welcher nach der vorigen Figur mit dem Punkte b in der Richtung BD liegen muss; denkt man sich endlich den Messtisch so gestellt, dass die auf ihm gezogene Linie bi durch B geht und der zu erwartende Punkt d nahezu in das Loth von d fällt, so braucht man schliesslich nur noch die Kippregel an a oder c zu legen und auf A oder C einzustellen, um den Schnitt d mit bi zu finden. Stellt man nach einander auf beide Punkte A und C ein, so sollen sich die drei Visirlinien aA, cC, bB in einem und demselben Punkte d schneiden; geschieht es nicht, so ist die Arbeit mehrmals zu wiederholen und zu verbessern, bis jene Forderung erfüllt ist. Es würde

Fig. 365.



zu mühsam seyn, wenn man den Messtisch dreimal so stellen wollte, dass a, c und der muthmassliche Punkt d genau über D kommen; es ist aber auch diese dreimalige Aufstellung nicht nöthig, wenn man überlegt, dass die Winkel u und v auch dann genau genug erhalten werden, wenn man bloss den vorläufig angenommenen Punkt d über D bringt und hierauf den Messtisch so dreht, dass die Seite ac einmal durch C und das anderemal durch A geht. Der Fehler δ, welcher hierdurch in den Winkel v kommt, ist ausgedrückt durch

$$\sin \delta = \frac{e}{l},$$

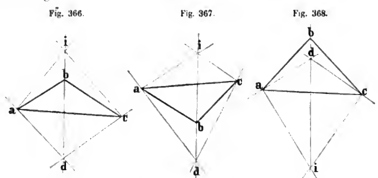
wobei e die Excentricität des Punktes a, d. i. den horizontalen Abstand dieses Punktes von dem Lothe in D, und l die Entfernung DC bezeichnet. Da aber δ klein ist, so kann man

$$\delta = 206265 \cdot \frac{e}{l} \text{ Sek.}$$

setzen. Dieser Ausdruck gilt selbstverständlich auch für den Winkel u, wenn man für e und l die entsprechenden Werthe setzt. Ist z. B. e = 0,'2 und l = 1000', so wird der Winkelfehler δ = 41,2

Sekunden, also so klein, dass man ihn durch die Zeichnung auf dem Messtische nicht mehr ausdrücken kann.

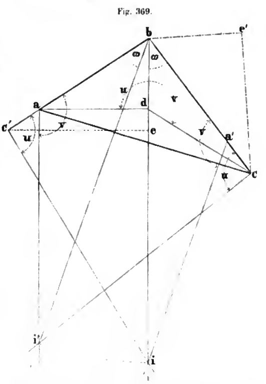
Durch verschiedene Annahmen über die Lage des Punktes D gegen A, B, C kann man leicht die Fälle auffinden, in welchen diese dritte direkte Lösung der vorliegenden Aufgabe mehr oder weniger Genauigkeit gibt: sie ist nämlich um so ungenauer, je kürzer die Orientirungslinie bi ist; wie sich aber diese darstellt, mag man an den nachstehenden drei Figuren ersehen, in welchen der Punkt D zweimal ausserhalb und einmal innerhalb des Dreiecks ABC liegt.



d) In Schumachers astronomischen Nachrichten Bd. 3. S. 194 hat Bessel eine direkte Lösung der Pothenot'schen Aufgabe mitgetheilt, welche theilweise mit dem Bohnenberger'schen Verfahren übereinstimmt und auf der nachfolgenden Betrachtung beruht. Gelten nämlich die bisherigen Bezeichnungen noch ferner und denkt man sich den Punkt d bereits gefunden, so werden u und v die Winkel seyn, unter denen in D die Seiten AB und BC erscheinen. Macht man in der Fig. 369 die Linie be′ = be und zieht c′e parallel zu ad bis sie von der verlängerten bd geschnitten wird; legt man hierauf das Dreieck bec′ so auf be, dass e′ auf c und e nach e′ kommt; und trägt man endlich den Winkel v in a an die Seite ab und u in c an die Seite bc; so entstehen zwei Vierecke bdce′ und bai′e, welche einander ähnlich sind, weil sie gleiche Winkel haben und bd : be′ = ba : be ist. Zieht man in dem Vierecke bai′c die Diagonale bi, so ist der Winkel dbe = abi′ = ω; man kann also durch die Diagonale bi, welche lediglich aus den Winkeln u und v hervorgeht, den Winkel ω bestimmen, der seinerseits, wenn

er an bc getragen wird, die Richtung be angibt, in welcher der gesuchte Punkt d liegen muss und die zugleich zur Orientirung des Dreiecks abc dient; denn legt man die Kippregel an be an und dreht die Tischplatte bis das Fernrohr auf B einsteht, so sind die Seiten des Dreiecks abc den Seiten des Dreiecks ABC parallel, und zieht man dann noch die Visirlinien aA und cC, so ergibt sich der Punkt d, welcher einem Standpunkte D entspricht, der sich lothrecht unter ihm befindet.

Fig. 369.



Will man sich die Mühe ersparen, den Winkel ω von ab nach bc überzutragen, so kann man dem Viereck bai'c sofort die Lage bc'ia' geben, in welcher dessen Diagonale bi mit der Orientirungslinie bde zusammenfällt; man braucht zu dem Ende nur ba' = ba, bc'i = u und ba'i = v zu machen. Es versteht sich von selbst, dass man die Winkel u und v unmittelbar bei ihrer Aufnahme an die Punkte c' und a' der Seiten c'b und a'b anträgt, indem man zuerst die Seite ba in die Richtung DA bringt und von c' nach B visirt, und hierauf bc in die Richtung DC dreht und von a' aus wieder auf B einstellt. Hinsichtlich der Genauigkeit der Bestimmung des Punktes d und der Orientirung des Messtisches gelten dieselben Bemerkungen, welche auf S. 236 über das Bohnenberger-sche Verfahren gemacht wurden.

2) Indirekte Auflösungen der Pothenot'schen Aufgabe.

a) Die vorausgehenden Betrachtungen über die Lage des

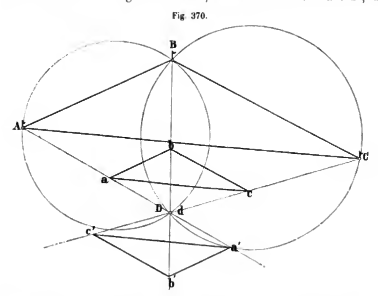
Standpunktes D, d, gegen die Dreieckpunkte A, a, B, b, C, c haben die nachstehend weiter entwickelten Sätze bereits vorbereitet; nämlich:

α) wenn der Messtisch für das Dreieck abc orientirt oder so gerichtet ist, dass ab mit AB, ac mit Ac und bc mit Bc parallel läuft, so schneiden sich die rückwärts gezogenen Visirlinien Aa, Bb, Cc in einem einzigen Punkte d; und

β) wenn der Messtisch nicht orientirt oder das Dreieck abc gegen ABC so gestellt ist, dass die gleichnamigen Seiten beider Dreiecke nicht parallel laufen, und wenn auch der Punkt D nicht auf dem Kreise ABC liegt: so schneiden sich die Visirlinien Aa, Bb, Cc in drei Punkten und bilden hierdurch das „fehlerzeigende Dreieck."

Zu α. Legt man die nach Nr. 1a S. 232 construirte Fig. abcd auf die ihr ähnliche Fig. ABCD so, dass der Punkt d auf D, der

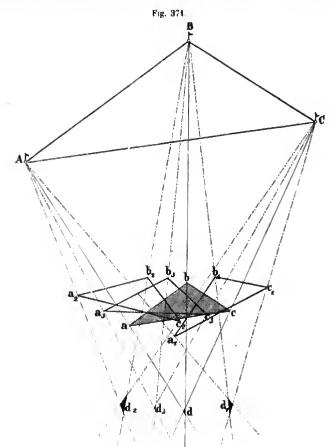
Fig. 370.



Winkel adb = u auf ADB und Winkel bdc = v auf BDC fällt: so ist offenbar ab parallel AB, ac parallel AC, bc parallel BC, weil der Construction gemäss Δ abd $\backsim$ Δ ABD, Δ acd $\backsim$ Δ ACD, Δ bdc $\backsim$ Δ BDC. Umgekehrt werden sich also die Linien Aa, Bb, Cc in einem Punkte d schneiden, wenn der Parallelismus der gleichnamigen Dreieckseiten vorausgesetzt wird; und dieses ist auch dann

noch der Fall, wenn das Dreieck abc die Lage a′b′c′ hat, also um 180° falsch orientirt ist. Aus dem gemeinsamen Schnitt der drei Linien Aa, Bb, Cc würde demnach noch nicht mit Sicherheit die richtige Lage des Dreiecks abc folgen, wenn die zweite um 180° fehlerhafte Lage auf dem Felde nicht sofort zu erkennen und zu beseitigen wäre. Eine Unsicherheit kann somit nur in dem Falle eintreten, wo D auf dem Kreise ABC, also d auf dem Kreise abc liegt. Ob aber dieser Fall gegeben ist, erkennt man leicht aus der ersten Bestimmung von d: denn legt man durch a, b, c einen Kreis und er geht durch d, so liegt auch D auf dem Kreise ABC, und es ist unter diesen Umständen die indirekte Lösung der Aufgabe durch Rückwärtseinschneiden ebenso unmöglich als die direkte. Selbst

Fig. 371



wenn d nur nahezu auf dem Kreise abc liegt, ist es gut, sich eine Controle über die Bestimmung von d dadurch zu verschaffen, dass man das Bild d' eines anderen Standortes D', welcher sicher vom Kreise ABC entfernt liegt, aufsucht und dessen Lage gegen d mit der von D' gegen D vergleicht.

Zu β. Der zweite Satz ist eigentlich eine Folge des ersten; denn wenn sich die Visirlinien — den unbestimmbaren Fall, wo D auf dem Kreise ABC liegt, ausgenommen — nur dann in einem Punkte schneiden können, wenn die gleichnamigen Seiten der Dreiecke abc und ABC einander parallel laufen, so müssen sie sich in jedem anderen Falle in drei Punkten schneiden und dadurch ein Dreieck bilden, welches die unrichtige Lage des Dreiecks abc zu erkennen gibt. Fig. 371 stellt mehrere solche Fälle dar: das schraffirte Dreieck abc liegt gegen ABC richtig und darum gibt es den Schnittpunkt d; zu a_1 b_1 c_1 gehört das fehlerzeigende Dreieck d_1: zu a_2 b_2 c_2 das Fehlerdreieck d_2 und zu a_3 b_3 c_3 das Dreieck d_3.

b) Um das fehlerzeigende Dreieck nach den Regeln von Lehmann zur richtigen Aufstellung des Messtisches über einem gegebenen Standpunkte benützen zu können, ist es nöthig, sich vorher den nachfolgenden Satz angeeignet zu haben:

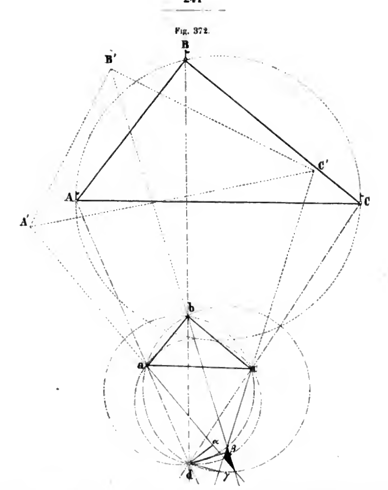
γ) Die senkrechten Abstände des Standpunktbildes von den verlängerten Seiten des fehlerzeigenden Dreiecksverhalten sich wie die Entfernungen des wirklichen Standpunktes von den drei Ecken des Naturdreiecks.

Mit Bezug auf Fig. 372 heisst dieser Satz:

Die von dem Punkte d auf die durch a, b, c gehenden Seiten des fehlerzeigenden Dreiecks gefällten Senkrechten $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ verhalten sich zu einander wie die Abstände DA, DB, DC.

Sind nämlich die drei Kreise adb, bdc, adc so über den Seiten ab, bc, ac des Dreiecks abc construirt, dass sie nacheinander in den gegen d hin gelegenen Abschnitten die Peripheriewinkel u, v, $u + v = w$ fassen: so ist klar, dass sich die durch a und b gehenden Seiten des fehlerzeigenden Dreiecks auf dem Kreise adb, die zu b und c gehörigen Seiten auf dem Kreise bdc, und die durch a und c gelegten Seiten auf dem Kreise adc schneiden und somit die Eckpunkte uvw des fehlerzeigenden Dreiecks auf diesen drei Kreisen liegen müssen. Auf dem Bogen du des Kreises adb stehen die

Fig. 372.



Peripheriewinkel δ und ε: sie sind folglich einander gleich; ε steht aber auch mit ζ auf dem Bogen dv des Kreises bdc: folglich ist auch $\varepsilon = \zeta = \delta$. Nun ist

$$\sin \delta = \frac{d\alpha}{da}, \ \sin \varepsilon = \frac{d\beta}{db}, \ \sin \zeta = \frac{d\gamma}{dc},$$

folglich auch $d\alpha : d\beta : d\gamma = da : db : dc$, und da wegen der Aehnlichkeit der Vierecke dabc und DABC die Proportion stattfindet: $da : db : dc = DA : DB : DC$, schliesslich:

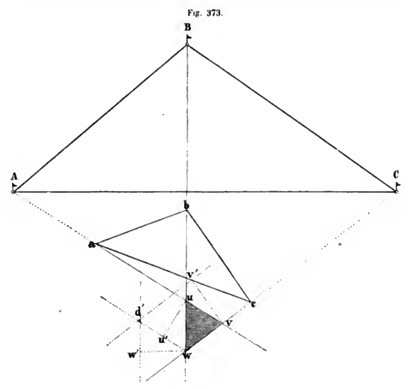
$$d\alpha : d\beta : d\gamma = DA : DB : DC. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (356)$$

was zu beweisen war.

Kennt man nun das Verhältniss der Abstände des Standpunktes

D von den Eckpunkten des Dreiecks ABC durch Schätzung nach dem Augenmasse, so kann man auch die beiläufige Lage des Punktes d finden, indem man nach Fig. 373, jedoch bloss in Gedanken, auf den Seiten des fehlerzeigenden Dreiecks Senkrechte errichtet, deren Längen uu', ww', vv' sich wie DA : DB : DC verhalten, und indem man weiter durch deren Köpfe u' v' w' Parallelen zu den durch a, b, c gehenden Seiten des fehlerzeigenden Dreiecks zieht, bis sie

Fig. 373.

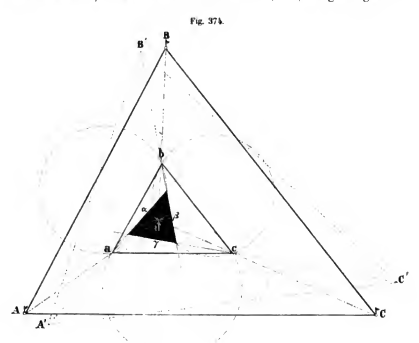


sich bei d' schneiden. Dieser Schnitt ist entweder ein Punkt, oder wie in der Figur ein sehr kleines Dreieckchen, das man selbst als einen Punkt ansehen kann. Mit Hilfe dieses Punktes d' orientirt man den Messtisch aufs Neue, indem man die Kippregel an eine der Geraden d'a, d'b oder d'c anlegt und die Tischplatte horizontal so weit dreht, bis beziehungsweise A, B oder C vom Fadenkreuze des Fernrohrs gedeckt wird. Findet diese Deckung in Bezug auf den Punkt A statt, so lege man weiter noch die Kippregel an b und c

und visire nach B und C: schneiden sich die rückwärts verlängerten Visirlinien wieder nicht in einem einzigen Punkte, so wird das zweite fehlerzeigende Dreieck, welches nun entsteht, viel kleiner als das vorige seyn, und eine Wiederholung des eben beschriebenen Verfahrens wird den gesuchten Punkt d liefern.

c) Auf welcher Seite des fehlerzeigenden Dreiecks der Punkt d zu suchen ist, kann man beurtheilen, wenn man in Gedanken die Stelle aufsucht, in welcher sich die zu ab, bc, ac gehörigen Be-

Fig. 374.



stimmungskreise schneiden würden, wenn man sie zöge; Lehmann hat aber auch besondere Sätze aufgestellt, welche die Auffindung des Punktes d erleichtern. Einer dieser Sätze heisst:

δ) J e n a c h d e m d e r S t a n d p u n k t a u s s e r - o d e r i n n e r h a l b d e s g e g e b e n e n N a t u r d r e i e c k s l i e g t, b e f i n d e t s i c h a u c h d a s B i l d d e s S t a n d p u n k t e s a u s s e r - o d e r i n n e r h a l b d e s f e h l e r z e i g e n d e n D r e i e c k s.

Der zweite Satz erfordert, um kurz ausgesprochen zu werden, vorher noch einige Erklärungen. Denkt man sich nämlich den

Grundkreis ABC gezogen, so kann der Standpunkt D folgende Lagen haben:

Nr. 1: innerhalb des Dreiecks ABC und des Grundkreises;

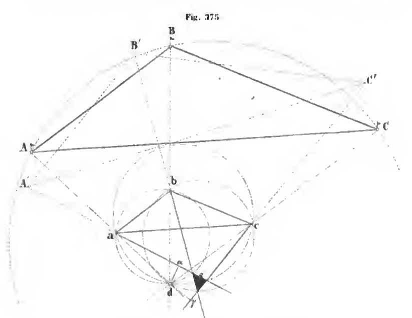
Nr. 2: ausserhalb des Dreiecks ABC, aber innerhalb des Grundkreises;

Nr. 3: ausserhalb des Grundkreises in einem Scheitelwinkel des Dreiecks ABC;

Nr. 4: ausserhalb des Grundkreises, einer Seite des Dreiecks ABC gegenüber; endlich

Nr. 5: auf einer Dreieckseite oder auf dem Grundkreise selbst.

Fig. 375



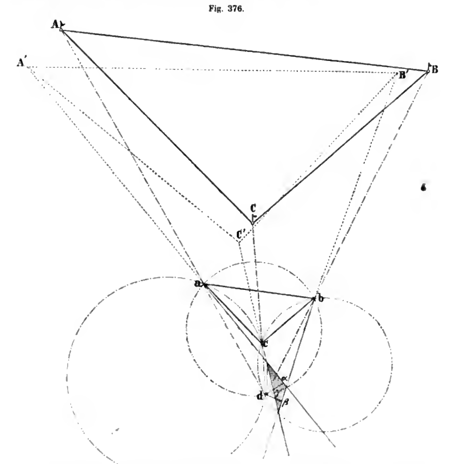
Die mit Nr. 5 bezeichneten Lagen kommen jedoch hier nicht in Betracht, weil die eine kein fehlerzeigendes Dreieck und die andere gar keine Lösung gibt.

Versteht man unter der mittleren Visirlinie diejenige verlängerte Seite des fehlerzeigenden Dreiecks, welche vom Standpunkte des Beobachters aus zwischen den äusseren Punkten des Bilddreiecks liegt, so kann man den zweiten Satz über die Lage des Standpunktes gegen das Fehlerdreieck so fassen:

e) Das Bild des Standpunktes und das fehlerzeigende

Dreieck werden durch die mittlere Visirlinie getrennt, wenn der wirkliche Standpunkt die Lagen Nr. 2 oder Nr. 3 hat; dagegen befinden sich Bild und Fehlerdreieck auf einer und derselben Seite der mittleren Visirlinie, wenn der Standpunkt wie in Nr. 4 liegt.

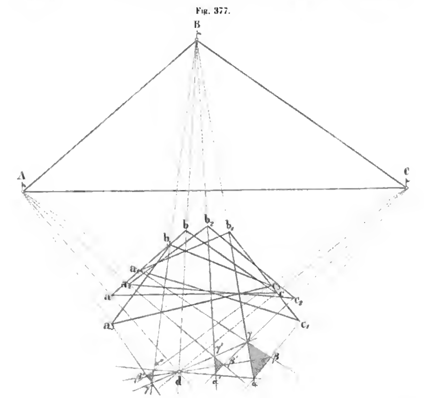
Fig. 376.



Wegen der untergeordneten Wichtigkeit der Sätze δ und ε übergehen wir ihre ziemlich umfangreichen Beweise, fügen aber zur Erläuterung noch die Fig. 376 bei, in welcher der Standpunkt die Lage Nr. 3 hat, während in Fig. 375 die Lage Nr. 2 und in Fig. 375 die Lage Nr. 1 angenommen wurde. In allen diesen Figuren stellt bβ die mittlere Visirlinie vor.

d) Ein von Bohnenberger herrührendes Verfahren, das Bild d aus zwei fehlerzeigenden Dreiecken zu finden, besteht darin, dass man, nachdem ein solches Dreieck ($\alpha\beta\gamma$, Fig. 377) vorhanden ist, den Tisch durch eine kleine Drehung etwas besser orientirt als vorher, und ein zweites Fehlerdreieck ($\alpha'\beta'\gamma'$) bestimmt, welches eine ähnliche Lage hat wie das erste und durch Verbindung der auf gleichen Bestimmungskreisen liegenden Punkte α, α', β, β' γ, γ' einen Schnittpunkt gibt, der den gesuchten Punkt so genau finden lässt, dass eine weitere Verbesserung desselben nicht mehr nöthig ist. Der Schnittpunkt wird nämlich um so weniger von dem gesuchten Bildpunkte d abweichen, je näher die Hilfslinien $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ mit den Bestimmungskreisen des Standpunktbildes zusammenfallen, und dieses ist um so mehr der Fall, je kleiner die fehlerzeigenden Dreiecke sind. Sollte das zweite fehlerzeigende Dreieck die entgegengesetzte Lage ($\alpha''\beta''\gamma''$) des ersten ($\alpha\beta\gamma$) erhalten, so wäre dieses ein

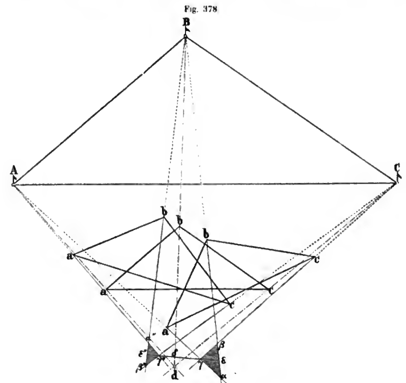
Fig. 377.



Zeichen, dass man bei der Verbesserung der Orientirung das Messtischblatt zu weit gedreht hat; gleichwohl können aber auch diese zwei Dreiecke zur annähernden Bestimmung von d führen, indem man α mit a'' und γ mit γ'' verbindet und die Linien $\alpha\alpha''$, $\gamma\gamma''$ so weit verlängert, bis sie sich schneiden.

e) Eine von Netto herrührende Lösung der Pothenot'schen Aufgabe hat grosse Aehnlichkeit mit der von Bohnenberger, in so ferne sie auch auf der Benützung zweier fehlerzeigender Dreiecke beruht. Hat man nämlich aus zwei Orientirungen des Messtisches zwei solche Dreiecke erhalten, welche eine entgegengesetzte Lage haben, also auf zwei verschiedenen Seiten der mittleren Visirlinie liegen, wie in Fig. 378, so verbinde man die mittleren Eckpunkte γ, γ'' der Fehlerdreiecke und suche auf der Verbindungslinie $\gamma\gamma''$ den Punkt δ, welcher diese Linie nach dem Verhältnisse $\gamma\varepsilon : \gamma''\varepsilon''$ in zwei Theile $\gamma\delta$ und $\gamma''\delta$ theilt; hierauf lege man die Kippregel an δ und b,

Fig. 378



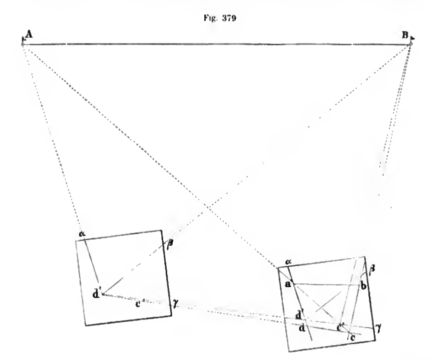
orientire den Tisch nach B und ziehe die Visirlinien aA und cC, welche den auf der mittleren Visirlinie δb liegenden gesuchten Punkt d geben. Eine Visirlinie aA oder cC würde zwar auch hinreichen, d zu erhalten; man zieht aber der Controle wegen alle beide. Den Beweis für dieses Verfahren mag der Leser selbst führen.

§. 317.

Aufgabe. Man soll den Messtisch, auf welchem das Bild einer unzugänglichen Geraden gegeben ist, in einem annähernd gegebenen Punkte orientiren.

Es seyen A und B die unzugänglichen Punkte des Feldes und a b das Bild ihres Abstandes von einander, sowie C der auf dem Felde annähernd gegebene und c der auf dem Messtische gesuchte Punkt. Stellt man zunächst in einem beliebigen Punkte D des Feldes den Messtisch so auf, dass ab dem Augenmasse nach zu AB parallel ist; visirt man ferner von dem auf den Tisch projicirten Bildpunkt d' die Punkte A, B, C an und zieht die Visirlinien

Fig. 379



d'α, d'β, d'γ; versetzt man hierauf den Messtisch nach C und zwar so, dass das nach dem Augenmasse angenommene Bild c'd' von CD in die Vertikalebene CD fällt, während c' lothrecht über C liegt; und schneidet man endlich die Punkte D, A, B von c' aus ein: so entsteht das Viereck a'b'c'd', welches ABCD ähnlich und parallel ist. Die Lage, welche der Messtisch jetzt hat, muss nun dazu benützt werden: erstens ab parallel zu AB zu machen, und zweitens über ab ein Viereck zu beschreiben, welches a'b'c'd' und ABCD ähnlich ist.

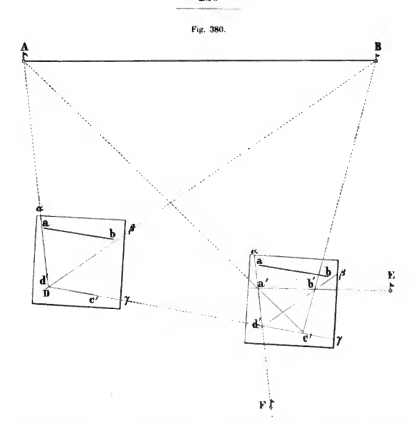
Zu dem Ende lege man die Kippregel an a'b' so genau als möglich und stelle in grosser Entfernung einen Stab oder ein Signal E in die Visirlinie; ebenso verfahre man mit der Richtung a'd', indem man das Signal F bestimmt, und schliesslich senkele man den Punkt a' auf das Feld und bezeichne seine Projection mit einem Pfahle G. Ist dieses bei unveränderter Lage des Messtisches geschehen, so verändere man jetzt diese Lage so, dass der Punkt a über G und die Linie ab in die Richtung GE kommt; alsdann schneide man c durch die Visirlinien aA, bB und d durch cD, aF ab, senkele c auf das Feld und bestimme hierdurch die definitive Lage von C. Hiemit ist die Aufgabe gelöst.

§. 318.

Aufgabe. Die Entfernung zweier unzugänglicher Punkte A,B des Feldes ist bekannt und ein dritter Punkt C annähernd gegeben; man soll die Lage dieses Punktes gegen A und B bestimmen.

In einer passenden Entfernung von C wähle man einen Standpunkt D und stelle auf ihm und über C' wie in dem vorigen Falle ein Viereck a'b'c'd' her, welches ABC'D ähnlich und parallel ist. Nun trage man auf a'b' von a' aus das verjüngte Mass von AB = a'b ab und bestimme den Punkt c durch Rückwärtseinschneiden auf A und B. Senkelt man c auf das Feld, so ergibt sich die definitive Lage des Punktes C und der Tisch ist über diesem Punkte orientirt. Will man hierauf noch das Bild von D finden, so darf man nur von c nach D visiren und den Schnitt d mit der verlängerten a'd' bestimmen, welcher das gesuchte Bild ist. Man hat somit durch ein einfaches Verfahren die Lage zweier unbekannter Punkte gegen zwei

Fig. 380.



andere gefunden, von denen man bloss ihren horizontalen Abstand kennt; ein Ergebniss, das vielfältig benützt werden kann.

Zweiter Abschnitt.

Vertikalmessungen.

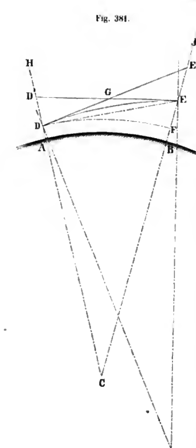
A. Messung der Vertikalwinkel.

§. 319.

Aufgabe. Den Einfluss der atmosphärischen Strahlenbrechung auf die Messungsresultate zu bestimmen.

So lange die Schenkel der zu messenden Vertikalwinkel nicht eine bedeutende Länge haben, also der beobachtete Punkt von dem Standorte des Beobachters nicht sehr weit entfernt ist, sind die in den §§. 133, 134, 137, 146 angegebenen Verfahrungsweisen zur Bestimmung jener Winkel vollständig ausreichend; überschreitet jedoch die gegenseitige Entfernung der zwei Punkte, zwischen denen eine genaue Vertikalmessung vorzunehmen ist, die Grösse von ungefähr 1000 Fuss, so muss an den nach der früheren Anleitung gefundenen Winkeln eine Verbesserung (ϱ) angebracht werden, welche von der atmosphärischen Strahlenbrechung herrührt und desshalb die „Refraction“ heisst.

Mit dieser Strahlenbrechung hat es folgende Bewandtniss. Stellt man sich nämlich die Atmosphäre der Erde ganz ruhig und mit einerlei Temperatur begabt vor, so werden sich die concentrischen Luftschichten, in welche man sich die Atmosphäre zerlegt denken kann, nach ihren specifischen Gewichten über einander lagern und diese Gewichte werden nach einer leicht zu bestimmenden geometrischen Reihe von unten nach oben abnehmen. Ein Lichtstrahl nun, der von einem hochgelegenen Punkte dieser Atmosphäre ausgeht, wird in immer dichtere Luftschichten gelangen und folglich von Schichte zu Schichte eine Brechung erleiden, welche ihn immer mehr von seiner geraden Bahn ablenkt und diese in eine gegen die Erde concave Curve verwandelt. In der Fig. 381 stellt ED diese, den ungleich hoch gelegenen Punkten D und E angehörige Lichtcurve vor, während DC und EC die durch D und E gehenden Erdhalbmesser sind. Ein in D befindliches Auge empfängt das von E kommende Licht in der Richtung DG, welche die Curve ED in D berührt, und versetzt desshalb die Lage des Punktes E in diese



Richtung (nach E_1); ein Auge aber, das sich in E befindet, sieht den Punkt D, von dem die Curve DE ausgeht, in der Richtung EG des letzten Curvenelementes (in D_1). Die Höhe Punktes D_1 ist grösser als die von D, und die von E_1 grösser als die von E: folglich besteht die Wirkung der Strahlenbrechung in der gedachten Atmosphäre darin, dass sie alle Gegenstände höher erscheinen lässt, als sie liegen, und folglich alle Zenithwinkel zu klein und alle Höhenwinkel zu gross macht. Der Winkel, um welchen man einen anvisirten Punkt über seiner wahren Lage sieht, heisst der Refractionswinkel oder auch kurz: die Refraction. Für den leuchtenden Punkt E und den Beobachtungsort D ist dieser Winkel $\varrho = EDE_1$ und für D und E die Refraction $\varrho_1 = DED_1$.

Befände sich die Atmosphäre der Erde wirklich in dem einfachen Zustande, den wir bis jetzt angenommen haben, so liese sich die Gleichung der Lichtcurve DE und damit auch der Betrag der Refraction in den Punkten D und E gleich ϱ und ϱ_1 strenge bestimmen.[1] Dieser Zustand der Atmosphäre ist aber nicht vorhanden, und es können sogar Fälle eintreten, in welchen die an der Erdoberfläche stärkere Erwärmung der Luft bewirkt, dass die unteren Luftschichten dünner sind als die oberen: in diesem Falle wird die Lichtcurve offenbar convex gegen die Erdfläche und folglich die Refraetion negativ. Zwischen dem negativen und positiven Werth gibt es selbstverständlich auch einen gleich Null, und dieser tritt ein, wenn in Folge der ungleichen Erwärmung die Luftschichten, durch welche.

[1] Vergl. Prof. Winkler's Aufsatz in Crelle's Journal der Mathematik Bd. 50 S. 32 u. s. f.

das Licht geht, gleich dicht werden. Unter diesen Verhältnissen ist also wenig Aussicht auf eine für alle Fälle passende genaue Bestimmung der Refractionsgrösse gegeben und desshalb die Hypothese erlaubt, dass die Lichtcurve DE ein sehr flacher Kreisbogen sey, welcher in der Regel gegen die Erdoberfläche concav ist.

Auf Grund dieser Annahme kann man wie folgt einen Ausdruck für den Refractionswinkel ϱ finden. Bezeichnet nämlich

r den Erdhalbmesser DC in dem Beobachtungspunkte D,
r_1 den Erdhalbmesser EC in dem leuchtenden Punkte E,
R den Halbmesser DL der Lichtcurve ED,
C den Mittelpunktswinkel DCE und
L den Mittelpunktswinkel DLE,

so ist, da die Länge der Curve DE von ihrer Horizontalprojection DF ausserordentlich wenig verschieden ist und dieser folglich gleich gesetzt werden kann,

$$r\,C = R\,L,$$

und da ferner $L = 2\,(E D E_1) = 2\varrho$, so findet man

$$\varrho = \frac{r\,C}{2\,R} = k\,C, \quad \ldots\ldots \quad (357)$$

wobei k das Verhältniss von $r:2R$ vorstellt und die Refractions-constante[1] heisst.

Diese Constante wird dadurch bestimmt, dass man in den beiden Punkten D und E, deren Horizontalabstand (arc. DF) bekannt ist, gleichzeitig die Zenithwinkel der Linie DE misst und aus der Beziehung, welche zwischen diesen Winkeln und dem Winkel ϱ stattfindet, den letzteren berechnet. Gleichzeitig werden die Zenithwinkel desshalb gemessen, weil man alsdann berechtigt ist anzunehmen, es sey $\varrho_1 = \varrho$.

Der Theodolith in D gibt in Folge der Strahlenbrechung nicht den wahren Zenithwinkel $H D E = Z$, sondern den scheinbaren $H D E_1 = z$; es ist aber $Z = z + \varrho$. Ebenso erhält man in E statt des wahren Zenithwinkels $J E D = Z_1$ den scheinbaren $J E D_1 = z_1$; es ist aber wieder $Z_1 = z_1 + \varrho$.

Aus der Figur findet man leicht, wenn man die beiden Aussenwinkel Z und Z_1 des Dreiecks DLE mit dessen inneren Winkeln vergleicht:

$$2\varrho = 180^0 + C - z - z_1 \quad \ldots\ldots \quad (358)$$

[1] Häufig wird auch das Verhältniss $r : R = k$ gesetzt; in diesem Falle ist also die Refractionsconstante doppelt so gross als hier.

Da aber nach Gleichung (357) auch $2\varrho = 2\,k\,C$, so erhält man folglich die gesuchte Constante

$$k = \frac{180^0 + C - z - z_1}{2\,C} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (359)$$

Aus vielfachen Beobachtungen, von verschiedenen Astronomen und Geodäten in verschiedenen Ländern und zu verschiedenen Jahres- und Tageszeiten, jedoch bei ruhiger und klarer Luft[1] gemacht, erhielt man folgende Werthe von k:

Lambert	fand	k = 0,0625;
Tob. Mayer	„	k = 0,0625;
Gauss	„	k = 0,0653;
Bessel	„	k = 0,0685;
Struve	„	k = 0,0618;
Coraboeuf	„	k = 0,0642.

Die meisten Franzosen nehmen nach Laplace und Delambre k = 0,08 und die Engländer sogar k = 0,10 an. In Deutschland benützt man in der Regel den von Gauss angegebenen Coeffizienten, welcher von dem Bessel'schen nur sehr wenig abweicht.

Am bessten verfährt man aber, wenn man die Vertikalmessungen so einrichtet, dass die Refraction in dem Resultate gar nicht mehr vorkommt. Wie man dieses bewirken kann, wird in der Folge an mehreren Stellen gezeigt.

Nach Gauss beträgt die mittlere Unsicherheit des Werthes von k bei ruhiger und klarer Luft den achten Theil seiner eigenen Grösse, so dass demnach bei solcher Beschaffenheit der Atmosphäre der wahre Werth von k zwischen 0,0735 und 0,0571 liegt; andere Beobachter fanden jedoch die Schwankungen der Refractionsconstanten viel grösser, wie schon die von den Franzosen und Engländern angewendeten Werthe zeigen, und wie insbesondere aus den Messungen von Baeyer hervorgeht, der „bei ruhiger Luft und angenehmer Temperatur“ einen grössten Werth von k = 0,1334 und „bei empfindlicher Kälte und ziemlich heftigem Winde“ einen kleinsten Werth von k = 0,0415 erhielt. Baeyer's Beobachtungen machen es überhaupt sehr wahrscheinlich, dass die Strahlenbrechung um so grösser ist, je mehr die Beobachtungszeit von dem wahren Mittage absteht. Darnach würde

$$k = b\,k' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (360)$$

[1] An einem sehr heissen stürmischen Tage fand Delambre k = — 0,0035 und bei schlechtem Wetter k = — 0,0351.

seyn, wenn man unter k' die Strahlenbrechungsconstante bei Sonnen-Auf- und Untergang und unter b die in halben Tagebögen [1] ausgedrückte Zeit versteht. Geht die Sonne z. B. um 4 Uhr auf, so ist die Zeit b von 4 bis 12 Uhr und von 12 bis 8 Uhr Abends gleich dem halben Tagebogen $= 1$; die Zeit von 8 bis 12 Uhr oder von 12 bis 4 Uhr Nm. gleich der Hälfte des halben Tagebogens, also $b = 0{,}5$ u. s. w. Geht dagegen die Sonne um 6 Uhr auf, so bezeichnet der halbe Tagebogen eine Zeit von 6 Stunden, und es würde demnach für Beobachtungen, die um 8 Uhr Vm. oder um 4 Uhr Nm. gemacht werden, $b = 0{,}666$ zu setzen seyn. Wie gross aber auch der ganze Tagebogen seyn mag, so ist doch immer für Beobachtungen, die während des wahren Mittags gemacht werden, $b = 0$; es müsste folglich für diese Beobachtungszeit auch $k = 0$ seyn, wenn der oben angeführte Satz von Baeyer richtig ist. Bestätigende Versuche hierüber fehlen indessen noch. Den Werth von k' hat Baeyer $= 0{,}1016$ gefunden; der Werth von $k = 0{,}0653$ fände somit statt wenn

$$b = \frac{k}{k'} = \frac{0{,}0653}{0{,}1016} = 0{,}6427$$

wäre, oder wenn an einem Tage, dessen Bogen 12 Stunden Zeit entspricht, die Beobachtungen um $8^h\ 9'$ Vm. oder $3^h\ 51'$ Nm. gemacht würden.

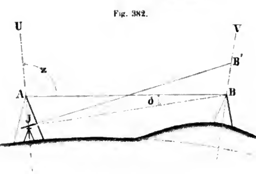
§. 320.

Aufgabe. Die Reduction der Vertikalwinkel auf den wahren Scheitelpunkt vorzunehmen.

Bei dem früher beschriebenen Verfahren, den Zenithwinkel einer Linie zu messen, wurde vorausgesetzt, dass die Drehaxe des Vertikalkreises des Theodolithen in einem Endpunkte der Linie liege. Dieses ist aber in der Regel nicht möglich, und es steht (wenn kein Heliotropenlicht angewendet wird) entweder das Instrument über oder unter dem genannten Endpunkte. Dieser Umstand veranlasst einen kleinen Fehler im Zenithwinkel, welcher berücksichtigt werden muss. Die Verbesserung des letzteren nennt man dessen Reduction auf den wahren Scheitel.

Nimmt man, wie in Figur 382 geschehen, an, dass, um

[1] Tagebogen = dem Bogen, den scheinbar die Sonne zwischen Auf- und Untergang beschreibt.



den Zenithwinkel V A B $= Z$ zu finden, der Vertikalkreis unterhalb A im Punkte J aufgestellt sey, so wird man zuerst den scheinbaren Zenithwinkel V A B $= z$ und hieraus den wahren für den Punkt J $=$ VJB $= z + \varrho$ erhalten.

Der gesuchte Zenithwinkel ist aber

$$Z = z + \varrho + \delta, \quad \ldots \ldots \quad (361)$$

wenn A B J $= \delta$ gesetzt wird. Aus dem Dreiecke A B J folgt, wenn A J $=$ h und A B $=$ b gegeben ist:

$$\sin \delta = \frac{h}{b} \sin (z + \varrho),$$

und da δ jedenfalls sehr klein ist, also $\sin \delta : \sin 1'' = \delta'' : 1''$ gesetzt werden darf,

$$\delta = \frac{h \sin (z + \varrho)}{b \sin 1''} \quad \ldots \ldots \quad (362)$$

Läge der Punkt über A, so würde, wie leicht einzusehen,

$$Z = z + \varrho - \delta$$

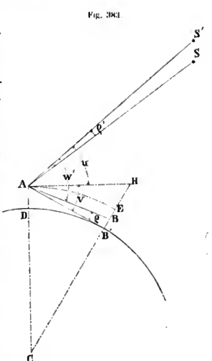
seyn, δ aber seinen absoluten Werth behalten, wenn h und b unverändert bleiben.

§. 321.

Aufgabe. Die Kimmtiefe oder die Depression des Meereshorizonts zu bestimmen.

Nach §. 146 (Bd. I, S. 272) wird auf dem Meere oder in dessen Nähe mit dem Spiegelsextanten oder dem Spiegelkreise der Höhenwinkel eines Gestirns dadurch gemessen, dass man die Bilder des Meereshorizonts und Gestirns zur Deckung bringt: bezeichnet also in Fig. 383 der Punkt A den Sextanten, S das Gestirn und B die in der Vertikalebene A S liegende äusserste sichtbare Stelle des Meeresspiegels, so liefert der Sextant, wenn man von der atmosphärischen Strahlenbrechung absieht, den Winkel S A B $=$ w.

Dieser Winkel ist aber der gesuchte Höhenwinkel noch nicht; denn erstens ist der Schenkel A B nicht horizontal, und zweitens



sieht man die Punkte B und S in Folge der Strahlenbrechung der Luft höher als sie sind. Nimmt man an, dass S in S' und B in B' erscheint, so liest man auf dem Sextanten den Winkel S'AB' = w' ab, während der Winkel SAH = u mit dem horizontalen Schenkel AH gesucht wird. Setzt man den Winkel SAS', welcher die nach Tab. Nr. XII zu bestimmende astronomische Strahlenbrechung vorstellt, = ϱ', den Winkel BAB' oder die terrestrische Strahlenbrechung = ϱ, und den Winkel HAB = v, so ist offenbar der gesuchte Höhenwinkel

$$u = w' - \varrho' - (v - \varrho) \quad . \quad (363)$$

Der Winkel HAB' = $v - \varrho = \delta$ stellt nun die Kimmtiefe oder die Depression des Meereshorizonts vor, und es lässt sich dieselbe in folgender Weise bestimmen.

Nach der Construction der Figur sind die Dreiecke ACH, ABC, ABH alle rechtwinkelig und einander ähnlich, folglich ist auch der Winkel

$$HAB = v = ACB = C,$$

und somit die Kimmtiefe

$$\delta = v - \varrho = (1 - k)\,C, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (364)$$

da nach §. 319 der Winkel $\varrho = kC$ ist.

Nach §. 5 ist aber der Mittelpunktswinkel

$$C = 206265\,\frac{b}{r}\ \text{Sekunden},$$

wenn b den Bogen BD und r den Erdhalbmesser DC vorstellt; und aus der ebenen Geometrie ist bekannt, dass

$$AB^2 = AD\,(2r + AD),$$

oder, wenn man die Höhe AD = h und die Entfernung AB = e setzt und AD gegen 2r vernachlässigt,

$$e^2 = 2rh \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (365)$$

Die Länge e darf man gleich dem Bogen BD = b und somit den Winkel

$$C = 206265 \frac{e}{r} = 206265 \sqrt{\frac{2h}{r}} \text{ Sek.}$$

setzen; folglich wird nach Gl. (364) die Kimmtiefe

$$\delta = 206265 (1 - k) \sqrt{\frac{2h}{r}} \text{ Sek.} \quad . \quad . \quad . \quad (366)$$

Nimmt man k = 0,0653 und r = 3266608 Toisen an, so wird für AD = h Toisen:

$$\delta = 150{,}85 \sqrt{h} \text{ Sek.}$$

Für h = 4 Toisen würde man also δ = 301,7 Sek. = 5,03 Minuten erhalten. Wäre für diese Höhe des Instrumenten-Standpunktes die Ablesung auf dem Spiegelsextanten = w' = 33° 40' gewesen, so würde nach Tab. Nr. XII die astronomische Refraction ϱ' = 1' 26,"5 und folglich der gesuchte Höhenwinkel

$$u = w' - \varrho' - (v - \varrho) = 33^0\, 31,''8$$

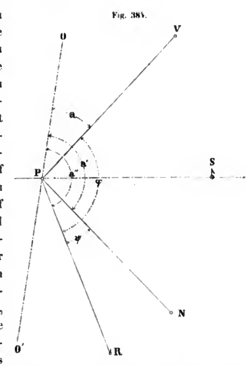
seyn. Da in dem vorliegenden Falle ein Stern beobachtet wurde, so fällt die Höhenparallaxe, und da der Winkelschenkel AB = e = $\sqrt{2rh} = \sqrt{13066432}$ = 3610 Toisen, also sehr lang ist, so fällt auch die Schiefenparallaxe weg, welche ausserdem an dem Winkel u noch anzubringen wären.

§. 322.

Aufgabe. Die Mittagslinie eines Ortes und das Azimuth einer gegebenen Geraden annähernd zu bestimmen.

Genaue Bestimmungen der Mittagslinie oder des Meridians eines Ortes sind nur durch astronomische Hilfsmittel ausführbar; der Geodät muss aber oft die Richtung der Mittagslinie eines Punktes ohne jene Hilfsmittel herstellen. Ist — wie gewöhnlich in solchen Fällen — keine grosse Schärfe der Bestimmung gefordert, so kann er seinen Zweck auf folgende Weise durch Beobachtung gleicher oder correspondirender Sonnenhöhen, d. i. durch Messung horizontaler und vertikaler Winkel erreichen.

Er stellt nämlich seinen vollständig berichtigten Theodolithen an einem heiteren Tage mehrere Stunden vor Mittag über dem Punkte P (Fig. 384), durch den die Mittagslinie gehen soll, centrisch und horizontal auf, versieht hierauf das Ocular des Fernrohrs mit einem Sonnenglase und stellt das Fadenkreuz auf die Sonnenscheibe



so ein, dass es z. B. deren oberen Rand in der Mitte schneidet. Ohne an dem Instrumente das Geringste zu ändern, liest er die Nonien des Horizontal- und Vertikalkreises ab und bemerkt sich die Zeit der Beobachtung nach seiner Taschenuhr. Die Ablesungen auf dem Horizontalkreise seyen a und $180^0 + a$, die auf dem Vertikalkreise v und $180^0 + v$, und die Beobachtung habe m Stunden vor Mittag stattgefunden. Nun bleibt das Instrument verdeckt und unberührt stehen, bis gegen die m^{te} Stunde nach dem Mittage, um welche man die Alhidade des Horizontalkreises löst und mit dem noch wie am Vormittage geneigten Fernrohre der Sonne folgt, bis das Fadenkreuz wieder auf die obere Mitte des Sonnenrandes einsteht. Ist dieses der Fall, so liest man wieder die zwei Nonien des Horizontalkreises ab. Diese Ablesungen seyen $= a'$ und $180^0 + a'$. Dreht man nun die Alhidade des Horizontalkreises so weit nach der Linken zurück, dass die Ablesungen der Nonien $= \frac{1}{2}(a + a')$ und $180^0 + \frac{1}{2}(a + a')$ werden und steckt in der Richtung der Absehlinie ein Signal aus, so bezeichnet dieses mit dem Standpunkte des Instrumentes die gesuchte Mittagslinie. Denn wenn als bekannt angenommen wird: erstens, dass der wahre Mittag eines Punktes der Erde in dem Augenblicke stattfindet, wo die Meridianebene dieses Punktes durch die Mitte der Sonne geht; zweitens, dass die Richtung nach der Sonne in dem Augenblicke, wo sie im Meridian steht oder culminirt, die Mittagslinie bezeichnet; und drittens, dass die Sonnenhöhe in gleichen Zeitabständen vom wahren Mittage gleich gross ist: so folgt von selbst, dass die gesuchte Mittagslinie PS (Fig. 384) den Horizontalwinkel

VPN, welcher aus der vor- und nachmittägigen Beobachtung gleicher Sonnenhöhen hervorging, halbiren muss; ist aber dieses der Fall und bezeichnet PO den Halbmesser des Limbus, welcher durch dessen Nullpunkt geht, so entsprechen die Winkel OPV und OPN den Ablesungen a und a' des Nonius I, und es muss folglich auch die Ablesung am ersten Nonius = $\frac{1}{2}$ (a + a') seyn, wenn die Abschlinie des Fernrohrs in der Mittagslinie liegen soll. Der Nonius II liefert selbstverständlich bei den Einstellungen auf VNS Ablesungen, welche genau oder sehr nahe 180° mehr oder weniger betragen, als die am ersten Nonius.

Hat man die Richtung der Mittagslinie PS gefunden, so ergibt sich sofort das Azimuth einer durch den Standpunkt des Instrumentes gehenden Richtung PR, indem man das Theodolithenfernrohr auf den Punkt R einstellt, an den Nonien des Horizontalkreises abliest und aus diesen Ablesungen den Horizontalwinkel SPR berechnet. War die Ablesung bei der Einstellung auf das Object R auf dem Nonius I = a'' und auf dem Nonius II = 180° + a'', so ist das gesuchte Azimuth SPR = a'' — $\frac{1}{2}$ (a + a'). Mit diesem Azimuthe sind selbstverständlich die Azimuthe aller um P herum liegenden Punkte bekannt, sobald man deren Richtungswinkel gemessen hat.

Wäre es aus irgend einem Grunde nicht möglich, den Theodolithen behufs der Aufsuchung der Mittagslinie den ganzen Tag hindurch stehen zu lassen, so muss man Vormittags den Winkel RPV = a'' — a' = φ und Nachmittags bei der vormittägigen Neigung (v) des Fernrohrs den Winkel RPN = ψ messen und alsdann den Winkel RPS = $\frac{1}{2}(\varphi + \psi)$ an RP antragen, was durch Einstellung des Nonius I auf eine Ablesung, welche um $\frac{1}{2}(\varphi + \psi)$ kleiner ist als die bei der Visur nach R, geschieht.

Die vorstehende Bestimmungsweise der Mittagslinie fordert nur desshalb eine Zeitbeobachtung, damit man am Nachmittage zur rechten Zeit wieder am Platze ist, um die Sonnenhöhe, auf welche das Fernrohr eingestellt ist, nicht unbenützt vorübergehen zu lassen. Da jedoch die gewöhnlichen Uhren nur die mittlere oder bürgerliche Zeit und also nicht den wahren Mittag anzeigen, wodurch man hinsichtlich der nachmittägigen Beobachtungszeit leicht irre geführt werden kann, so ist es nöthig, sich vorher über die an dem Beobachtungstage stattfindende Zeitdifferenz zu unterrichten und dieselbe zu beachten.

§. 323.

Aufgabe. Die Polhöhe oder geographische Breite eines gegebenen Ortes der Erde annähernd zu bestimmen.

Unter der Polhöhe eines Orts versteht man den Höhenwinkel der Verbindungslinie dieses Orts mit dem Himmelspole (einem in der Richtung der Erdaxe unendlich weit entfernten Punkte). Da nun jene Linie mit der Erdaxe parallel zu nehmen ist, so kann man auch sagen: die Polhöhe eines Orts ist der Neigungswinkel der scheinbaren Horizontalebene dieses Orts gegen die Erdaxe. Vergleicht man damit die geographische Breite eines Orts, welche der Neigungswinkel der Vertikallinie dieses Orts gegen die Aequatorebene ist (§. 4): so sieht man sofort ein, dass die Polhöhe und Breite eines Ortes der Grösse nach gleich sind, und dass man demnach die Breite durch die Polhöhe bestimmen kann.

Alle Methoden, die Polhöhe eines Orts mit grösster Genauigkeit zu messen, erfordern einen vorzüglichen astronomischen Apparat (feine Winkelmessinstrumente, Chronometer, Hilfstafeln etc.); wenn man diesen aber nicht besitzt, so kann man mittels eines Theodolithen oder Spiegelkreises durch blosses Messen von Höhenwinkeln die Polhöhe eines Orts für viele Zwecke (nur nicht für den Normalpunkt einer Landesvermessung) ausreichend genau finden.

Würden sich in den Verlängerungen der Erdaxe, also an den Himmelspolen Fixsterne befinden, so könnte man, je nach der Lage des Orts, dessen Polhöhe gesucht wird, den einen oder den andern anvisiren, und man brauchte folglich nur den Höhenwinkel dieser Visirlinie zu messen, um die gesuchte Polhöhe zu erhalten. Es gibt aber keine Fixsterne, die gerade so gelegen sind. Dagegen können wir uns auf der nördlichen Halbkugel der Erde des Polarsterns bedienen, welcher dem nördlichen Pole der Himmelskugel am nächsten steht und durch das bekannte Sternbild des grossen Bären leicht aufzufinden ist, da er in der Verlängerung der durch die beiden hinteren Sterne jenes Bildes gehenden Linie liegt und sich durch seine Grösse oder Helligkeit von den nächsten Sternen auszeichnet. In Folge der Axendrehung der Erde kommt der Polarstern (S, Fig. 385) täglich zweimal in die Ebene eines jeden Meridians, also auch des Orts O, dessen Polhöhe gesucht wird. Das Zusammentreffen mit der erweitert gedachten Meridianebene eines Orts nennt man die Culmination des Sterns für diesen Meridian und man unterscheidet

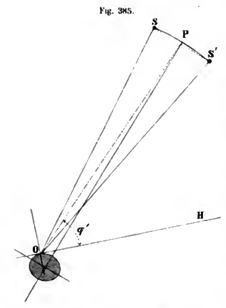


Fig. 385.

eine obere und eine untere Culmination (S, S'). Stellt man nun einen Theodolithen über dem Punkte O horizontal und so auf, dass sich die Absehlinie in der Meridianebene dieses Punktes bewegt, und beobachtet man für die obere Culmination den Höhenwinkel $SOH = \psi$ und für die untere den Winkel $S'OH = \psi'$, so lässt sich aus diesen Winkeln derjenige Höhenwinkel φ' berechnen, welcher den Winkel SOS' halbirt und dessen geneigter Schenkel OP (wegen der ausserordentlichen Entfernung des Punktes P) der Erdaxe parallel ist: dieser Winkel ist aber die gesuchte Polhöhe und, wie man sofort einsieht, gleich

$$\varphi' = \tfrac{1}{2}(\psi + \psi'), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (367)$$

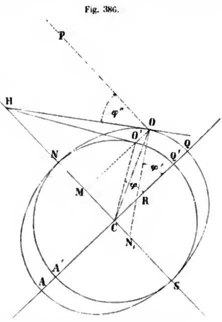
vorausgesetzt, dass jeder der gemessenen Höhenwinkel ψ und ψ' schon seine Verbesserung wegen der atmosphärischen Strahlenbrechung erhalten hat. Man liest nämlich in Folge dieser Strahlenbrechung für die obere Culmination nicht unmittelbar den Winkel ψ, sondern einen etwas grösseren γ und für die untere Culmination nicht ψ', sondern γ' ab. Bezeichnet nun ϱ die Refraction für γ und ϱ' die Refraction für γ', so ist $\psi = \gamma + \varrho$ und $\psi' = \gamma' + \varrho'$ zu setzen. Diese astronomischen Refractionen, welche sich nicht wie die terrestrischen nach der Formel $\varrho = k\,C$ berechnen lassen, findet man aber für den vorliegenden Zweck genau genug aus der Tafel Nr. XII, welche dem Anhange beigefügt ist und einen Bestandtheil der Bessel'schen Refractionstafeln bildet. Es versteht sich, dass man die Winkel ψ und ψ' oder zunächst γ und γ' auch mit einem Spiegelkreise oder Sextanten bestimmen kann, sobald man nur die Zeiten der Culminationen des Polarsterns kennt.

Der Winkel φ', den man auf diese Weise erhält, ist gleich dem Winkel der Normale des Punktes O mit der Aequatorebene und heisst

die **scheinbare** oder **elliptische Polhöhe** des Punktes O, weil er durch die scheinbare Horizontallinie dieses Punktes erhalten wird und der Neigung der Normale des elliptischen Erdmeridians in jenem Punkte gleich ist. Diese Normale geht aber nur für die Breiten 0° und 90° durch den Mittelpunkt der Erde, in allen übrigen Fällen nicht. Will man nun die Breiten durch Winkel messen, welche alle ihre Scheitel in dem Erdmittelpunkte haben, so muss man nach Fig. 386, in welcher ANQS den Meridian von O und AQ den Schnitt der Aequatorebene vorstellt, statt der Normale ON_1 den Halbmesser OC und statt des Winkels $ORQ = \varphi'$ den Winkel $OCQ = \varphi$ setzen. Dieser Winkel heisst die **wahre** oder **geocentrische** Polhöhe von O und ist offenbar um den Winkel $CON_1 = \beta$ kleiner als die scheinbare Polhöhe φ', d. h. es ist

$$\varphi = \varphi' - \beta \quad . \quad (368)$$

Fig. 386.



Die Verbesserung β kann nach Bohnenberger auf folgende Weise gefunden werden. Beschreibt man mit der kleinen Halbaxe $CN = b$ des elliptischen Meridians OQSAN einen in der Ebene dieses Meridians liegenden Kreis $NO'SA'$, errichtet die Ordinate OM senkrecht zu SN, und zieht in dem Schnittpunkte O' eine Tangente $O'H$ an den Kreis, so schneidet diese nach bekannten Sätzen der Curvenlehre die Tangente OH der Ellipse in dem Punkte H der verlängerten kleinen Axe SN und es ist, wenn man $O'C$ zieht:

$$OHM = MON_1 = ORQ = \varphi',$$

$$O'HM = MO'C = O'CQ = \varphi,$$

$$\operatorname{tg} OHM : \operatorname{tg} O'HM = OM : O'M = CQ : CN,$$

$$\operatorname{tg} MO'C : \operatorname{tg} MOC = OM : O'M = CQ : CN.$$

Multiplicirt man die beiden letzten Gleichungen miteinander und

berücksichtigt, dass $< O'HM = MO'C$, $OHM = \varphi'$, $MOC = \varphi$, CQ gleich der grossen Halbaxe a und CN gleich der kleinen Halbaxe b des Erdmeridians ist, so folgt

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \varphi' = m \operatorname{tg} \varphi' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (369)$$

wobei das Verhältniss von $b^2 : a^2 = m$ gesetzt wurde.

Es ist somit $\beta = \varphi' - \varphi = \varphi' - \operatorname{arc} \operatorname{tg} (m \operatorname{tg} \varphi')$, und wenn man diese Gleichung differenzirt:

$$d\beta = d\varphi' - \frac{m\, d\varphi'}{(1 + m^2 \operatorname{tg}^2 \varphi') \cos^2 \varphi'}.$$

Setzt man das Verhältniss von $(a^2 - b^2) : (a^2 + b^2) = v$, so wird

$$d\beta = \frac{2\, v\, d\varphi' (v + \cos 2\varphi')}{1 + v^2 + 2\, v \cos 2\varphi'},$$

und wenn man den Bruch, womit $2\, v\, d\varphi'$ multiplicirt ist, in die Reihe $\cos 2\varphi' - v \cos 4\varphi' + v^2 \cos 6\varphi' - \ldots\ldots$ auflöst und vorstehende Gleichung integrirt, so folgt

$$\beta = v \sin 2\varphi' - \tfrac{1}{2} v^2 \sin 4\varphi' + \tfrac{1}{3} v^3 \sin 6\varphi' - \ldots \quad (370)$$

Will man diesen in Theilen des Halbmessers bestimmten Winkel β, welcher die Neigung der Vertikallinie zu dem Erdhalbmesser eines Orts O vorstellt, in Sekunden ausdrücken, so muss man ihn noch mit der Anzahl Sekunden, welche auf einen Bogen von der Länge des Halbmessers treffen, nämlich mit 206265″ multipliciren. Hiernach wird, mit Weglassung des zweiten und dritten Gliedes des Ausdrucks für β, in dem vorliegenden Falle genau genug:

$$\beta = 206265\, v \sin 2\varphi' \text{ Sek.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (371)$$

und wenn man bedenkt, dass

$$v = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 + a b}{a^2 + b^2} \cdot \frac{a - b}{a}$$

sehr nahe der Abplattung der Erde (Gl 1), also $= \frac{1}{300}$ ist, so folgt schliesslich

$$\beta = 687 \sin 2\varphi' \text{ Sek.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (372)$$

Für $\varphi' = 45^0$ ist $\sin 2\varphi' = \sin 90^0 = 1$ und daher der grösste Werth von $\beta = 11'27''$, woraus zu entnehmen, dass diese Verbesserung auch bei kleineren und grösseren Breiten nicht vernachlässigt werden darf.

B. Trigonometrische Höhenmessungen.

§. 324.

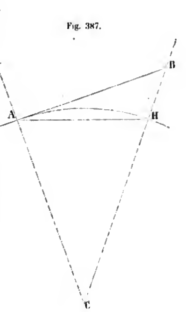
Die trigonometrische Höhenmessung besteht darin, dass man die zu bestimmende Höhe mit zwei in der nämlichen Verticalebene liegenden Linien zu einem Dreiecke vereinigt, in welchem drei Stücke (worunter eine Seite) durch mittel- oder unmittelbare Messung gefunden werden können, und dass man aus diesen Daten die gesuchte Höhe nach den bekannten Regeln der Trigonometrie berechnet.

Man theilt die Lehre von diesen Messungen gewöhnlich in zwei Abschnitte, von denen der eine die Höhenbestimmungen aus grossen Entfernungen behandelt. Als kleine Entfernungen werden hiebei diejenigen angesehen, welche keine Rücksicht auf Strahlenbrechung und Erdkrümmung erfordern, und als grosse jene, welche diese Rücksicht erheischen. Wir werden diese Eintheilung nicht machen, sondern sofort die Aufgaben behandeln, welche grosse Entfernungen zwischen dem Höhenobjecte und dem Beobachtungsorte voraussetzen, da in der Lösung dieser Aufgaben auch die Lösung der übrigen enthalten ist.

§. 325.

Aufgabe. Die Sehne eines grössten Kreisbogens der Erde, welcher den Horizontalabstand zweier trigonometrischer Punkte misst, durch den Bogen und den Erdhalbmesser auszudrücken.

Fig. 387.



Sind A und B (Fig. 387) zwei Punkte der Erdoberfläche und stellt der Kreisbogen AH den wahren Horizont von A und BC eine Vertikallinie vor, so ist der Bogen AH der Horizontalabstand der Punkte A und B. Diesen letzteren Abstand könnte man berechnen, wenn in dem schiefwinkeligen Dreiecke ABH die Seite AH und zwei Winkel

bekannt wären; es handelt sich also hier, wie in vielen anderen Fällen der trigonometrischen Höhenbestimmungen, um die Berechnung der Sehne AH = s aus dem Bogen AH = b, wenn der Halbmesser AO = r bekannt ist und vorausgesetzt wird, dass der Bogen b höchstens 8 bis 10 Meilen lang, d. h. nicht grösser ist als die Seite eines Dreiecks erster Ordnung für eine Landesvermessung. Diese Voraussetzung kommt also darauf zurück, dass der Bogen b im Vergleich zu r sehr klein ist und im ungünstigsten Falle $\frac{1}{80}$ r beträgt.

Drückt man den Winkel ACH im Bogenmasse aus, so wird $C = \frac{b}{r}$ und folglich die Sehne

$$s = 2r \sin \frac{1}{2} C = 2r \sin \left(\frac{b}{2r}\right).$$

Da das Verhältniss von b : 2r höchstens $\frac{1}{160}$ beträgt, so ist genau genug:

$$\sin \left(\frac{b}{2r}\right) = \frac{b}{2r} - \frac{1}{6}\left(\frac{b}{2r}\right)^3,$$

und folglich auch, wenn man substituirt und reducirt:

$$s = b - \frac{1}{24}\,\frac{b^3}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (373)$$

Setzt man beispielsweise den Bogen b = 32666,08 Toisen und r = 3266608 Toisen, also das Verhältniss von b : r = 1 : 100, so wird

$$s = 32666{,}08 - 0{,}137 = 32665{,}843 \text{ Toisen},$$

woraus zu entnehmen ist, dass man fast in allen Fällen den Bogen b und die Sehne s als gleich gross ansehen darf, da selbst in einem so ungünstigen Falle, wie der vorliegende ist, der Unterschied zwischen Sehne und Bogen nur $\frac{1}{240\,000}$ der Bogenlänge beträgt.

§. 326.

Aufgabe. Zwei trigonometrische Punkte sind durch ihren Horizontalabstand gegeben: man soll ihren Höhenunterschied bestimmen.

1) Mittels einseitiger Zenithwinkel.

Es seyen A und B (Fig. 387) diese zwei Punkte und $HB = h$ der gesuchte Höhenunterschied.

Misst man in A den scheinbaren Zenithwinkel der Linie $AB = z$, so ist nach §. 319 der wahre Zenithwinkel $VAB = z + \varrho$. Aus dem bekannten Bogen $AH = b$ folgt nach Gl (2) der Centriwinkel $ACH = C = 206265 \frac{b}{r}$ Sekunden, wenn $AC = r$ gesetzt wird. Es ist somit der Winkel $HAC = AHC = 90^0 - \frac{1}{2} C$ und folglich der Winkel

$$BAH = A = 90^0 - (z + \varrho) + \tfrac{1}{2} C,$$
$$ABH = B = z + \varrho - C,$$
$$AHB = H = 90^0 + \tfrac{1}{2} C.$$

Da nun in dem vertikalen Dreiecke ABH die drei Winkel A, B, H und eine Seite $AH = s = 2r \sin \frac{1}{2} C$ bekannt sind, so findet man hieraus die gesuchte Höhe

$$h = \frac{s \sin A}{\sin B} = \frac{s \cos (z + \varrho - \frac{1}{2} C)}{\sin (z + \varrho - C)} \quad . \; . \; . \quad (374)$$

Berücksichtigt man, dass nach §. 319 der Refractionswinkel $\varrho = kC$ ist, so lässt sich der letzte Ausdruck für h auch so schreiben:

$$h = s \frac{\cos [z - (\frac{1}{2} - k) C]}{\sin [z - (1 - k) C]} \quad . \; . \; . \; . \quad (375)$$

Entwickelt man (nach Prof. Winklers Vorgange) den letzteren Ausdruck mit Hilfe des Maclaurin'schen Satzes in eine Reihe und berücksichtigt, dass die Sehne $s = 2r \sin \frac{1}{2} C$ ist, so findet man bis auf Glieder dritter Ordnung genau:

$$h = s \cot z + \frac{1 - 2k}{2r} s^2 + \frac{1 - k}{r} (s \cot z)^2 \quad . \quad (376)$$

Setzt man die Constanten

$$\frac{1 - 2k}{2r} = m,$$
$$\frac{1 - k}{r} = n,$$

so wird schliesslich der mit den strengen Ausdrücken für h fast übereinstimmende Näherungsausdruck:

$$h = s \cot z + m s^2 + n (s \cot z)^2 \quad . \; . \; . \; . \quad (377)$$

Dass beide Ausdrücke nahezu ganz gleiche Resultate geben,

geht aus einem von Winkler (in Crelle's Journal der Mathematik Bd. 50. S. 36) berechneten Beispiele hervor, nach welchem für

$$s = 5880{,}^{m}4, \quad \log r = 6{,}804\,1294,$$
$$z = 73^0 47' 35'', \quad \log m = -7{,}170\,6609,$$
$$k = 0{,}07 \quad \log n = -6{,}835\,6465,$$

die strengen Formeln (374) und (375) die Höhe

$$h = 1711{,}^{m}392$$

und die Näherungsformeln (376) und (377)

$$\begin{aligned} s \cot z &= 1708{,}^{m}630 \\ m s^2 &= 2{,}334 \\ n\,(s \cot z)^2 &= 0{,}426 \\ \hline h &= 1711{,}^{m}390 \end{aligned}$$

liefern.

Vernachlässigt man den Einfluss der Erdkrümmung, d. h. sieht man das in Fig. 387 enthaltene Dreieck ABH als ein bei H rechtwinkeliges und folglich den Centriwinkel C als null an, so wird nach Gl (374) die Höhe

$$h = s \cot (z + \varrho); \quad \ldots\ldots \quad (378)$$

und darf man auch, wegen des unbedeutenden Horizontalabstandes s, die Refraction ϱ ausser Acht lassen, so erhält man

$$h = s \cot z = s \operatorname{tg} A; \quad \ldots\ldots \quad (379)$$

wobei A den Höhenwinkel der Linie AB vorstellt. Vernachlässigt man bloss die Refraction, aber nicht die Erdkrümmung, so liefern die Gleichungen (374) und (375)

$$h = s \frac{\cos (z - \frac{1}{2} C)}{\sin (z + C)} \quad \ldots\ldots \quad (380)$$

und aus Gl (376) folgt für diesen Fall der Näherungsausdruck:

$$h = s \cot z + \frac{s^2}{2 r} + \frac{(s \cot z)^2}{r}. \quad \ldots \quad (381)$$

2) Mittels gegenseitiger und gleichzeitiger Zenithwinkel.

Unter dieser Bedingung kann der Refractionswinkel ϱ oder dessen Werth k C aus den Gleichungen eliminirt werden, indem man nach Gl (358), in welcher z_1 den scheinbaren Zenithwinkel von BA in B vorstellt,

$$2 \varrho = 2 k C = 180^0 + C - z - z_1$$

setzt. Hierdurch wird alsdann

$$z + \rho - \tfrac{1}{2} C = 90^0 - \tfrac{1}{2}(z_1 - z)$$
$$z + \rho - C = 90^0 - \tfrac{1}{2}(z_1 - z + C),$$

und folglich geht die Gleichung (374) und mit ihr Gl (375) über in

$$h = s \frac{\sin \tfrac{1}{2}(z_1 - z)}{\cos \tfrac{1}{2}(z_1 - z + C)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (382)$$

Will man hier die Erdkrümmung vernachlässigen, so braucht man nur $C = o$ zu setzen, wodurch sich

$$h = s \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(z_1 - z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (383)$$

ergibt.

§. 327.

Aufgabe. Ein lothrechter Gegenstand ist gegeben: man soll dessen absolute Höhe bestimmen.

1) **Von einem gegebenen Punkte aus** (Fig. 388).

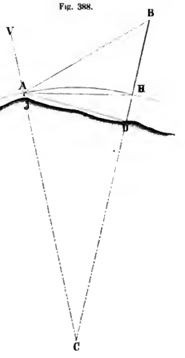


Fig. 388.

Ist BD die gesuchte Höhe und in A die Drehaxe des Theodolithenfernrohrs, so ist zunächst nach §. 326 die Höhe des Punktes B über A oder

$$BH = h = s \frac{\cos(z + \rho - \tfrac{1}{2} C)}{\sin(z + \rho - C)}.$$

Für das Stück DH der Höhe BD hat man ganz ähnliche Betrachtungen wie im vorigen Paragraph für BH anzustellen. Es ist nämlich, wenn der scheinbare Zenithwinkel der Linie $AD = z'$ gemessen wurde, der wahre Zenithwinkel $VAD = z' + \rho$, und da der Winkel

$$VAH = 90^0 + \tfrac{1}{2} C$$

ist, so ergibt sich der Winkel

$$HAD = z' + \rho - \tfrac{1}{2} C - 90^0.$$

Ferner ist, da der Winkel $B = z + \rho - C$, der Winkel

$$ADB = 180^0 - (z' + \rho - C);$$

daher auch aus dem schiefwinkeligen Dreiecke AHD die Höhe

$$DH = h' = -s \frac{\cos(z' + \varrho - \frac{1}{2}C)}{\sin(z' + \varrho - C)}.$$

Addirt man die Werthe von h und h', so erhält man nach einer einfachen Reduction die gesuchte Höhe

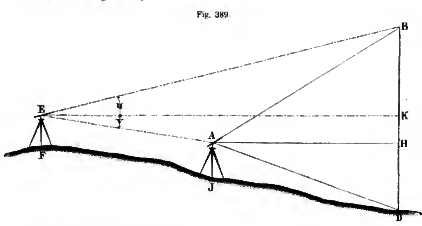
$$BD = h + h' = \frac{s \sin(z' - z - \frac{1}{2}C)}{\sin(z' + \varrho - C)\sin(z + \varrho - C)}. \quad (384)$$

Liegt der Gegenstand BD dem Punkte A so nahe, dass man die Erdkrümmung und Strahlenbrechung vernachlässigen darf, so wird

$$BD = s \frac{\sin(z' - z)}{\sin z'.\sin z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (385)$$

2) Von einer mit BD in einer Ebene liegenden Standlinie aus (Fig. 389).

Fig. 389



Es kann bei weniger weit entfernten Punkten vorkommen, dass man die Horizontale A H = nicht unmittelbar bestimmen kann: in diesem Falle ist das Messungsverfahren so einzurichten, dass man die Länge s mittelbar findet. Zu dem Ende nimmt man hinter dem Punkte A der Fig. 389 noch einen zweiten Standpunkt E so an, dass die Gerade AE in einer durch BD gehenden Vertikalebene liegt, macht die Instrumentenhöhe EF = AJ, wodurch die Linie FJ = AE wird und misst die Länge FJ = l, so wie den Höhenwinkel BEK = u und den Tiefenwinkel KEA = v unmittelbar, und berechnet hieraus die Seite AB des Dreiecks AEB aus folgenden drei Stücken: der Seite AE = l, dem Winkel BEA = u + v und dem Winkel EBA = EBK − ABK = 90° − (u + z). Hiernach wird

$$AB = l \frac{\sin(u + v)}{\cos(u + z)}$$

und somit

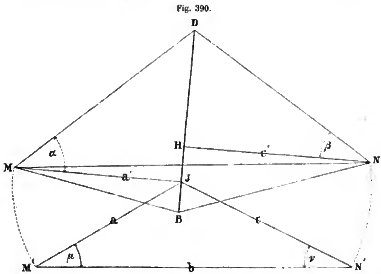
$$AH = AB \sin z = l \sin z \frac{\sin(u + v)}{\cos(u + z)}.$$

Substituirt man diesen Werth von AH für s in der Gleichung (385), so erhält man schliesslich

$$BD = l \frac{\sin(z' - z).\sin(u + v)}{\sin z'.\cos(u + z)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (386)$$

3) Von einer mit BD nicht in einer Ebene liegenden *Standlinie* aus (Fig. 390).

Fig. 390.



Stellt BD die Höhe eines Thurmes vor, welcher rings von Häusern umgeben ist, so ist in der Regel weder das erste noch das zweite eben beschriebene Verfahren anwendbar, da beide voraussetzen, dass man den Fusspunkt D der Vertikallinie BD anvisiren kann. In diesem Falle muss man den horizontalen Abstand des Instrumentes von der zu messenden Höhe mittelbar durch ein Dreieck bestimmen, welches über der gegebenen Standlinie dadurch errichtet wird, dass man die Vertikallinie BD als dritten Eckpunkt annimmt.

Man wird desshalb, nachdem die Basis MN (welche so liegen muss, dass man von M und N aus nach der Spitze D visiren kann,

und dass das horizontal projicirte Dreieck MND von einem gleichseitigen nicht zu sehr abweicht) mit Messlatten gemessen und auf bekannte Weise auf den Horizont reducirt ist, die Horizontalprojectionen der Winkel $DMN = \mu$ und $DNM = \nu$ so genau als möglich messen und hieraus mit Hilfe der horizontalen Projection der Standlinie $MN = b$ die Projectionen der Dreieckseiten $MD = a$ und $DN = c$ berechnen, wodurch man erhält:

$$a = \frac{b \sin \nu}{\sin(\mu + \nu)},$$

$$c = \frac{b \sin \mu}{\sin(\mu + \nu)}.$$

Wird hierauf in M der Höhenwinkel $DMJ = \alpha$ gemessen, so findet sich das Stück JD der gesuchten Höhe BD gleich

$$h = \frac{b \sin \nu \operatorname{tg} \alpha}{\sin(\mu + \nu)}.$$

Kann man von M aus nicht nach dem Fusspunkte B des Thurmes visiren, so muss der Höhenunterschied zwischen M und B durch ein genaues Nivellement ermittelt werden. Ist dieser $= JB = i$ gefunden, so wird die gesuchte Höhe

$$BD = JB + JD = i + h = i + \frac{b \sin \nu \operatorname{tg} \alpha}{\sin(\mu + \nu)} \quad . \quad (387)$$

Misst man in dem Punkte N auch den Höhenwinkel $DNH = \beta$, so ergibt sich aus dem rechtwinkeligen Dreiecke DHN, in welchem $HN = c$ ist, das Stück HD der Höhe BD gleich

$$h' = \frac{b \sin \mu \operatorname{tg} \beta}{\sin(\mu + \nu)}.$$

Ermittelt man nun wieder den Höhenunterschied i' zwischen N und B durch Nivelliren, so erhält man einen zweiten Ausdruck für die gesuchte Thurmhöhe, nämlich

$$BD = HB + BD = i' + h' = i' + \frac{b \sin \mu \operatorname{tg} \beta}{\sin(\mu + \nu)} \quad . \quad (388)$$

Stimmt dieser Werth mit dem ersten überein, so ist dieses jedenfalls ein sehr günstiges Zeichen für die Genauigkeit der Arbeit; und man wird mit dieser ganz genau zufrieden seyn können, wenn man sich vorher davon überzeugt hat, dass die Standlinie so genau als möglich gemessen ist.

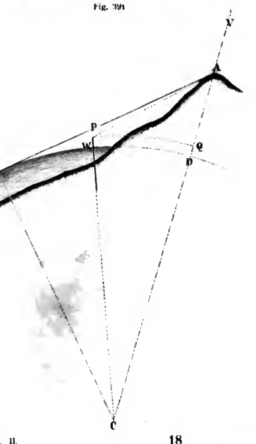
Dass man die Winkel μ und α ebenso wie ν und β mit ein- und derselben Aufstellung des Instruments misst, und dass man den

Höhenunterschied der Punkte N und B aus dem Nivellement der Linien MB und MN erhält, bedarf wohl kaum mehr als dieser kurzen Erwähnung.

§. 328.

Aufgabe. In der Nähe des Meeres die Höhe eines Punktes über dem Meeresspiegel zu bestimmen.

Die relativen Höhenbestimmungen der Hauptpunkte eines Landes, welche man in Regel mit der Landesvermessung vornimmt, werden in der Absicht gemacht, die absolute Höhe jener Punkte über dem Meere zu erfahren. Hiezu muss aber die absolute Höhe wenigstens eines Punktes des trigonometrischen Netzes bekannt seyn. Gewöhnlich wird diese Höhe durch Barometermessungen bestimmt; sicherer aber kann man diese absolute Höhe eines Punktes, der in der Nähe eines Meeres mit geringer Ebbe und Fluth liegt, durch trigonometrische Messungen, und am sichersten durch Nivelliren finden. Hier ist nur von trigonometrischen Bestimmungen die Rede.



1) **Höhenbestimmung nach dem Zenithwinkel des Meeresspiegels.**

Stellt in Fig. 391 der Bogen BD den Meeresspiegel vor und ist A der Punkt, dessen Höhe AD = h bestimmt werden soll, so kann man in A durch Anvisiren der fernsten Stelle B der Meeresfläche den wahren Zenithwinkel

$$VAB = z + \varrho,$$

wobei z den scheinbaren

Zenithwinkel und $\varrho = k\,C$ die Refraction vorstellt, bestimmen und hieraus und dem bekannten Erdhalbmesser $BC = r$ die gesuchte Höhe h berechnen.

Aus dem rechtwinkeligen Dreiecke ABC folgt sofort die Höhe

$$h = CA - CD = \frac{r}{\sin(z + \varrho)} - r = r\,\frac{1 - \sin(z + \varrho)}{\sin(z + \varrho)}.$$

Es ist aber nach einer bekannten trigonometrischen Relation

$$\frac{1 - \sin x}{\sin x} = \cot x \operatorname{tg}(45^0 - \tfrac{1}{2} x),$$

und daher, wenn man substituirt:

$$h = r \cot(z + \varrho) \operatorname{tg}[45^0 - \tfrac{1}{2}(z + \varrho)] \quad . \quad . \quad . \quad (389)$$

Will man, da in dem vorliegenden Falle z immer ein stumpfer Winkel ist, die Formel noch bequemer machen, so kann man

$$\cot(z + \varrho) = - \operatorname{tg}(z + \varrho - 90^0) \text{ und}$$

$$\operatorname{tg}[45^0 - \tfrac{1}{2}(z + \varrho)] = - \operatorname{tg}[\tfrac{1}{2}(z + \varrho) - 45^0]$$

schreiben, wodurch man schliesslich erhält:

$$h = r \operatorname{tg}(z + \varrho - 90^0) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(z + \varrho - 90^0) \quad . \quad . \quad (390)$$

Da die Refraction ϱ von dem Winkel C abhängt, dieser aber nicht unmittelbar gegeben ist, so hat man vorerst C zu berechnen. Hiezu dient aber das rechwinkelige Dreieck ABC, welches die Gleichung

$$VAB = z + \varrho = z + kC = 90^0 + C$$

liefert, aus der sofort folgt:

$$C = \frac{z - 90^0}{1 - k} \text{ und } \varrho = \frac{k}{1 - k}(z - 90^0) \quad . \quad . \quad (391)$$

Setzt man diesen Werth von ϱ in die Gleichung und schreibt $\frac{1}{1 - k} = 1 + k = m$, so erhält man

$$h = r \operatorname{tg} m\,(z - 90^0) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} m\,(z - 90^0).$$

Da $z - 90^0$ ein sehr kleiner Winkel ist, so kann man auch annähernd $\operatorname{tg} m\,(z - 90^0) = m \operatorname{tg}(z - 90^0)$ setzen, und folglich

$$h = \tfrac{1}{2} r\, m^2 \operatorname{tg}^2 (z - 90^0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (392)$$

2) Höhenbestimmung mit Hilfe eines Pegels.

Stellt man am Ufer des Meeres, wie es an Flüssen geschieht, einen hinreichend starken und hohen Massstab oder Pegel auf, durch den man nicht nur den höchsten und niedrigsten, sondern auch für einen bestimmten Zeitraum den mittleren Stand des Wasserspiegels beobachten kann: so braucht man nur die Höhe des Berges über

diesem Pegel zu messen, um damit auch sofort dessen Höhe über dem Meere zu erhalten.

Bezeichnet in Fig. 391 die Linie PW den Pegel und W den Wasserstand, auf welchen die Höhe AD des Punktes A bezogen werden soll, so findet man von A aus mittels einseitiger Zenithwinkel die Höhe $AQ = h_1$ nach Gl (375) und, wenn man auch über P einen Theodolithen aufstellen kann, mittels gegenseitiger und gleichzeitiger Zenithwinkel dieselbe Höhe h_1 nach Gl (382). Addirt man in beiden Fällen den Abstand $PW = QD = i$ zu h_1, so ist die gesuchte Höhe

$$AD = h = i + h_1 \quad \ldots \ldots \quad (393)$$

gefunden.

C. Höhenmessen durch Nivelliren.

§. 329.

Die trigonometrischen Höhenbestimmungen setzen immer die Kenntniss einer Standlinie voraus und ihre Genauigkeit hängt wesentlich von der Schärfe, womit diese Linie gemessen wurde, und bei grossen Entfernungen von der atmosphärischen Strahlenbrechung und der Erdkrümmung ab.

Werden dergleichen Höhenbestimmungen gleichzeitig mit der Anlage eines Dreiecknetzes für eine Landesvermessung vorgenommen, so erfolgt die Bestimmung der Dreieckseiten, welche hier als Standlinien erscheinen, nicht auf Rechnung der trigonometrischen Höhenmessung, wesshalb auch diese in einem solchen Falle entschieden den Vorzug vor jeder anderen Methode der Höhenbestimmung verdient.

Handelt es sich um Höhen von Thürmen, Bäumen und anderen erhabenen Gegenständen, welche in ausgedehnten Ebenen stehen, oder deren Spitzen unzugänglich sind, so ist wiederum die trigonometrische Höhenbestimmung die geeignetste, in vielen Fällen sogar die einzig mögliche.

Wenn es aber, wie bei vielen technischen Unternehmungen, darauf ankommt, die relative Höhenlage einer grossen Reihe von Punkten mit grösster Genauigkeit zu bestimmen, während ihre gegenseitigen Entfernungen nur mit geringer Genauigkeit gemessen zu seyn brauchen: so ist die trigonometrische Höhenmessung nicht mehr anwendbar, weil sie in Folge der nicht scharf gemessenen

Standlinien und der veränderlichen Strahlenbrechung nur ungenaue Resultate liefern kann, abgesehen von der grösseren Arbeit, welche sie verursacht. In solchen Fällen erscheint das Nivelliren, welches keine Horizontalmessungen voraussetzt und dessen Resultate fast immer von den nachtheiligen Einflüssen der Strahlenbrechung und Erdkrümmung befreit werden können, als die vorzüglichste Art der Höhenmessung.

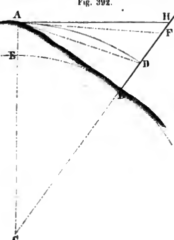
§. 330.

Aufgabe. Den Einfluss der Erdkrümmung und der Strahlenbrechung auf die Resultate des Nivellirens darzustellen.

Im ersten Bande dieses Werks (S. 372) haben wir zur Erläuterung des Begriffs der Nivellirinstrumente angenommen, es handle sich bloss um die Ermittelung des Höhenunterschieds zweier nahe gelegener Punkte und unter dieser Voraussetzung war es nicht nöthig, auf die Krümmung der Erde und die Brechung des Lichts in der Luft Rücksicht zu nehmen. Jetzt muss der Begriff des Nivellirens etwas schärfer gefasst werden, damit man klar einsieht, in welchem Zusammenhange die Erkrümmung und Strahlenbrechung mit dem Nivelliren stehen, und in welchen Fällen deren Einflüsse eliminirt oder doch unschädlich gemacht werden können.

1) Der Höhenunterschied zweier Punkte ist der senkrechte Abstand ihrer wahren Horizonte. Sind A und B (Fig. 392) zwei Punkte der Erdoberfläche und AD, BE ihre von dem Erdmittelpunkte C aus beschriebenen und in der Vertikalebene ABC liegenden wahren Horizontallinien, so bezeichnen die vertikalen Linien AE und BD den gesuchten Höhenunterschied. Denkt man sich nun in dem Punkte A eine in der Ebene ABC liegende horizontale Visirlinie AH, wie sie ein Nivellirinstrument liefert, so ist diese eine Tangente zum wahren Horizonte AD und gibt folglich auf

Fig. 392.



einer in B lothrecht stehenden Nivellirlatte nicht die gesuchte Höhe BD, sondern (wenn man vorläufig von der Strahlenbrechung absieht) die Höhe BH an. Man findet somit den Höhenunterschied der Punkte A und B in diesem Falle um den Abstand DH des scheinbaren und wahren Horizonts zu gross.

Bezeichnet man diesen Abstand mit h, die Enfernung der Latte vom Punkte A oder AH mit e und den Erdhalbmesser AC mit r, so ist nach einem bekannten geometrischen Satze $e^2 = h\,(2r + h)$, und da hier h gegen 2r verschwindet,

$$h = \frac{e^2}{2r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (394)$$

Um diese Grösse müsste jede Ablesung auf einer Nivellirlatte kleiner gemacht werden, wenn es nicht Nivellirmethoden gäbe, welche diese Verbesserung der Erdkrümmung überflüssig machen.

2) Die Wirkung der atmosphärischen Strahlenbrechung besteht darin, dass sie (mit Bezug auf die vorige Figur) dem in A befindlichen Auge nicht den Punkt H, sondern einen um den Refractionswinkel tiefer liegenden Punkt F sichtbar macht. Man wird also auch auf der Latte in B nicht die Höhe BH, sondern BF ablesen, welche um das Stück $HF = h'$ kleiner ist. Die Grösse h', welche den Einfluss der Strahlenbrechung auf die Entfernung e der Nivellirlatte von dem Punkte A bezeichnet, lässt sich wie folgt durch h ausdrücken.

Denkt man sich nämlich die Linien AF, AD in Fig. 392 gezogen, so verhalten sich die äusserst kleinen Winkel $HAF = \varrho$ und $HAD = \frac{1}{2}\,(ACB) = \frac{1}{2}\,C$ sehr nahe wie Linien $HF = h'$ und $HD = h$, und da $\varrho = k\,C$, so wird

$$h' = 2kh = k\,\frac{e^2}{r}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (395)$$

Setzt man nach Gauss die Refractionsconstante $k = 0{,}0653$, so ist

$$h' = 0{,}1306\,h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (396)$$

also der Einfluss der Strahlenbrechung ungefähr 8mal geringer als jener der Erdkrümmung.

3) Fasst man beide Einflüsse zusammen, so ergeben die bisherigen Betrachtungen leicht, dass die Strahlenbrechung den fehlererzeugenden Einfluss der Erdkrümmung theilweise aufhebt, und dass demnach durch das Zusammenwirken beider die Ablesungen auf der Nivellirlatte nur um das Stück

$$DF = DH - HF = h - h' = e$$

zu verbessern ist. Diese Verbesserung, welche man die Reduction auf den wahren Horizont nennt, ist demnach allgemein gleich

$$e = (1 - 2\,k)\,\frac{e^2}{2\,r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (397)$$

und mit Berücksichtigung des Gauss'schen Coefficienten gleich

$$e = 0{,}4347\,\frac{e^2}{r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (398)$$

Die nachstehende Tabelle gibt einen Ueberblick der Grösse e für verschiedene Werthe von e und für r = 3 266 608 Toisen.

Entfernung e	Reduction c	Entfernung e	Reduction c	Entfernung e	Reduction c
Toisen.	Par. Linien	Toisen.	Par. Linien.	Toisen.	Par. Linien.
10	0,0115	80	0,735	400	18,403
20	0,0458	90	0,924	500	28,685
30	0,1028	100	1.149	600	41,405
40	0,1840	150	2,583	700	56,336
50	0,2868	200	4,579	800	73,526
60	0,4140	250	7,180	900	92,448
70	0,5633	300	10,282	1000	114,912

1. Die Methoden des Nivellirens.

§. 331.

Beträgt der Höhenunterschied zweier Punkte nicht mehr als die Länge der Nivellirlatte und sind diese zwei Punkte nur so weit von einander entfernt, dass eine einzige Aufstellung des Nivellirinstruments hinreicht, jenen Unterschied zu finden: so nennt man das zur Bestimmung dieses Unterschiedes nöthige Messverfahren ein einfaches Nivellement; sind aber zur Auffindung des Höhenunterschieds zweier Punkte mehrere Aufstellungen des Nivellirinstrumentes nöthig, weil die Punkte entweder in horizontaler oder vertikaler Projection zu weit auseinander liegen: so heisst die Verbindung dieser einfachen Nivellemente für den genannten Zweck ein zusammengesetztes Nivellement.

Die Nivellirmethoden unterscheiden sich lediglich durch die Lage des Standortes des Instrumentes gegen die einzunivellirenden zwei Punkte; und da sich der Standort nur entweder in einem der beiden Punkte oder zwischen denselben befinden kann, so gibt es nur zwei

Arten des Nivellirens, nämlich das Nivelliren aus einem Endpunkte und das Nivelliren aus einem Zwischenpunkte.

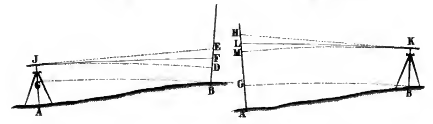
§. 332.

Aufgabe. Das Nivelliren aus einem Endpunkte darzustellen.

Sind A und B (Fig. 393 und 394) die einzunivellirenden Punkte, und stellt BG die in der Vertikalebene AB liegende wahre Horizontallinie des Punktes B, die Linie AJ aber eine Vertikale vor, so ist $AG = u$ der gesuchte Höhenunterschied, welcher sowohl von A als von B aus bestimmt werden kann.

Stellt man das Instrument in A und die Latte in B auf (Fig. 393), so liefert das bekannte Verfahren eine Ablesung auf der Latte, welche

Fig. 393. Fig. 394.



dem Lattenabschnitte $BF = l$ entspricht, wenn F derjenige Punkt der Latte ist, welcher um den Refractionswinkel ϱ unter der horizontalen Absehlinie JE des Instruments liegt. Zieht man durch den Punkt J die wahre Horizontallinie JD, so wird der Lattenabschnitt nach §. 330 auf den wahren Horizont, d. i. auf den Punkt D, wo der Kreis JD die Latte trifft, reducirt, indem man c von l abzieht: es ist somit

$$BD = JG = l - c,$$

und folglich, wenn man die Instrumentenhöhe $AJ = i$ setzt, der gesuchte Höhenunterschied $AG = AJ - JG$ oder

$$u = i - l + c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (399)$$

Befindet sich das Nivellirinstrument in dem höher gelegenen Punkte B und die Latte über A (Fig. 394), so gelangt durch das bekannte Nivellirverfahren der Punkt L, welcher um den Refractionswinkel ϱ unter der Visirlinie KH liegt, in's Auge. Steht dieser nun um die Länge l' vom Punkte A ab und ist KM der wahre Horizont

des in der Höhe $BK = i'$ aufgestellten Instruments, so ist auch, da die Reductionsgrösse c dieselbe bleibt:

$$AM = AL - LM = l' - c$$

und folglich der gesuchte Höhenunterschied AG der beiden Punkte A und B oder

$$u = l' - i' - c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (400)$$

Vergleicht man die beiden für u erhaltenen Ausdrücke mit einander und berücksichtigt, dass B höher liegt als A, so folgt daraus der Satz: Die aus der Erdkrümmung und Strahlenbrechung hervorgehende Reduction c ist bei Steigungen zu dem positiven Unterschiede zwischen der Instrumentenhöhe und dem Lattenabschnitte zu addiren, bei Gefällen aber davon zu subtrahiren.

Addirt man die beiden Gleichungen (399) und (400), so erhält man

$$u = \tfrac{1}{2}(l' - l) + \tfrac{1}{2}(i - i') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (401)$$

d. h. es lässt sich dadurch, dass man das Nivellirinstrument nicht bloss in dem einen Endpunkte (A), sondern auch in dem anderen (B) aufstellt und das Nivellirverfahren vollzieht, der Einfluss der Erdkrümmung und der Strahlenbrechung auf das Resultat der Messung beseitigen; was bei einer einzigen Aufstellung nicht möglich ist.

§. 333.

Aufgabe. Das Nivelliren aus einem Zwischenpunkte darzustellen.

Sind A und B (Fig. 395) die beiden gegebenen Punkte, deren Höhenunterschied

$$BM = AH + BN = u$$

Fig. 395

ermittelt werden soll; steht ferner das Instrument auf einem in oder ausserhalb der Linie AB liegenden Punkte C, welcher von B um die Länge e und von A um die Länge e′ entfernt ist; setzt man weiter die Instrumentenhöhe CD = i und die Ablesungen in B = l, in A = l′; und heissen endlich die Reductionen auf den wahren Horizont für den Punkt B = c und für A = c′: so wird nach dem vorigen Paragraph die Steigung von C bis B oder

$$BN = i - l + c$$

und das Gefälle von C bis A oder

$$AH = l' - i - c'$$

erhalten.

Addirt man diese zwei Gleichungen, so folgt daraus der gesuchte Höhenunterschied

$$u = l' - l - (c' - c) \quad \ldots \ldots \quad (402)$$

Für e′ = e wird c′ = c und folglich in diesem Falle

$$u = l' - l \quad \ldots \ldots \ldots \quad (403)$$

Wenn man also das Nivellirinstrument in gleicher Entfernung von den beiden Endpunkten einer Station aufstellt, so eliminirt man dadurch den Einfluss sowohl der Erdkrümmung und Strahlenbrechung, als auch der Instrumentenhöhe auf das Messungsresultat.

Diesen Vortheil gewährt keine andere Art des Nivellirens, und desshalb ist auch das „Nivelliren aus der Mitte einer Station“ jedem anderen Verfahren vorzuziehen; manchmal ist man jedoch durch Localverhältnisse gezwungen, sich in den Endpunkten aufzustellen.

Das Einhalten der Mitte der Station, d. i. gleicher Entfernungen von den Endpunkten, ist nicht strenge nöthig, da nach Gl (402) der Einfluss der ungleichen Entfernungen e′ und e nur dem Unterschiede der ihnen entsprechenden Reductionen c′ und c gleich kommt und die Reductionsgrössen selbst für ziemlich grosse Entfernungen nur wenig betragen. Gesetzt in einer Station stehe das Nivellirinstrument um 50 Toisen oder 300 Pariser Fuss von dem einen und nur um 30 Toisen oder 180 Pariser Fuss von dem anderen Endpunkte ab: so ist nach der in §. 330 mitgetheilten Tabelle c′ = 0,2868 Pariser Linien, c = 0,1028 Pariser Linien, und folglich c′ — c = 0,184 Par. Linien; ein Fehler der bei den meisten Nivellementen nicht beachtet zu werden braucht. Es genügt also vollständig, wenn man die Mitte der Station nach dem Augenmasse bestimmt und dabei auf einen festen

Standpunkt des Instrumentes Rücksicht nimmt. (Es wird jedoch wiederholt erinnert, dass diese „Mitte“ nicht in der Vertikalebene der einzunivellirenden Punkte zu liegen braucht, sondern nach der Beschaffenheit des Terrains beliebig ausserhalb jener Ebene liegen darf.)

Mit dem in §. 211 beschriebenen Stampfer'schen Nivellirinstrumente kann man nicht bloss nach den beiden hier beschriebenen Methoden nivelliren, sondern auch noch auf eine besondere Art den Höhenunterschied zweier Punkte bestimmen. Diese Bestimmungsweise gehört jedoch mehr in das Gebiet der trigonometrischen Höhenmessung als in das des Nivellirens, und da sie bereits im ersten Bande (S. 407 u. ff.) erörtert wurde, so kann sie hier ganz übergangen werden.

2. Das Nivelliren der Linien.

§. 334.

Für technische Zwecke sind meist zusammengesetzte Nivellemente erforderlich, um die gegenseitige Höhenlage von mehr als zwei Punkten der Erdoberfläche zu erfahren. Liegen die einzunivellirenden Punkte alle in einer Vertikalebene oder in einer lothrechten Cylinderfläche von ganz beliebiger Leitlinie: so heisst das Verfahren zur Bestimmung der Höhenunterschiede aller Punkte der hierdurch bezeichneten geraden oder krummen Linie das Nivellement einer Linie. Sind dagegen die einzunivellirenden Terrainpunkte nach verschiedenen Richtungen zerstreut, aber doch einander so nahe gelegen, dass man aus ihrer gegenseitigen Höhenlage auch die geometrische Form der Fläche beurtheilen kann: so nennt man die Bestimmung der Höhenunterschiede dieser Punkte das Nivellement einer Fläche.

Hat man eine gerade Linie in bekannter Weise auf dem Felde abgesteckt und ausgemessen, so ist ihre Horizontalprojection gegeben; bestimmt man dazu auch die relative Höhenlage aller Punkte dieser Linie durch Nivelliren, so kann man offenbar ein Bild von dem Durchschnitte des Terrains mit der lothrechten Ebene, wodurch die gerade Linie bezeichnet ist, entwerfen und sich folglich eine klare Vorstellung von der Form des Terrains nach der abgesteckten Richtung machen.

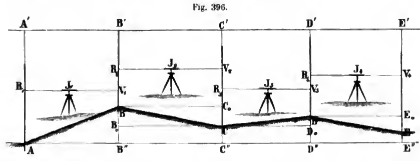
Ein Bild, welches die Erhöhungen und Vertiefungen des Terrains nach einer Linie darstellt, nennt man ein Terrainprofil: die

Linie, nach welcher das Profil genommen ist, kann lang oder kurz, gerade oder krumm seyn. In dem letzteren Falle stellt das Profil den Durchschnitt einer lothrechten Cylinderfläche mit der Terrainfläche vor. Werden Terrainprofile nach zwei sich schneidenden Richtungen aufgenommen, so unterscheidet man diese Profile dadurch von einander, dass man das grössere ein Längenprofil und das kleinere ein Querprofil nennt: Längen- und Querprofile bedingen also einander; wo die einen oder die anderen fehlen, gibt es nur Profile schlechtweg.

§. 335.

Aufgabe. Auf dem Felde ist eine Reihe von Punkten mit Grundpfählen bezeichnet, man soll ihre gegenseitige Höhenlage bestimmen (Fig. 396).

Fig. 396.



Sind A, B, C, D, E .... die gegebenen Punkte, so bestimme man zunächst den Höhenunterschied zwischen A und B nach §. 333, indem man das Nivellirinstrument in I_1 nahezu gleichweit von A und B aufstellt und die Lattenabschnitte

$$AR_1 = r_1 \text{ und } BV_1 = v_1$$

abliest und aufzeichnet. Hierauf bringe man das Instrument nach I_2 zwischen B und C, nahezu gleichweit von beiden Punkten entfernt, verfahre wieder nach §. 333 und bemerke sich die Lattenabschnitte

$$BR_2 = r_2 \text{ und } CV_2 = v_2.$$

Ebenso findet man in dem Punkte I_3 zwischen C und D

$$CR_3 = r_3 \text{ und } DV_3 = v_3,$$

in dem Standpunkte I_4 zwischen D und E

$$DR_4 = r_4 \text{ und } EV_4 = v_4,$$

und in dem Standpunkte I_n der n^{ten} Station:

$$NR_n = r_n \text{ und } N_1 V_n = v_n.$$

Die Ablesungen r_1, r_2, r_3, $r_4 \ldots . r_n$, welche in den Stationen 1, 2, 3, 4 .... n auf den rückwärts gelegenen Punkten A, B, C, D, ... N gemacht wurden, nennt man „Rückblicke“ und die Ablesungen v_1, v_2, v_3, $v_4 \ldots . v_n$, welche in denselben Stationen den vorwärtsgelegenen Punkten B, C, D, E ... N_1 angehören, „Vorblicke.“ Mit diesen Ablesungen ist die Aufnahme des Nivellements vollendet.

Die Berechnung desselben erstreckt sich zunächst auf die Höhenunterschiede zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Punkten. Zieht man stets den Vorblick vom Rückblick ab, so gibt das Vorzeichen der wirklich ausgerechneten Differenz an, ob von dem vorhergehenden Punkte zum folgenden eine Steigung oder ein Gefälle stattfindet; zieht man aber immer nur die kleinere Zahl von der grösseren ab, so ist zu der hierdurch erhaltenen positiven Differenz noch zu bemerken, ob sie eine Steigung oder ein Gefälle bezeichnet.

In dem vorliegenden Falle gaben Messung und Rechnung

von A bis B eine Steigung $B^0 B = r_1 - v_1 = + (r_1 - v_1)$;
„ B „ C ein Gefälle $C^0 C = v_2 - r_2 = - (r_2 - v_2)$;
„ C „ D eine Steigung $D^0 D = r_3 - v_3 = + (r_3 - v_3)$;
„ D „ E ein Gefälle $E^0 E = v_4 - r_4 = - (r_4 - v_4)$;
⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

Mit den Steigungen und Gefällen zwischen je zwei auf einander folgenden Punkten lassen sich sehr leicht die Höhenunterschiede zwischen je zwei getrennten Punkten berechnen. Denn zieht man durch die Punkte A, B, D, E, ... horizontale und vertikale Linien, so überzeugt man sich leicht, dass der Höhenunterschied

zwischen A und $B = BB'' = u_1 = r_1 - v_1$;
„ B „ $C = CC'' = u_2 = r_1 - v_1 + r_2 - v_2$;
„ C „ $D = DD'' = u_3 = r_1 - v_1 + r_2 - v_2 + r_3 - v_3$;
„ D „ $E = EE'' = u_4 = r_1 - v_1 + r_2 - v_2 + r_3 - v_3 + r_4 - v_4$;

und dass somit auch der Höhenunterschied zwischen dem Endpunkte der n^{ten} und dem Anfangspunkte der ersten Station

$$u = r_1 - v_1 + r_2 - v_2 + r_3 - v_3 + \ldots\ldots + r_n - v_n$$

ist. Bezeichnet man die Summe aller Differenzen aus r und v von $r_1 - v_1$ bis $r_n - v_n$ mit $\Sigma (r - v)_n$, so lässt sich die vorstehende Gleichung auch so schreiben:

$$u = \Sigma (r - v)_n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (404)$$

womit demnach auf sehr einfache Weise ausgedrückt ist, dass der

Höhenunterschied zwischen irgend zwei Punkten einer nivellirten Linie gleich ist der algebraischen Summe aller Steigungen und Gefälle zwischen diesen Punkten.

Da sich der vorletzte Ausdruck für u auch so schreiben lässt:

$$u = (r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n) - (v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n),$$

und da man die Summe aller r von r_1 bis r_n durch Σr_n und die Summe aller v von v_1 bis v_n durch Σv_n bezeichnen kann, so ist auch

$$u = \Sigma r_n - \Sigma v_n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (405)$$

d. h. man erhält den Höhenunterschied irgend zweier Punkte einer nivellirten Linie auch dadurch, dass man von der Summe aller Rückblicke die Summe aller Vorblicke zwischen diesen zwei Punkten subtrahirt.

Die beiden Gleichungen (404) und (405) geben den Vertikalabstand jedes Punktes der nivellirten Linie von einer Horizontalebene, die durch den Anfangspunkt A geht. Statt dieser Horizontalebene kann man aber auch jede andere wählen, welche um eine beliebige Grösse über oder unter A liegt. Befindet sich diese Ebene, welche man den „Generalhorizont" des Nivellements nennt, wie es in der Regel der Fall ist, über allen Punkten des Längenprofils und insbesondere um die Grösse h über dem Punkte A, so ist der Abstand des Endpunktes der n^{ten} Station von dem allgemeinen Horizonte

$$y = h - u = h - \Sigma (r - v)_n; \quad \ldots\ldots \quad (406)$$

und läge der Generalhorizont unter allen Punkten des Profils, so würde selbstverständlich $y = h + u$ seyn.

Die durch allgemeine Grössen angedeuteten Berechnungen eines Nivellements gestalten sich bei wirklichen Ausführungen viel einfacher als es hier den Anschein hat, wie die Lösung der folgenden Aufgabe beweist.

§. 336.

Aufgabe. Ein Längenprofil aufzunehmen, zu berechnen und aufzutragen.

1. Aufnahme. Nachdem die Richtung abgesteckt ist, in welcher das Profil zu nehmen ist, besteht die nächste Arbeit in der Bezeichnung der einzunivellirenden Punkte. Dazu gehören erstens alle Punkte, in welchen die Durchschnittslinie ihre Richtung im vertikalen Sinne ändert, wie z. B. in den Punkten A, B, C, D, E .... der

Fig. 396 und zweitens jene Punkte, welche gleiche grössere Abschnitte der Horizontalprojection bezeichnen. Diese letzteren Punkte nimmt man bloss desswegen mit in das Längenprofil auf, um die horizontalen Entfernungen der einzelnen Punkte besser übersehen zu können. Man macht daher ihre horizontalen Abstände entweder = 100 Meter oder = 500 Fuss, oder 100 Klafter = 600 Fuss, oder = 100 Ruthen = 1000 Fuss, und bezeichnet sie von 0 anfangend, mit fortlaufenden Nummern, so dass man also bei jeder Nummer sofort die horizontale Entfernung des Punktes vom Anfangspunkte der Linie kennt. Die mit Nummern bezeichneten Endpunkte gleicher Abschnitte der einzunivellirenden Linie nennt man Hauptpunkte, im Gegensatze zu den innerhalb derselben liegenden Brechungspunkten, welche Zwischenpunkte heissen. Diese werden mit den Anfangsbuchstaben des Alphabets in der Art bezeichnet, dass man diese Buchstaben der Nummer des vorausgehenden Hauptpunktes in Form eines Exponenten beifügt. Sind also z. B. zwischen den Hauptpunkten Nr. 5 und 6 vier Zwischenpunkte zu bezeichnen, so heisst der erste an Nr. 5 stehende Punkt: 5^a, der zweite 5^b, der dritte 5^c, und der vierte 5^d. Wegen der Pfähle vergleiche man §. 79.

Man begreift leicht, dass es wegen dieser an gleiche Horizontalabschnitte der zu nivellirenden Linie geknüpften Bezeichnungen der Punkte nöthig ist, mit dem Abpflocken der Linie auch das Ausmessen [1] derselben in horizontaler Richtung vorzunehmen. Dieses Ausmessen derselben geschieht in der Regel mit der Messkette, obwohl es besser wäre, Messlatten anzuwenden, um zwischen den Genauigkeiten der Horizontal- und Höhenmessungen ein besseres Verhältniss herzustellen. Es versteht sich übrigens von selbst, dass man nicht bloss die Hauptabschnitte der Linie, sondern die horizontalen Entfernungen aller Haupt- und Zwischenpunkte abmisst und zwar zweimal, um sicher zu seyn, dass in diesen Messungen kein grober Fehler liegt.

Ist die ganze Linie abgepflockt und horizontal ausgemessen, so beginnt das Nivelliren in der schon bekannten Weise, nur mit dem Unterschiede, dass man, wenn es das Terrain und die Entfernungen erlauben, von einem Standpunkte aus nicht bloss zwei Punkte, sondern so viele als man gut übersehen kann, einnivellirt. Sind also z. B. die Punkte Nr. 11 und Nr. 12 (Fig. 397) nur so weit von einander

[1] Die Horizontalmessungen sind lediglich wegen des Auftragens des Nivellements zu machen.

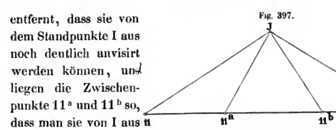


Fig. 397.

entfernt, dass sie von dem Standpunkte I aus noch deutlich anvisirt werden können, und liegen die Zwischenpunkte 11^a und 11^b so, dass man sie von I aus ebenfalls gut sehen kann: so wird die Latte nach einander in den Punkten 11, 11^a, 11^b, 12 abgelesen und hierauf die Station gewechselt. Da die Entfernungen von I nach 11 und 11^a oder von I nach 12 und 11^b ungleich sind, so gleicht sich streng genommen der Einfluss der Strahlenbrechung und Erdkrümmung in den Höhenunterschieden zwischen 11 und 11^a oder zwischen 12 und 11^b nicht aus; derselbe ist aber auch so gering, dass er wohl übersehen werden darf. Denn wenn die Entfernung von I bis 11 sogar 300′ und bis 11^a nur 60′ beträgt, so ist der Fehler, der durch Vernachlässigung der Correction $c' - c$ in den Höhenuntersehied zwischen 11 und 11^a kommt, nach der Tabelle auf S. 278 nur $= 0{,}2753$ Par. Linien und daher um so weniger zu beachten, als er sich nicht durch das ganze Nivellement fortpflanzt, wie es der Fall wäre, wenn die Entfernungen des Instruments von den Endpunkten (Nr. 11, Nr. 12) der Station sehr ungleich gewählt würden.

Für die Herstellung eines brauchbaren Nivellements ist eine Aufzeichnung der Beobachtungen, welche nicht leicht zu Irrungen Veranlassung gibt, sehr wichtig, wesshalb auf ein geeignetes Schema für diese Aufzeichnungen immerhin ein Gewicht zu legen ist. Das nachstehende kann wegen seiner Einfachheit und Uebersichtlichkeit empfohlen werden.

Punkt.	Ablesung	Steigt	Fällt	Ordinate
	Fuss.	Fuss.	Fuss.	Fuss.
0	4,68			100,00
a	3,21	1,47		98,53
b	7,19		3,98	102,51
c	2,86	4,33		98,18
c	10,11			
1	4,67	5,44		92,74
a	12,01		7,34	100,08
b	10,37	1,64		98,44

In die erste Spalte werden die Punkte eingetragen, auf denen die Nivellirlatte steht; in die zweite die Ablesungen auf dieser Latte; in die dritte die Steigungen; in die vierte die Gefälle von einem vorhergehenden zum folgenden Punkte; in die fünfte endlich die Abstände der einnivellirten Punkte vom allgemeinen Horizonte. Jeder Stationswechsel (hier bei 0^a und 1^b) wird durch einen die zwei ersten Spalten durchschneidenden Querstrich angedeutet. Auf dem Felde werden auch nur die zwei ersten Spalten ausgefüllt.

2. Berechnung. Die Steigungen, Gefälle und Ordinaten werden erst zu Hause oder wenigstens nicht gleich unmittelbar nach jeder Beobachtung berechnet. Wie man dabei zu Werke geht, ergibt sich aus der vorstehenden Tabelle von selbst.

Nach den Gleichungen (404) und (405) soll $\Sigma r_n - \Sigma v_n = \Sigma (r - v)_n$ seyn; in dem vorliegenden Falle ist aber

$$\Sigma r_n = r_1 + r_2 = 4{,}68 + 10{,}11 = 14{,}79$$
$$\Sigma v_n = v_1 + v_2 = 2{,}86 + 10{,}37 = 13{,}23$$

folglich $\Sigma r_n - \Sigma v_n = 14{,}79 - 13{,}23 = 1{,}56$; ferner ist

$$\Sigma (r - v)_n = 1{,}47 + 4{,}33 + 5{,}44 + 1{,}64 - (3{,}98 + 7{,}34) = 1{,}56$$

und somit, wie es seyn muss, die Differenz aller Steigungen und Gefälle gleich der Differenz aller Rück- und Vorblicke.

Die Uebereinstimmung dieser beiden Differenzen kann man als ein günstiges Zeichen für die fehlerfreie Berechnung der Steigungen und Gefälle zwischen 0 und 1^b ansehen. Da nun von 0 bis 1^b eine Steigung von 1,56 stattfindet, und da der Abstand des Punktes 0 vom allgemeinen Horizonte = 100,'00 angenommen wurde, so muss der Abstand des Punktes $1^b = 100' - 1{,}'56 = 98{,}'44$ seyn. Kommt man durch die successive Berechnung aller Ordinaten am Schlusse zu demselben Resultate, so kann man hierin wieder ein günstiges Zeichen für diesen Theil der Berechnung erblicken.

Die hier angedeuteten Proben muss man auf jeder Seite der oft sehr ausgedehnten Nivellementstabellen vornehmen, wenn man nicht Gefahr laufen will, einen grossen Theil der Ordinatenberechnungen wiederholen zu müssen; denn jeder Fehler in der Berechnung der Steigungen oder Gefälle, sowie jeder Fehler in einer Ordinate kehrt in allen Ordinaten wieder, da jede folgende aus der vorhergehenden bestimmt wird.

3. Genauigkeit. Ein Urtheil über die Genauigkeit eines Nivellements lässt sich nur aus einer zweiten von der ersten unabhängigen

Messung schöpfen. Daher ist es durchaus nöthig, dass man jede Linie zweimal mit gleicher Sorgfalt nivellirt und, nachdem für jedes Nivellement die Steigungen und Gefälle berechnet sind, vergleicht, ob diese Ergebnisse der beiden Messungen für je zwei gleichnamige Stationen stimmen oder nicht. Kommen hier bloss Differenzen von einer oder zwei Linien vor, so kann man diese Abweichungen übersehen; betragen aber diese Unterschiede in den Messungsresultaten mehr, so entscheidet an den betreffenden Stellen ein drittes Nivellement, welche von den beiden ersten Messungen, oder ob keine derselben die richtige war. Die hierdurch sich ergebenden Verbesserungen der Beobachtungen werden in die Nivellementstabellen eingetragen, und erst hierauf beginnt die Berechnung der Ordinaten für beide Nivellemente.

Die Differenz, welche beide Rechnungen in der letzten Ordinate zeigen, dividirt durch die Länge der nivellirten Linie, sieht man gewöhnlich als die relative Genauigkeit des Nivellements an, und nach diesem Verhältnisse beurtheilt man auch die Güte der Arbeit. Durch sorgfältige Behandlung der Instrumente, genaues Einstellen und Ablesen, richtiges Aufschreiben etc. kann man es bald dahin bringen, dass zwei Nivellemente von 100000 Fuss Länge auf 2 bis 3 Zolle stimmen, also eine relative Genauigkeit von $\frac{1}{500000}$ bis $\frac{1}{300000}$ haben. Diese Genauigkeit besitzt aber das Nivellement keineswegs an allen Stellen; denn wenn in einzelnen Stationen Fehler von 1 oder 2 Linien auf 500 Fuss vorkommen, so beträgt die relative Genauigkeit nur $\frac{1}{50000}$ bis $\frac{1}{25000}$, also ungefähr 10mal weniger. Die relative Genauigkeit der ganzen Messung wird immer grösser erscheinen als die ihrer Abtheilungen, weil die Fehler, welche in diesen begangen werden, bald positiv bald negativ sind und sich somit theilweise aufheben.

In Preussen wird ein Nivellement für genügend erklärt, welches keine grösseren Fehler enthält als folgende:

Auf	1 bis	10 Stationen	höchstens	$^1/_8$	Zoll	für jede Station;
„	10 „	15	„	„	2	„	im Ganzen;
„	15 „	20	„	„	$2^1/_2$	„	„ „
„	20 „	30	„	„	3	„	„ „
„	30 „	40	„	„	$3^3/_4$	„	„ „

Auf 40 bis 50 Stationen höchstens $4^1/_2$ Zoll im Ganzen;
„ 50 „ 65 „ „ $5^1/_4$ „ „ „
„ 54 „ 80 „ „ 6 „ „ „
„ 80 „ 100 „ „ $6^3/_4$ „ „ „
„ 100 „ 120 „ „ $7\,/_2$ „ „ „
„ 120 „ 150 „ „ $8^1/_2$ „ „ „

Bei noch längeren Nivellementen ist auf je 150 Stationen eine Differenz der beiden Messungen von 8 Zollen zulässig. Die Länge der Stationen ist nicht festgesetzt, weil sie von der Beschaffenheit des Bodens abhängt; es wird aber angenommen, dass der Geometer nicht mehr Stationen mache, als durchaus nothwendig sind. Nehmen wir eine Station im Durchschnitte zu 40 Ruthen oder 400 Fuss an, so würde z. B. bei 150 Stationen, also bei einer Länge von 60000 Fuss oder 720000 Duodecimalzollen, die relative Genauigkeit der ganzen Messung, welche gefordert wird, nahezu $\frac{1}{85000}$ seyn, während dieselbe bei 30 Stationen unter denselben Voraussetzungen $\frac{1}{48000}$ betrüge.

4. Ausgleichung. Wenn zwei Nivellemente einer und derselben Linie nicht innerhalb der vorgeschriebenen Grenzen übereinstimmen, so werden wohl auch statt des praktischen Verfahrens: die mehr als zwei Linien betragenden Differenzen durch eine dritte Messung einzelner Stationen zu verbessern und hierauf eines der beiden Nivellemente als das richtige anzusehen, Ausgleichungen der Differenzen durch Vertheilung des Gesammtfehlers vorgenommen.

Die Methoden, nach denen dieses geschieht, sind verschieden; unter allen aber scheint jene noch die annehmbarste zu seyn, welche das arithmetische Mittel der aus dem ersten und zweiten Nivellement hervorgegangenen Abstände der einnivellirten Punkte vom allgemeinen Horizonte als die richtigen Ordinaten (Coten) dieser Punkte ansieht.

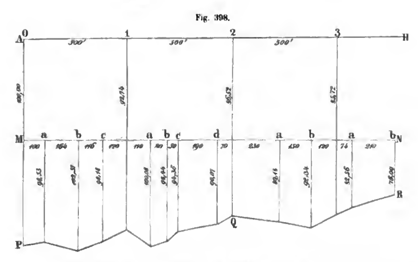
Wir rathen jedoch dringend, diese Ausgleichungen erst dann vorzunehmen, wenn man sich überzeugt hat, dass in den einzelnen Stationen keine grösseren Fehler als von zwei oder höchstens drei Linien vorkommen.

5. Auftragen. Unter dem „Auftragen" eines Profils versteht man die Zeichnung desselben aus den durch die Aufnahme und

Berechnung des Nivellements gegebenen Stücken. Die Fig. 398 stellt ein Stück von einem Längenprofile vor, wie es die Ingenieure in der Regel zeichnen und wozu die Ergebnisse der Aufnahme und Berechnung in der nachstehenden Tabelle enthalten sind.

Punkt.	Entfernung.	Ordinate.	Punkt.	Entfernung.	Ordinate.
	Fuss.	Fuss.		Fuss.	Fuss.
0	100,00	100	1 c	190	90,07
a	98,53	164	d	70	86,52
b	102,51	116	2	230	89,18
c	98,18	120	a	150	92,34
1	92,74	110	b	120	85,72
a	100,08	80	3	74	82,56
b	98,44	50	a	210	76,09
c	94.36		b		

Fig. 398.



Zur Erläuterung der Zeichnung mögen folgende Bemerkungen dienen:

Alle Ordinaten werden von dem allgemeinen Horizonte AH an abgemessen, obwohl die Zwischenpunkte nur bis an die dem Horizonte parallele Linie MN gezogen sind. Diese Anordnung hat lediglich darin ihren Grund, dass man durch sie einen schnelleren Ueberblick der horizontalen Entfernungen oder Abscissen der einnivellirten Punkte gewinnt. Der Massstab der Ordinaten ist 10 mal grösser als jener der Abscissen; die Linie PQR gibt also nur ein verzerrtes Bild

des nivellirten Terraindurchschnitts. Durch diese Anordnung gewinnt man aber einen schnelleren Ueberblick der Höhenunterschiede, als es bei gleichen Massstäben für Abscissen und Ordinaten möglich wäre. Denn da für die Abscissen der Längenprofile nur kleine Massstäbe gewählt werden können, wenn man die Zeichnung nicht ungebührlich gross machen will, so würden sich die oft ganz unbedeutenden Höhenunterschiede von einem Punkte zum andern oft kaum erkennen lassen, wenn man sie in den Massstäben der Abscissen darstellen wollte. Das Verhältniss der Massstäbe für die Längen und Höhen wird den Umständen gemäss gewählt.

§. 337.

Aufgabe. Ein Querprofil aufzunehmen, zu berechnen und aufzutragen.

Die Absicht, in welcher Querprofile aufgenommen werden, besteht entweder in der Darstellung einer grösseren Terrainfläche nach ihren Erhöhungen oder Vertiefungen mittelst horizontaler Schnittlinien, oder in der Benützung jener Profile zur Berechnung von Erdmassen, welche von einer Stelle zur andern zu versetzen sind. In dem ersteren Falle ist das Querprofil mit derselben Genauigkeit wie ein Längenprofil aufzunehmen, wesshalb dabei auch alle Regeln des vorigen Paragraphen zur Anwendung kommen; in dem letzteren Falle aber, wo überdiess die Querprofile nur eine geringe Länge haben, darf die Genauigkeit der Aufnahme eine etwas geringere seyn als vorhin. Hier wird lediglich der zweite Fall behandelt.

1. Aufnahme. Die Aufnahme der Querprofile setzt die vollständige Herstellung des Längenprofils, worauf sich jene beziehen, voraus. Damit ist bereits für jedes Querprofil die Bezeichnung und die Ordinate eines Punktes festgesetzt; denn man benennt das Querprofil am einfachsten nach dem Punkte des Längenprofils, in welchem es dasselbe senkrecht oder schief schneidet, und der Abstand dieses Punktes vom allgemeinen Horizonte ist aus dem Längennivellement bekannt.

Durch das Längenprofil wird jedes Querprofil in zwei Theile getheilt, welche nach der Seite, auf welcher sie liegen, unterschieden werden. Um in jedem Falle beurtheilen zu können, welches die rechte oder linke Seite eines Längenprofils ist, denkt man sich in dieses so gestellt, dass das Auge von den niederen Nummern

der Hauptpunkte nach den höheren sieht: rechts des Beobachters liegt alsdann auch die rechte und links die linke Seite nicht nur des Längenprofils, sondern auch der Querprofile.

Bei der Aufnahme der letzteren ist strenge darauf zu sehen, dass diese beiden Seiten nicht mit einander verwechselt werden; denn jede solche Verwechslung würde eine völlige Entstellung des geometrischen Bildes des Terrains zwischen dem vorhergehenden und nachfolgenden Querprofile zur Folge haben. Man soll sich desshalb angewöhnen, die Skizze des Querprofils, welche man bei dessen Aufnahme in das Notizbuch zeichnet, so anzulegen, dass dem, der in dieses Buch sieht, sofort die linke Seite des Querprofils zur Linken und folglich die rechte zur Rechten liegt.

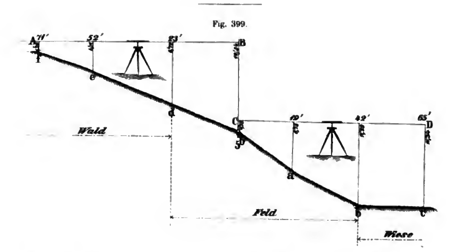
Die erste Arbeit zur Aufnahme eines Querprofils besteht in der Absteckung seiner Richtung. Da diese fast durchweg senkrecht zur Axe des Längenprofils steht, so bedient man sich dazu des Winkelspiegels oder des Prismenkreuzes. Ist durch besondere Umstände eine schiefe Richtung bedungen, so wird deren horizontaler Neigungswinkel gegen die Axe des Längenprofils mit den bekannten Hilfsmitteln bestimmt und seine Grösse in das Notizbuch eingetragen.

Hierauf folgt eine einfache Bezeichnung der Brechungspunkte durch Markpflöcke. Grundpfähle sind hier so lange unnöthig, als der Boden die Nivellirlatte trägt; nur wenn dieser weich ist, wendet man Grundpfähle an. Will man auf die Markpflöcke Zeichen setzen, um die Punkte zu unterscheiden, so mag man es thun; nöthig sind sie aber aus dem Grunde nicht, weil sofort nach der Absteckung die Abscissen und Ordinaten aller Berechnungspunkte des Querprofils gemessen und in das Notizbuch eingetragen werden, wie die Fig. 399 zeigt, bei welcher angenommen wurde, dass zwei Stationen hinreichen, das Querprofil aufzunehmen, und in der zugleich angedeutet ist, in welcher Weise Bemerkungen über die von dem Querprofile durchschnittenen Culturen, Bauwerke u. dgl. anzubringen sind.

Es bedarf wohl kaum weiterer Erörterung, wie zu verfahren ist, wenn zum Nivelliren mehr als zwei Aufstellungen des Instruments nöthig sind, sowie es sich von selbst versteht, dass in vielen Fällen eine einzige Station hinreichen kann, die Höhenunterschiede aller Punkte eines Querprofils zu finden.

2. Berechnen und Auftragen. Kommt es bloss darauf

Fig. 399.



an, das Querprofil zu zeichnen, ohne dass man den Abstand der Brechungspunkte desselben vom allgemeinen Horizont wissen will, so kann man entweder die Horizonte aller Aufstellungen des Instrumentes (hier die Linien AB, CD) als Abcissenaxen benützen und von ihnen aus die abgelesenen Höhen abtragen — in diesem Falle bedarf es gar keiner Berechnung —; oder man reducirt die Ablesungen für verschiedene Horizonte auf einen und denselben Horizont (hier z. B. auf AB, indem man zu den Ablesungen auf der rechten Seite des Profils den Abstand BC = 12,34 — 0,75 = 11,'59 addirt) und trägt die Brechungspunkte von diesem aus ab; oder endlich man denkt sich durch den Hauptpunkt (hier 5^b) des Querprofils eine horizontale gelegt und führt alle Abstände auf diesen zurück; wobei sich von selbst versteht, dass diese Abstände bald positiv bald negativ werden. In dem vorliegenden Falle ergeben sich die Abstände, welche in der Fig. 400 eingetragen sind.

Fig. 400



Will man auch für ein Querprofil die Abstände seiner Brechungspunkte vom allgemeinen Horizonte wissen, so berechne man erst die

Abstände für den Horizont des Hauptpunktes (hier 5^b) und verbinde dieselben mit dem Abstande des Hauptpunktes (hier 108,'64) so, wie es ihre Vorzeichen verlangen. Demnach ist in dem gewählten Beispiele der Abstand des Punktes a = 108,'64 + 6,'03 = 114,'67 und der von d = 108,'64 — 3,'62 = 105,'02.

Was die Massstäbe betrifft, nach denen die Querprofile gezeichnet werden, so bestehen hier keine festen Regeln: es kommt lediglich auf den Zweck an, dem diese Profile zu dienen haben. Werden die Querprofile in ähnlicher Weise verwendet wie Längenprofile, so zeichnet man sie auch so; dienen sie aber zur Berechnung von Erdmassen, so wählt man gewöhnlich einen grossen Massstab (in der Regel 1 : 100), damit man die einzelnen Dimensionen leicht abgreifen kann, und es versteht sich in diesem Falle von selbst, dass die Abscissen und Ordinaten nicht nach zwei verschiedenen Massstäben aufgetragen werden dürfen.

3) Das Nivelliren der Flächen.

§. 338.

Eine Fläche ist nivellirt, sobald man die Höhen aller bemerkenswerthen Punkte derselben bestimmt und in den Horizontalplan eingetragen hat. Damit liefert aber dieser Plan noch kein Bild von dem Zusammenhange der Erhöhungen und Vertiefungen oder von der Form des Terrains; denn aus den eingeschriebenen Ordinaten der einnivellirten Punkte lässt sich die Gestalt einer vielfach gekrümmten Fläche eben so wenig genau erkennen, als es möglich ist, sich aus den bloss in Zahlen ausgedrückten horizontalen Entfernungen eingemessener Punkte den Grundriss der von ihnen gebildeten Figuren in allen Theilen richtig vorzustellen. Man bedarf also eines graphischen Mittels, das die Höhen der Terrainpunkte eben so anschaulich darstellt als ein Situationsplan die horizontal projicirten Umfangslinien der Parzellen. Dieses Mittel ist aber in den Horizontalcurven gegeben.

Denkt man sich nämlich die nach ihren Erhöhungen und Vertiefungen darzustellende Terrainfläche durch horizontale Ebenen geschnitten, welche gleich weit von einander abstehen, und die Durchschnittslinien auf den Horizontalplan der Fläche projicirt, so übersieht man mit diesen Linien sofort alle Punkte von gleicher Höhenlage

und erkennt aus ihren Zwischenräumen die Neigungsverhältnisse des Terrains, dem sie angehören. Diese horizontalen Schnittlinien (Horizontalcurven, Niveaucurven, Schichtenlinien, Höhencurven etc.) sind für alle Arten von Terrainstudien, namentlich aber für diejenigen, welche zum Zwecke technischer Unternehmungen gemacht werden, sehr wichtig, wesshalb sie auch, wie hier geschieht, ausführlich behandelt zu werden verdienen. Für manchen Leser mögen überdiess die folgenden geschichtlichen Notizen über ihre Erfindung nicht ohne Interesse seyn.

Die Idee, horizontale Curven zur bildlichen Darstellung der Oberflächen des Terrains anzuwenden, rührt, soviel darüber bis jetzt bekannt geworden ist, von dem französischen Geographen Buache her. Derselbe legte im Jahre 1737 der Academie der Wissenschaften in Paris, deren Mitglied er war, eine von ihm fünf Jahre früher aufgenommene Karte des Departements La Manche vor, in welcher er die gleichen Tiefen des Meeres, also auch die Gestalt der Meeresküste durch solche Curven bezeichnete. In seiner dazu geschriebenen Abhandlung, welche erst in den Denkschriften vom Jahre 1752 (essais de géographie physique) gedruckt wurde, äusserte er: „Der Gebrauch, den ich von den Sondirungen des Meeres gemacht habe, um seine Tiefen auszudrücken, und den vor mir Niemand gemacht hat, scheint sehr geeignet zu seyn, die Neigungsverhältnisse der Ufer genau darzustellen ....“ In einer späteren Arbeit (parallèle des fleuves de quatre partie du monde) vervollständigte er seine Idee mit den Worten: „Ich habe mir vorgenommen, auf dem Terrainrelief des Globus (den er damals anfertigte) Linien zu ziehen, welche der Oberfläche des Meeres parallel laufen (also horizontal sind), wie ich es für das Innere des Meeres schon bei dem Relief der Manche gethan habe. Indem man Erhebungen des Meeres über sein wirkliches Niveau voraussetzt, lassen sich die Landstriche erkennen, welche durch die allmählige Zunahme der Wassermasse bedeckt würden ...“

Buache hat seine Idee nicht weiter verfolgt, und darum gilt der Ingenieur Ducarla in Genf als der Erste, welcher die Darstellung des Terrains durch Horizontalcurven zu einer Methode erhob und ins Leben einführte. Er thut dieses in einer besonderen Abhandlung hierüber, die er unter dem 4. Mai 1771 der Academie der Wissenschaften in Paris überreichte, und in einem grösseren Werke, das

11 Jahre später erschien und den Titel führt: „Expression des nivellements ou methode nouvelle pour marquer rigoureusement, sur les cartes terrestres et marines, les hauteurs et les configurations du terrain; par M. Ducarla.“ Paris, 1782. Ducarla erkennt hierin ausdrücklich an, dass er die von Buache gegebenen Andeutungen kannte, glaubt aber, dass dieser gelehrte Geograph die Fruchtbarkeit seiner Idee nicht vollständig zu würdigen wusste, da er bei drei Unterredungen mit ihm im Jahre 1771 die Priorität derselben nicht in Anspruch nahm. „Seine bedeutenden Arbeiten, fügt Ducarla bei, sein Alter, seine Gebrechlichkeit hatten ihn ganz ausser Stand gesetzt, meinen Erörterungen lange zu folgen, und er sagte mir mehrere male und noch bei meiner Abreise, dass er nichts davon begreife, obgleich seine Herren Collegen mit seiner Arbeit zufrieden gewesen seyen.“

Es kann nun sehr wohl seyn, dass dieser alte Mann sich nicht mehr genau der Arbeiten erinnerte, welche er vor 40 Jahren gemacht hatte, und dass er auch den Umfang ihrer technischen Anwendung nicht ganz ermessen konnte; gleichwohl gebührt ihm das Verdienst der Erfindung der Horizontalcurven, während Ducarla als derjenige anzusehen ist, der diesem vorzüglichen Mittel der Terrainzeichnung Geltung zu verschaffen wusste.

A. Das Absteeken der Horizontalcurven.

§. 339.

Aufgabe. Auf dem Felde ist ein Punkt gegeben: man soll die demselben angehörende Horizontalcurve abstecken.

Der gegebene Punkt befinde sich auf der Oberfläche eines Hügels und sey durch einen Grundpfahl bezeichnet. Ueber demselben stelle man die Nivellirlatte und in passender Entfernung das Nivellirinstrument auf.

Hierauf richte man das Fadenkreuz auf die Latte und lese die Visirhöhe ab. Nun lasse man die Latte in einem zweiten, etwa 100 Fuss vom ersten entfernten und dem Augenmasse nach gleich hoch gelegenen Punkte aufstellen, richte das Fernrohr wieder darauf ein und lese ab. Ist diese Ablesung der vorigen gleich, so liegt der zweite Punkt gerade so hoch als der erste; ist sie aber kleiner oder

grösser, so muss die Latte auf dem Terrain so lange ab- oder aufwärts verrückt werden, bis die Ablesungen gleich werden. Der also gefundene Terrainpunkt wird mit einem Grundpfahle bezeichnet, dessen Oberfläche genau in der Horizontalebene des gegebenen Punktes liegen muss. Kann man vom Instrumente aus noch den Theil des Hügels übersehen, auf den der dritte Punkt trifft, so bestimme man denselben gerade so wie den zweiten und bezeichne ihn auch wie diesen. Muss hierauf die Station gewechselt werden, so lasse man die Latte auf dem Punkte Nr. 3 stehen, wähle einen neuen Standpunkt und verfahre nun gerade so, als ob dieser Punkt der Anfangspunkt wäre.

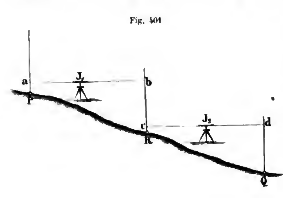
§. 340.

Aufgabe. Ein Punkt eines Längenprofils ist auf dem Felde und durch seine Cote gegeben: man soll, von ihm ausgehend, eine Horizontalcurve von bestimmter Höhe abstecken.

Heisst der Abstand des gegebenen Fixpunktes (P) vom allgemeinen Horizonte z und jener der Curve $z + \eta$, so kommt es zunächst bloss darauf an, irgend einen Punkt (Q) aufzusuchen, der um die Grösse η tiefer liegt als der Fixpunkt; denn ist dieser Punkt gefunden, so erfolgt die weitere Absteckung der Curve nach der im vorhergehenden Paragraph gegebenen Anleitung.

Ist η kleiner als die Lattenhöhe, so kann man Q mit einer einzigen Aufstellung des Instruments finden, ausserdem müssen zwei oder mehrere Stationen gemacht werden; in jedem Falle aber ist es leicht, einen Punkt anzugeben, der den Abstand $z + \eta$ hat. Denn angenommen bei der ersten Aufstellung des Instruments werde auf dem Fixpunkte der Lattenabschnitt $Pa = l$ (Fig. 401) und auf dem Zwischenpunkte R der Abschnitt Rb $= l'$ abgelesen, so liegt R um $l' - l$ tiefer als P. Ist nun

Fig. 401



$\eta = l' - l + \xi$ und ist ξ kleiner als die Lattenhöhe, so stelle man das Instrument in J_2 so auf, dass die Latte in R möglichst nahe am Fusse von der Absehlinie getroffen wird, stelle das Fernrohr und die Libelle ein und lese ab. Heisst die Ablesung h, so muss nunmehr durch Probiren die Latte auf einen Punkt gebracht werden, welcher eine Ablesung $h' = h + \xi$ liefert. Dieser Punkt (Q) wird mit einem Grundpfahle bezeichnet, und nachdem der Höhenunterschied zwischen ihm und dem Fixpunkte durch ein zweites Nivellement controlirt ist, kann die ihm angehörige Curve nach §. 339 abgesteckt werden.

Wäre der Abstand der gesuchten Horizontalcurve $z - \eta$ gewesen, so hätte man zunächst einen um die Grösse η über P gelegenen Punkt (S) bestimmt und hierauf auch wieder das Verfahren des vorigen Paragraphen angewendet, um die Curve selbst zu erhalten.

B. Das Aufnehmen der Horizontalcurven.

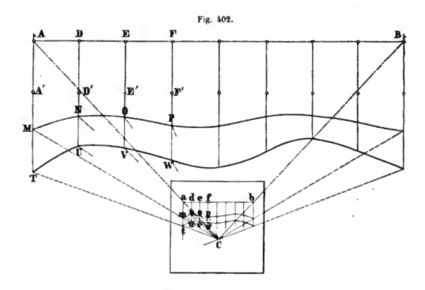
§. 341.

Bei der Aufnahme von Horizontalcurven lassen sich zwei Fälle unterscheiden: entweder sind nämlich wirklich abgesteckte Horizontallinien in verjüngtem Masse graphisch darzustellen, oder es sind auf einer gegebenen Terrainfläche bloss die Messungen zu machen, nach denen die Horizontalabschnitte dieser Fläche construirt werden können. Der erste Fall kommt selten und in der Regel nur dann vor, wenn es sich bloss um eine oder einige Curven handelt, und wenn mit der Aufnahme dieser Curven auch die der Horizontalprojection des Terrains, worauf sie liegen, verbunden wird. Der zweite Fall dagegen ist derjenige, welcher das eigentliche Nivelliren der Flächen ausmacht und uns daher insbesondere beschäftigt.

Die Methoden, nach denen Horizontalprojectionen aufgenommen werden, sind aus dem ersten Abschnitte dieses Bandes bekannt; es genügt desshalb zur Erledigung des ersten Falles die Bemerkung, dass es die Aufnahme wirklich abgesteckter Horizontalcurven sehr erleichtert, wenn man bei der Absteckung Querprofile anwendet, welche auf einer geraden Axe senkrecht stehen und gleichweit von einander entfernt sind, wie dieses in Fig. 402 angedeutet ist. In derselben stellt die Linie AB eine Gerade vor, welche nahezu horizontal ist und auf der die gleichen Abschnitte AD, DE, EF....

von 50 oder 100 Fuss Länge abgemessen sind. Die Linien AA′, DD′, EE′, FF′ .... stehen senkrecht zu AB, und es sind dieselben auf dem Felde durch Absteckstäbe sichtbar gemacht, damit der Messgehilfe nach Anleitung des Geometers die Nivellirlatte in den

Fig. 402.



Richtungen dieser Linien so weit versetzen kann, bis er die Curvenpunkte M, N, O, P ...., T, U, V, W .... gefunden hat. Sollen nun diese Punkte z. B. mit dem Messtische aufgenommen werden, so bestimme man auf dem Felde von den beiden Punkten A und B aus durch Vorwärtsabschneiden den Punkt C, von dem aus sich die beiden Curven übersehen lassen, trage auf dem Bilde von AB = ab die Abstände AD = ad, DE = de, EF = ef... ab, errichte in diesen Punkten die Senkrechten am, dn, eo, fp ...., stelle den Messtisch über C auf, orientire ihn nach A und B, und visire nach und nach die abgesteckten Punkte der beiden Curven an, so ergeben sich deren Bilder m, n, o, p ...., t, u, v, w .... als Durchschnitte der Absehlinien mit den Senkrechten, welche auf ab errichtet wurden. Die Vielecke mnop..., tuvw... werden in der Zeichnung nach dem Augenmasse so verbessert, dass sie die nur in einzelnen Punkten abgesteckten Curven möglichst treu darstellen.

Was den zweiten Fall betrifft, so kommt es im Allgemeinen

darauf an, über die zu nivellirende Fläche ein Netz von Linien zu verbreiten, welches alle bemerkenswerthen Terrainpunkte deckt, und dieses Netz aufzunehmen und zu nivelliren. Die Form des Netzes richtet sich, wie aus den nachfolgenden Aufgaben zu entnehmen ist, nach der Gestalt des Terrains und der Genauigkeit, welche von der Zeichnung verlangt wird.

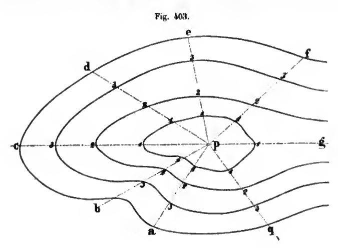
§. 342.

Aufgabe. Es sey ein Hügel, dessen Situationsplan gegeben ist, durch Horizontalcurven darzustellen. (Fig. 403 und 404.)

In diesem Falle ist es zweckmässig, den Hügel von seinem Scheitel aus nach verschiedenen Richtungen zu nivelliren, die hierdurch erhaltenen Profile durch gleichweit abstehende Horizontalebenen zu schneiden, die Schnittpunkte auf die in den Horizontalplan eingetragenen Richtungen der Profile zu projiciren, die einer Horizontalebene angehörenden Projectionen zu Polygonen zu verbinden und diese in die gesuchten Curven selbst überzuführen. Dieses Verfahren zieht folgende Arbeiten nach sich.

1) Das Abstecken der Richtungen der Profile. Man wählt diese so, dass sie sowohl die stärksten als die schwächsten Neigungen der Hügelfläche treffen; denn in diesen Richtungen ist die Natur des Terrains am schärfsten ausgesprochen. Darin liegt auch zugleich ein Anhaltspunkt für die Anzahl der Profile; ein

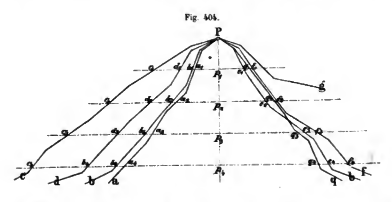
Fig. 403.



anderer hängt von der verlangten Genauigkeit der Terrainzeichnung ab. Der Scheitel (P) des Hügels und alle Brechungspunkte der Profile werden wie bei einem Längennivellement mit Grund- und Beipfählen bezeichnet, während auf dem äussersten, von dem Scheitel aus noch sichtbaren Punkte jedes Profils eine Signalstange mit einer Bezeichnung des Profils (nach der Fig. 403 die Buchstaben A, B, C, D, E, F, G) aufgestellt ist.

2. Das Aufnehmen der Profile. Dazu gehört erstens die Messung der Richtungswinkel der Linien PA, PB... BG in Bezug auf eine feste gerade Linie (hier PQ), welche sowohl auf dem Terrain als in dessen Horizontalplan gegeben seyn muss; zweitens das

Fig. 404.



Abmessen der horizontalen Entfernungen der Brechungspunkte der Profile, vom Scheitel (P) aus; und endlich drittens das Einnivelliren aller dieser Punkte, welches ebenfalls von dem Grundpfahle des Scheitels auszugehen hat. Die Art der Ausführung dieser Arbeiten ist bekannt.

3. Das Zeichnen der Profile und der Curven. Strenge genommen gehört die Anweisung zu dieser Verrichtung in die dritte Abtheilung dieses Buchs; da jedoch das Aufnehmen der Horizontalcurven in mehrfacher Hinsicht erst durch die Zeichnung derselben recht klar wird, so mag es in diesem Falle erlaubt seyn, der genannten Abtheilung vorzugreifen.

Die Profile des Terrains zeichnet man so, dass die Abscissen in dem Massstabe des Horizontalplanes, die Ordinaten aber 5 oder 10mal grösser dargestellt werden. Man kann diese Profile einzeln, oder, wie hier Fig. 404 geschehen ist, vereinigt darstellen, so zwar, dass

sie alle den Scheitelpunkt (p) gemein haben. Die Profile PA, PB, PC.... sind hier durch pa, pb, pc.... und die horizontalen Schnittebenen, deren Abstände von p an gezählt sind und 10, 20, 30, 40.... Fuss betragen, durch 1, 2, 3, 4.... bezeichnet. Die Curve (1) ergibt sich, indem man auf den Profilrichtungen pa, pb, pc... (Fig. 403) die Horizontalabstände p_1a_1, p_1b_1, p_1c_1.... der Schnittpunkte a_1, b_1, c_1.... vom Scheitel p aus abträgt. Eben so erhält man die Curve (2), indem man auf pa, pb, pc.... (Fig. 403) die Abstände p_2a_2, p_2b_2, p_2c_2.... (Fig. 404) abmisst u. s. w. f.

Sind die Schnittpunkte aller Profile mit den Horizontalebenen in den Plan eingetragen, so kann man allerdings zunächst nur die horizontalen Polygone zeichnen, welche durch diese Punkte bestimmt sind; allein aus der unmittelbaren Anschauung des Terrains, welche der Zeichnung voranging, oder vor deren Vollendung nochmals stattfindet, kann man diese Polygone nach dem Augenmasse in stetige, dem Terrain sich anschmiegende Curven verwandeln.

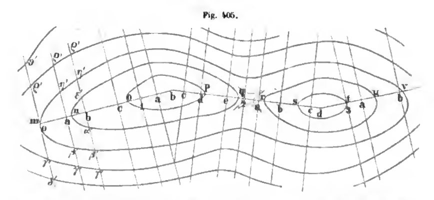
§. 343.

Aufgabe. Es sey ein Bergrücken, dessen Situationsplan gegeben ist, durch Horizontalcurven darzustellen.

Das Verfahren, welches in diesem Falle am zweckmässigsten erscheint, besteht darin, dass man erstens nach der Länge des Rückens eine Operationslinie aussteckt und nivellirt, zweitens Querprofile aufnimmt, welche sich über die ganze Breite des Bergrückens erstrecken; und drittens aus diesen Längen- und Querprofilen die Horizontalcurven construirt.

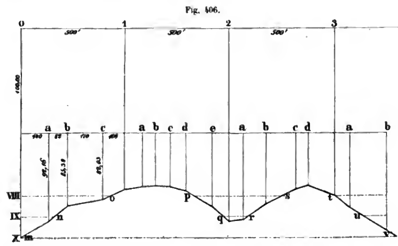
1. Die Operationslinie wird zwischen zwei in dem Plane genau bezeichneten Fixpunkten ausgesteckt. In ihrer Horizontalprojection bildet sie ein offenes Polygon mit langen Seiten, welche sich so viel als möglich der Wasserscheide des Bergrückens nähern. Die Eckpunkte werden durch Signalstangen bezeichnet und die Winkel mit dem Theodolithen, die Seiten mit Messlatten gemessen. Hiernach lässt sich die Horizontalprojection derselben in den Situationsplan der aufzunehmenden Terrainfläche eintragen: in Fig. 405 stellt 0123 die Operationslinie vor. Ausserdem wird die ausgesteckte Operationslinie wie die Axe eines Längenprofils abgepflöckt und zweimal vermessen und nivellirt. Nach der Berechnung des Nivellements

Fig. 405.



erfolgt das Auftragen nach § 336, wobei sich von selbst versteht, dass die horizontalen Entfernungen im Massstabe des Situationsplanes und die Ordinaten etwa 5 oder 10mal grösser zu zeichnen sind. In Fig. 406, welche das Längenprofil der Operationslinie ist, sind die Höhen 10mal grösser als die Längen.

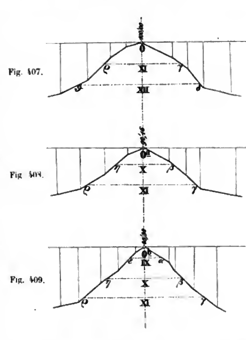
Fig. 406.



2. Die Querprofile stehen in der Regel senkrecht zur Operationslinie, weil sie sich bei dieser Richtung am leichtesten auf dem Terrain ausstecken und in den Horizontalplan eintragen lassen. Fordert aber die Natur des Terrains schiefe Richtungen, so wählt man diese und misst ihre Neigungswinkel gegen die Operationslinie, um sie ebenfalls in dem Horizontalplane genau angeben zu können. Das Abstecken, Aufnehmen, Berechnen und Zeichnen der Querprofile

geschieht nach §. 337, wozu nur noch zu bemerken ist, dass dem vorliegenden Zwecke eine mit dem Längenprofil übereinstimmende und in den Figuren 407, 408, 409 angedeutete Zeichnung am bessten entspricht.

3. Die Construction der Curven aus dem Längenprofile, den Querprofilen und dem Situationsplan ist sehr einfach. Man schneidet nämlich zuerst das Längenprofil durch horizontale Linien, welche die Abstände der Schnittebenen haben, um die Projectionen (m, n, o, p, q, r, s, t, u, v) aller Curvenpunkte zu erhalten, welche in der Operationslinie selbst liegen, und trägt diese Projectionen in die Horizontalprojection der Operationslinie über. Ebenso schneidet man mit horizontalen Linien von der Höhe der Schnittebenen alle Querprofile und projicirt die Schnittpunkte auf die im Horizontalplane eingetragenen Richtungen dieser Profile. (Für das Querprofil Nr. 0 ergeben sich z. B. die Punkte ϑ, ϱ, γ, δ, welche im Horizontalplan mit ϑ', ϱ', γ', δ' bezeichnet sind). Schliesslich verbindet man die in einer Horizontalebene liegenden Punkte zu einem Vielecke und verwandelt dieses nach dem Augenmasse in eine dem Terrain sich möglichst gut anschmiegende Curve. Kommen viele Curven vor, so zeichnet man jede fünfte oder zehnte durch einen stärkeren Strich oder durch Farbe vor den übrigen aus, um die Gestalt des Terrains leichter zu übersehen.



§. 344.

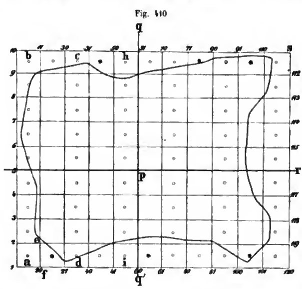
Aufgabe. Es sey eine nach der Länge und Breite ziemlich gleich ausgedehnte Fläche von nur geringen

und nicht rasch wechselnden Erhöhungen und Vertiefungen durch Horizontalcurven darzustellen.

Dieser Fall kommt bei jedem Moose vor, das zu nivelliren ist. Ist dessen Horizontalplan gegeben, so überziehe man dasselbe mit einem Quadratnetze, dessen Seiten nach Umständen 300 bis 500 Fuss lang und — der leichteren Zeichnung wegen — den von Süd nach Nord und von Ost nach West laufenden Randlinien des Plans parallel sind.

1. Die Aussteckung des Netzes kann keine Schwierigkeit machen, sobald man auf einem Fixpunkte (P), der auch im Plan gegeben ist (p, Fig. 410), die Mittagslinie (PQ, pq) nach §. 322 ausgemittelt und mit Signalen bezeichnet hat. Auf dieser Mittagslinie misst man zunächst die Quadratseiten genau ab, errichtet in dem

Fig. 410



Fixpunkte mit dem Theodolithen eine Senkrechte (PR, pr) zu ihr, misst auch auf dieser die Quadratseiten genau ein, und steckt dann in ziemlich weit entfernten Netzpunkten (z. B. Q, q und R, r) Parallelen zur Mittagslinie und ihrem Perpendikel ab. Misst man auf diesen Parallelen (QS, qs und RS, rs) die Quadratseiten ebenfalls genau ab und bezeichnet ihre Endpunkte wie vorhin mit Grund- und Beipfählen, so kann man durch Rückwärtsverlängern derselben das ganze Netz herstellen, ohne neue Längen messen zu müssen,

vorausgesetzt, dass das Terrain übersehbar ist. Kommen einzelne Hindernisse vor, welche das Visiren erschweren, so wird man dieselben leicht zu überwinden wissen.

2. Das Nivelliren der Netzpunkte geschieht mit der geringsten Anzahl von Aufstellungen, auf die in Figur 410 angedeutete Weise: indem man nämlich das Instrument stets nahezu in der Mitte eines Quadrates aufstellt, kann man von jedem in der Figur mit einem Punkt bezeichneten Standpunkte aus alle vier Ecken des Quadrats anvisiren und hierdurch, wie diese Punkte beweisen, die Anzahl der Stationen auf die Hälfte derjenigen reduciren, welche nöthig wären, wenn man jede einzelne Linie für sich nivelliren wollte. Die mit Sternchen (*) bezeichneten Stationspunkte sind nicht durchaus nothwendig, aber indem sie zwei Stationsreihen zu einer geschlossenen Abtheilung (z. B. abcd, ehid) machen, gewähren sie eine Controle des Nivellements, welche man nicht unbenützt lassen darf. Es müssen nämlich, da die letzten Punkte (e, f) einer Abtheilung (abcd), die zugleich Anfangspunkte derselben sind, die Abstände der zweimal nivellirten Anfangs- und Endpunkte einander gleich seyn, wenn richtig gearbeitet wurde. Da diese Controle jedoch keine Garantie dafür leistet, dass nicht zwei gleiche aber entgegengesetzte Fehler in einer Abtheilung gemacht wurden, so ist gleichwohl noch die Herstellung eines Gegennivellements anzurathen, bevor die definitive Berechnung der Abstände aller Netzpunkte vom allgemeinen Horizonte nach §. 335 vorgenommen wird.

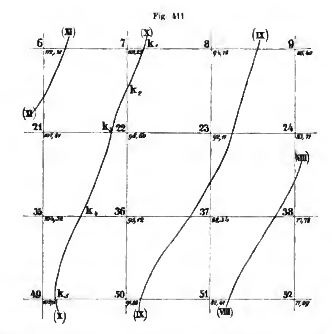
3. Die Bestimmung der Horizontalcurven geschieht auf Grund der bekannten Horizontal- und Vertikalabstände der Netzpunkte. Angenommen, die Abstände der Schnittebenen seyen Vielfache von 10′, also die der Ebenen 1, 2, 3, 4 .... 10 beziehungsweise 10, 20, 30, 40 .... 100′ und es stelle die Fig. 411 einen Theil des nivellirten Netzes mit 400′ langen Seiten vor: so findet man z. B. die Curve X in folgender Weise. Diese Curve schneidet offenbar die Linie von 7 auf 8 in einem Punkte k_1, dessen Abstand x_1 vom Punkte Nr. 7 sich aus der leicht zu bildenden Proportion ergibt:

$$(101{,}23 - 94{,}78) : (101{,}23 - 100) = 400 : x_1.$$

Die Curve X geht auch durch die Quadratseite von 7 auf 12, und zwar in einem Punkte k_2, dessen Abstand x_2 vom Punkte Nr. 7 aus der Proportion erhalten wird:

$$(101{,}23 - 98{,}60) : (101{,}23 - 100) = 400 : x_2.$$

Fig. 411



Ebenso schneidet die Curve X die Quadratseite von 21 auf 22 in einem Punkte k_3, dessen Abstand x_3 vom Punkte Nr. 21 aus der Proportion folgt:

$$(107{,}81 - 98{,}60) : (107{,}81 - 100) = 400 : x_3.$$

Sowie man durch Berechnen und Abtragen der Horizontalabstände x_1, x_2, x_3 die Punkte k_1, k_2, k_3 findet, so erhält man durch Fortsetzung dieser Arbeit auch die Punkte k_5, k_6, k_7, ... der Curve Nr. X und folglich diese selbst. In gleicher Weise wird jede andere Curve bestimmt; so in Fig. 411 die Curven Nr. VIII, IX und Nr. XI.

Aus diesem Verfahren entnimmt man leicht, auf welcher Voraussetzung die Anlage des Netzes beruht: nämlich darauf, dass man von einem Netzpunkte zum anderen eine gerade Linie legen kann, welche mit dem Terrain zusammenfällt. Wird diese Bedingung bei Quadratseiten von 400′ Fuss Länge sehr häufig nicht erfüllt, so müssen die Seiten kürzer genommen werden; ausserdem kann man sie auch auf 500′ ausdehnen. Darüber hinaus sollte man aber desswegen nicht gehen, weil grössere Stationen, als sie Quadrate von 500′ Seite nöthig machen, für die gewöhnlichen Nivellirinstrumente nicht geeignet sind.

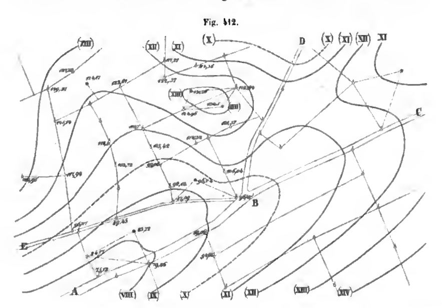
§. 345.

Aufgabe. Eine durchschnittene Terrainfläche, deren Situationsplan gegeben ist, in Horizontalcurven darzustellen.

Wenn die Fläche, wie hier angenommen, rasch wechselnde Erhöhungen und Vertiefungen hat und in viele Parzellen getheilt ist, welche alle auf dem Plane genau dargestellt sind: so macht man am zweckmässigsten die Grenzen der Grundstücke und der Wege zum Netz für das Nivellement dieser Fläche. Als Netzpunkte gelten zunächst die Marksteine und andere Fixpunkte, welche sich auf dem Terrain befinden und in dem Plan eingetragen sind; ausserdem aber schlägt man an den Stellen, wo es nöthig erscheint — und dieses ist überall der Fall, wo man von einem Punkte zum anderen keine Gerade legen kann, welche in das Terrain fällt — Grund- und Beipfähle in den Boden, und misst sie durch Dreiecke oder Coordinaten in Bezug auf die gegebenen Fixpunkte ein, um sie in dem Situationsplane verzeichnen zu können.

Ist das Netz in seiner Horizontalprojection festgestellt, so nivellirt man alle seine mit Pfählen bezeichneten Punkte zweimal ein, berechnet deren Abstände vom allgemeinen Horizonte und bestimmt

Fig. 412.



daraus nach §. 344 die Durchgänge der Horizontalcurven zwischen je zwei Punkten, indem man ihre horizontale Entfernung, welche dazu nöthig ist, dem Plane entnimmt. Hiernach werden folgende Bemerkungen genügen, die Fig. 412 näher zu erläutern.

Die mit Sternchen bezeichneten Punkte sind ihrer Horizontalprojection nach durch Dreiecke bestimmt, welche an die vorhandenen Marksteine angeschlossen wurden.

Um die Figur nicht mit Zahlen zu überladen, sind die Coten nur in der linken Hälfte derselben eingeschrieben. Die römischen Ziffern bezeichnen die horizontalen Schnittebenen und die Horizontalcurven; dabei ist angenommen, dass der allgemeine Horizont die nullte Ebene ist und dass die 10, 20, 30, 40 .... Fuss tiefer liegenden Ebenen die Schnittebenen I, II, III, IV ... sind. Die vertikalen Abstände der Curven vom allgemeinen Horizonte stellen somit Vielfache von 10 Fuss dar. Der leichteren Uebersicht des Terrains wegen hebt man in der Zeichnung jede fünfte oder zehnte Curve durch eine besondere Linie oder Farbe hervor, wie dieses hier bei der Curve X der Fall ist.

4) Bemerkungen und Aufgaben über das Nivelliren.

§. 346.

Die wichtigsten Anwendungen des Nivellirens bestehen in der Aufnahme von Terrainprofilen und Horizontalcurven; es gibt aber noch viele andere Anwendungen dieses Zweiges der Messkunst, welche ebenfalls wichtig sind. Einige derselben sind in den nachfolgenden Aufgaben und in den Abschnitten C und D enthalten, während die übrigen so einfach gelöst werden können, dass wir es nicht für nöthig halten, sie hier besonders aufzuführen. Dagegen mögen für manche Anfänger im Nivelliren die nachstehenden Winke zur Ueberwindung von Hindernissen oder zur Vermeidung von Messungsfehlern nicht überflüssig seyn.

1. Wenn man genau nivelliren will, so ist es vor allen Dingen nöthig, einen in allen Theilen geregelten Gang der Arbeit festzusetzen, einzuüben und unabänderlich festzuhalten. Dieser Gang hängt von der Beschaffenheit des Intruments und von der Methode des Nivellirens, die zur Anwendung kommen soll, ab, und wird nach Anleitung der §§. 331 bis 333 bestimmt.

2. Wesentliche Sorgfalt ist auf das richtige Einstellen entweder

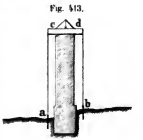
des Fadenkreuzes oder der Zieltafeln und auf das deutliche und richtige Aufschreiben der abgelesenen Visirhöhen zu verwenden, mag das letztere nun vom Geometer selbst oder von dessen Gehilfen geschehen. Die Aufzeichnungen im Notizbuche müssen so vollständig und leserlich seyn, dass jeder andere Sachverständige das Nivellement darnach berechnen und auftragen kann.

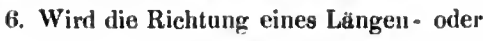
3. Man darf die Mühe nicht scheuen, vor jedem Nivellement das Instrument zu untersuchen und es nöthigenfalls zu berichtigen. Bei grösseren Arbeiten macht man dergleichen Untersuchungen jeden Morgen. Dabei hat man sich auch zu überzeugen, ob alle Theile des Instruments ihre Schuldigkeit thun, z. B. die Schrauben und Federn. Gehen die Schraubenspindeln zu leicht, so ziehe man entweder ihre geschlitzten Muttern an, oder tauche die Spindeln in zerlassenes Wachs, dem ein wenig Talg zugesetzt ist. Grosse Reibung zwischen Stahl und Kupfertheilen wird durch Olivenöl oder Klauenfett gemindert.

4. Nach beendigter Arbeit wird das Instrument, wenn es nass geworden seyn sollte, getrocknet und hierauf vorsichtig eingepackt. Während der Ruhestunden und zur Nachtzeit nimmt dasselbe der Geometer zu sich, um es der Neugierde Unberufener zu entziehen. Auf Reisen soll es vor Erschütterungen so viel als möglich bewahrt werden.

5. Hat man in bedecktem Terrain zu nivelliren und bietet Gebüsche oder Gestrüppe ein Hinderniss dar, so wird dasselbe in der Richtung der Visirlinien abgehackt; führt das Nivellement durch einen Wald, so kann man sich in der Regel einen Standpunkt suchen, der zwei Punkte einzunivelliren gestattet, ohne dass man Bäume fällen lässt; wird die Linie von Hecken, Planken oder anderen Zäunen durchschnitten und kann man sich nicht hoch genug aufstellen, um über sie wegzusehen, so bringt man in denselben Lücken an, durch welche visirt werden kann; hohe Mauern werden in diesem Falle dadurch überschritten, dass man vor und hinter denselben Grundpfähle (a, b Fig. 413) schlägt und deren Höhenunterschied mit Hilfe einer horizontal gestellten Latte (cd) durch Nivellirlatten oder Senkel (ac, bd) abmisst.

Fig. 413.

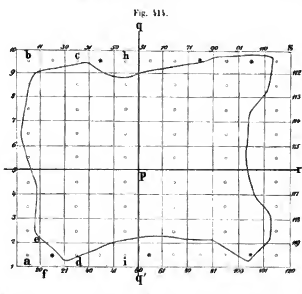



6. Wird die Richtung eines Längen- oder

Querprofils von einem Bache oder kleineren Flusse geschnitten, so verfährt man mit der Aufnahme gerade so, als ob kein Wasser vorhanden wäre, da im Sommer die Arbeiter die Nivellirlatte im Wasser gerade so halten können, als im Trockenen. An grossen Flüssen und Strömen hat man indessen nach der im Abschnitte D gegebenen Anleitung zu verfahren.

7. Wenn eine Moor- oder Sumpffläche zu nivelliren ist, so muss dieselbe vor allen Dingen mit einer Reihe von Punkten umgeben werden, welche noch (wie in Fig. 414 die Pfähle Nr. 1, 2, 3 .. 20, 21, 40, 41 ...

Fig. 414.



30, 31, 50, 51 ... 112, 113, 114 ...) auf festem Boden stehen. Von dieser Umfangslinie aus nivellirt man nach Innen so viele Punkte an, als nur immer angeht; die übrigen sind entweder im Winter wenn der Boden gefroren ist, einzunivelliren, oder es ist für geeignete Standpunkte des Instruments durch Einschlagen von je drei Pfählen zu sorgen.

8. Den schädlichen Einflüssen der Witterung lässt sich nur zum Theil begegnen: sind die daraus zu befürchtenden Störungen zu gross, so muss die Arbeit eingestellt werden. Den nachtheiligen Einwirkungen der direkten Sonnenstrahlen auf die Libelle, das Objectiv des Fernrohrs und die Gläser der Canalwage, [1] werden durch Schirme

[1] An diesen Gläsern entstehen Glanzlinien, welche die Ränder der Wasseroberflächen nicht gut erkennen lassen.

beseitigt; dagegen können die daraus hervorgehenden Luftzitterungen und scheinbaren Bewegungen der Nivellirlatte eben so wenig weggeschafft werden, als die Störungen, welche dadurch entstehen, dass helle Wände das Sonnenlicht gegen das Fernrohr oder die Canalwage reflectiren.

9. Jedes Längenprofil, welches als Grundlage des Entwurfs eines Erd- oder Wasserbauwerkes dienen soll, muss auf feste Punkte (Fixpunkte) bezogen werden, welche nicht wie Grund- und Beipfähle der Zerstörung aus Unvorsichtigkeit oder Muthwillen unterliegen. Dergleichen Fixpunkte, welche nicht über 3000 Fuss von einander entfernt seyn sollten, sind: Felsvorsprünge, Sockel von Gebäuden, massive Treppenstufen, Trottoirplatten, Fachbäume etc. und in Ermangelung solcher natürlicher Gegenstände 4 Zoll starke eichene Pfähle, welche ungefähr 4 Fuss tief in den Boden gerammt, oben mit einem Nagel versehen und wohlverwahrt werden. Bei der Ausführung des Bauentwurfes gehen alle Nivellemente von den Fixpunkten aus, wenn die Grundpfähle des Längenprofils nicht mehr vorhanden sind oder über ihre Höhenlage Zweifel bestehen.

10. Kein Längennivellement darf als richtig angesehen werden, welches nicht durch ein zweites Nivellement oder durch sich selbst controlirt ist. Eine Controle der letzten Art bietet jede in sich selbst zurückkehrende Linie, wenn der berechnete Abstand des Endpunktes derselben mit dem des Anfangspunktes, welcher angenommen wird oder gegeben ist, genau oder doch sehr nahe übereinstimmt; denn da der End- und Anfangspunkt hier dieselben sind, so kann man gewissermassen das Nivellement der halben Linie als das Gegennivellement ihrer anderen Hälfte betrachten. Möglich bleibt es aber bei dieser Controle immer noch, dass in dem Nivellement zwei gleiche und entgegengesetzte Fehler stecken, welche sich aufheben. Diese Fehler müssten jedoch entdeckt werden, wenn man die Linie zurück nivelliren würde. Darum ist ein zweites Nivellement stets die besste Prüfung des ersten.

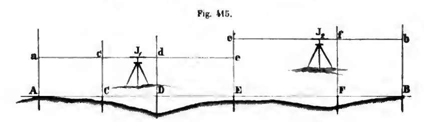
§. 347.

Aufgabe. Eine horizontale gerade Linie von bestimmter Höhenlage abzustecken.

Ist die Richtung der Geraden durch zwei Punkte (A, B Fig. 415) und ihre Höhe durch einen Fixpunkt (C) gegeben, so schaltet man

vor allem zwischen den beiden Endpunkten (A, B) so viele Punkte (D, E, F...) ein, als nöthig erachtet werden, um die gesuchte Horizontallinie gehörig festzulegen. In allen Punkten der Linie werden Pfähle eingeschlagen, welche so lang sind, dass sie sicher über die

Fig. 415.



abzusteckende Horizontale reichen. Hierauf nivellirt man den Fixpunkt (C) an und lässt die nächst gelegenen Pfähle der Linie (z. B. A, D, E) so tief in den Boden schlagen oder oben absägen, dass sie bei horizontaler Abschlinie dieselbe Ablesung auf der Latte geben wie der Punkt C.

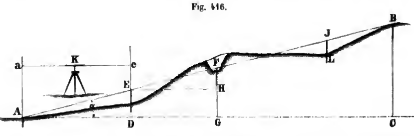
Sind alle von der ersten Station aus sichtbaren Pfähle in dieser Weise geordnet, so betrachtet man einen derselben als Fixpunkt der zweiten Station und verfährt wie vorhin. Eben so kann man in einer dritten oder vierten Station zu Werke gehen.

§. 348.

Aufgabe. Auf dem Felde eine gerade Linie von bestimmter Neigung abzustecken.

Die abzusteckende Gerade sey in ihrer horizontalen und vertikalen Projection durch die Punkte A und B (Fig. 416) bestimmt;

Fig. 416.



der Höhenunterschied zwischen A und B sey = h und die horizontale Entfernung von A bis B = AC = l. Es ist somit die relative Steigung von A bis B oder das relative Gefälle von B bis A gleich

$$p = \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (407)$$

Steht der erste in die Linie AB einzurichtende Pfahl ED horizontal um die Länge $AD = \lambda$ von A ab, so ist die absolute Steigung von A bis E oder

$$DE = \eta = \lambda \operatorname{tg} \alpha.$$

Um nun den Pfahlkopf E in die richtige Höhe zu bringen, stelle man das zwischen A und D befindliche Nivellirinstrument auf die über A stehende Latte ein, lese die Höhe $Aa = z$ ab und lasse nun den Pfahl DE so lange tiefer schlagen, oder oben absägen, bis die Visirhöhe $Ee = z - \eta$ wird. Ebenso verfährt man bei der Bestimmung des Punktes F, wobei entweder die aus der Gleichung

$$FG = \eta' = \lambda' \operatorname{tg} \alpha$$

folgende Höhe η' von A aus, oder die Höhe

$$FH = \eta' - \eta$$

von E aus aufgetragen wird. Liegt der Punkt F, wie in Fig. 416, unter der Terrainfläche, so versteht sich von selbst, dass man diese bis auf eine entsprechende Tiefe ausgraben lassen muss, um den Pfahl in der richtigen Höhe einsetzen zu können.

Lägen einzelne Punkte der abzusteckenden Geraden, wie E und J, sehr hoch über dem Terrain, so dass sich die Latte nicht gut auf die Pfahlköpfe stellen liesse, so würde man neben die Höhenpfähle ED, JL Grundpfähle schlagen und diese in Bezug auf A oder B einnivelliren, um darnach die Abstände der Punkte E und J vom Terrain zu berechnen und von den Grundpfählen aus abzumessen.

§. 349.

Aufgabe. An einem Bergabhange eine Linie von bestimmter Neigung abzustecken.

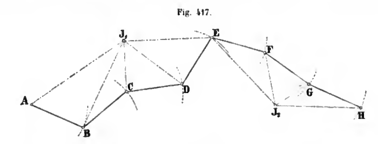
1. **Wenn nur ein Endpunkt der geneigten Linie gegeben ist.**

Wir wollen den unteren Endpunkt und die relative Neigung der Linie p als gegeben ansehen und annehmen, dass die horizontale Entfernung von einem Punkte zum anderen eine Kettenlänge l betrage. Demnach ist die absolute Steigung von einem Punkte zum nächst höheren

$$n = l p.$$

Ist A (Fig. 417) der gegebene unterste Punkt, so stelle man das Nivellirinstrument (J) etwa 150 bis 200 Fuss von A entfernt so auf, dass man einige der abzusteckenden Punkte (A, B, C, D, E) gut übersehen kann. Stellt man die Absehlinie auf die Latte in A ein und liest die Höhe N ab, so muss die Ablesung auf dem um l entfernten Punkte B offenbar N — lp werden. Um diesen Punkt zu finden, lasse man den einen Kettenstab in A festhalten und mit dem anderen bei angespannter Kette einen Kreisbogen bb′ beschreiben.

Fig. 417.



Auf diesem Bogen wird die Nivellirlatte einigemale versuchsweise aufgestellt, bis man einen Punkt gefunden hat, auf dem bei horizontaler Absehlinie die Ablesung = N — lp ist. Nun setze man den einen Kettenstab in den mit einem Pfahle bezeichneten Punkte B ein und führe den anderen Stab bei angespannter Kette in dem von B aus beschriebenen Kreisbogen cc′ so lange herum, bis die Latte auf einen Terrainpunkt C kommt, der die Ablesung N — 2lp liefert. In gleicher Weise findet man D und E. Muss hierauf die Station gewechselt werden, so betrachtet man den letzten Punkt E als Anfangspunkt der Operation und wiederholt dieselbe ein oder mehrere Male in der eben beschriebenen Weise, bis man die Höhe erreicht hat, auf welche die geneigte Linie abgesteckt werden soll.

Zur Aufnahme ihrer horizontalen Projection dient eine der im Abschnitte A beschriebenen Methoden.

2. Wenn die beiden Endpunkte der geneigten Linie gegeben sind.

Heisst der untere Endpunkt A und der obere Z, so stecke man von A aus eine Linie mit der Steigung p und von Z aus eine Linie mit dem Gefälle p nach Anleitung der vorigen Nummer ab. Beide Linien werden sich in einem Punkte M schneiden, und es besteht nun die gesuchte Linie aus den Zweigen AM und MZ.

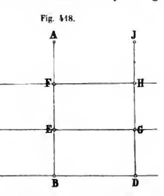
Wäre der Bergabhang durch Horizontalcurven dargestellt, deren Ebenen um gleiche Höhen von einander abstehen, so könnte man die zwischen A und Z gelegene geneigte Linie auf dem Plane nach ihrer Horizontalprojection bestimmen und diese Projection auf das Terrain übertragen; diese Bestimmung würde aber offenbar mehr Mühe verursachen als das unmittelbare Abstecken der geneigten Linie, wesshalb letzteres vorzuziehen ist, so lange es sich bloss um eine einzige geneigte Linie von mässiger Ausdehnung handelt. Anders gestaltet sich jedoch die Sache, wenn die Linie bestimmt werden soll, nach welcher eine Strasse oder Eisenbahn am vortheilhaftesten zu führen ist; in diesem Falle leisten die Horizontalcurven wesentliche Dienste; es ist jedoch hier nicht der Ort, diese Anwendung derselben näher zu besprechen.

§. 350.

Aufgabe. Eine Ebene abzustecken, welche nach einer bestimmten Richtung mit dem Horizonte einen gegebenen Winkel bildet.

Stellt in Fig. 418 die Linie AB die Richtung vor, nach welcher die abzusteckende Ebene mit dem Horizonte einen Winkel α bilden soll, so errichte man zunächst auf AB die Senkrechte CD und stecke in dieser Richtung nach §. 347 eine horizontale Gerade ab, deren Höhenlage durch den Grundpfahl des Punktes B bestimmt seyn mag. Hierauf messe man auf AB eine hinreichende Anzahl gleicher Theile BE, EF .... ab und stecke auf bekannte Weise durch diese Punkte die Linien EG, FH . . . parallel zu CD ab. Weiter errichte man in E, F . . . Höhenpfähle und bringe deren Köpfe nach §. 348 in eine Gerade, welche die Neigung α gegen den Horizont hat. Eben so verfahre man mit den Punkten G, H . . . in der Geraden DJ, welche mit AB parallel läuft und folglich auf CD senkrecht steht. Durch Erweiterung der Horizontallinien EG, FH .... oder durch Verlängerung der geneigten Geraden BA, DJ . . . kann man die abzusteckende Ebene so

Fig. 418.



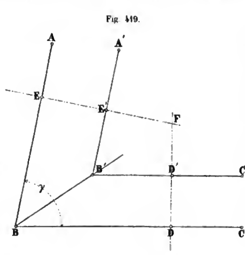
weit als man will ausdehnen. Die Richtigkeit des Verfahrens wird sich der Leser sofort selbst klar machen, wenn er mit den einfachsten Sätzen der Stereometrie vertraut ist.

§. 351.

Aufgabe. Zwei gegen den Horizont geneigte Ebenen sind ihrer Lage nach gegeben: man soll ihre Durchschnittslinie abstecken.

Die Winkel, welche die beiden gegebenen Ebenen mit dem Horizonte bilden seyen α und β; der Winkel, den die Schnitte dieser Ebenen mit irgend einer Horizontalebene bilden, heisse γ; und es sey die Lage dieses Winkels für eine bestimmte Horizontalebene durch die Schenkel AB, BC (Fig. 419) gegeben.

Fig. 419.



Vor allem wird man auf die gegebenen Geraden AB, BC die Senkrechten DF, EF abstecken und aus den Neigungswinkeln α und β berechnen, wie weit die Schnitte A′B′, B′C′ einer zweiten Horizontalebene A′B′C′, die eine beliebige Grösse h über der ersten ABC liegt, von AB, BC nach den Richtungen EE′, DD′ abstehen. Es ist aber, wenn die Ebene ABB′A′ die Neigung α und CBB′C′ die Neigung β hat:

$$EE' = h \operatorname{tg} \alpha \text{ und } DD' = h \operatorname{tg} \beta,$$

und es lassen sich folglich die Punkte E′, D′ leicht abstecken. Zieht man durch E′, D′ zu AB, BC die Parallelen A′E′, C′D′ und bestimmt ihren Schnittpunkt B′, so stellt BB′ die Horizontalprojection der gesuchten Kante vor. Die Höhe des Punktes B′ über B ist selbstverständlich = h, und man braucht desshalb nur in B′ einen Pfahl einzusetzen, dessen Kopf um die Grösse h über B liegt, um die Durchschnittslinie selbst zu erhalten. Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass man die Grösse h ziemlich gross zu nehmen hat, um die Durchschnittslinie möglichst genau zu finden.

C. Höhenmessen mit dem Barometer.

§. 352.

Nachdem im ersten Bande (§. 212 bis 216) die zum Höhenmessen dienenden Barometer beschrieben und die bei den Beobachtungen zu befolgenden Regeln erörtert worden sind, kommt es nunmehr darauf an, die Beziehungen zwischen dem Höhenunterschiede zweier Orte und den an ihnen beobachteten Barometerständen durch eine Formel auszudrücken, in welcher alle auf das Endresultat einwirkenden Umstände berücksichtigt sind.

Diese Beziehungen wurden am ausführlichsten zuerst von Laplace und später von Poisson, Gauss und Bessel entwickelt. In den Arbeiten aller dieser ausgezeichneten Männer hat sich aber ein Versehen eingeschlichen, auf das erst im Jahre 1854 G. S. Ohm in seinen „Grundzügen der Physik" aufmerksam machte und welches in der Voraussetzung besteht, dass die auf das Barometer drückende Luftsäule cylindrisch sey. Indem Ohm, wie es die Erdkrümmung fordert, der drückenden Luftsäule die Gestalt eines Kegels gibt, dessen Seiten die Richtung der Schwere haben und dessen Spitze somit im Erdmittelpunkte liegt, gelangt er zu einer Formel, welche richtiger und einfacher ist als die der vorhin genannten Mathematiker und Physiker. Die nach beiden Formeln berechneten Höhenunterschiede weichen zwar nur wenig, aber immerhin so viel von einander ab, dass die Abweichung zu bemerken ist.

In Nr. 963 der astronomischen Nachrichten von Schumacher hat Professor Zech, unter Hinweisung auf Ohm's „umständliche Art"[1] seine Formel abzuleiten, eine hier theilweise benützte kürzere Darstellung derselben gegeben, und der Herausgeber der astronomischen Nachrichten fügte dieser Entwickelung noch eine Vergleichung der Formeln von Ohm und Laplace bei, welche mit der unsrigen bis auf einen Factor übereinstimmt, den wir weiter unten anführen.

§. 353.

Aufgabe. Die Barometerformel abzuleiten und für die Berechnung bequem einzurichten.

[1] Wir bemerken hier, dass Ohm sein Compendium zunächst für seine Zuhörer an der Universität schrieb, bei denen er der Mehrzahl nach nur geringe mathematische Vorkenntnisse voraussetzen durfte; für die Leser der astronomischen Nachrichten hätte er ohne Zweifel eine andere Form der Darstellung gewählt.

Nach den vorausgegangenen Erläuterungen besteht die Ableitung der Barometerformel darin: den Luftdruck in der kegelförmigen Luftsäule, welche im Mittelpunkte der Erde ihre Spitze und an der Grenze der Atmosphäre ihre Basis hat, als Function der Höhe dieser Säule darzustellen, für jenen Druck sein durch Barometer und Thermometer bestimmtes Mass einzusetzen, und aus der so gebildeten Gleichung die Höhe des Beobachtungsortes zu suchen. Zu dem Ende sey zunächst

- f der Querschnitt der konischen Luftsäule in der Höhe z über der kugelförmigen Erdoberfläche mit dem Halbmesser r,
- g die Intensität der Schwere in derselben Höhe oder in der Entfernung $r + z$ vom Erdmittelpunkte,
- p der Druck der mit dem Gewichte P auf der Fläche f lastenden konischen Luftsäule auf die Flächeneinheit,
- s die Dichtigkeit oder das spezifische Gewicht der Luft an dem Querschnitte f der Luftsäule.

Wenn in der Höhe z über der Erdoberfläche auf dem Querschnitte f der Luftsäule der Druck P lastet, so ist derselbe in der Höhe $z \pm dz$ gleich $P \mp dP$, und es bringt demnach die Aenderung der Höhe um $\pm dz$ eine Aenderung des Drucks $\mp dP$ hervor. Da nun das Gewicht eines Elementes der Luftsäule von der Grundfläche f und der Höhe dz nach den Lehren der Geometrie und Physik $= gsfdz$ ist, so muss (mit Rücksicht auf den Ausdruck $P = pf$) die Gleichung stattfinden:

$$gsfdz = -dP = -d(pf),$$

woraus nach vollzogener Differentiation des Products pf, dessen beide Factoren mit z veränderlich sind, folgt:

$$dp = -gsdz - p\frac{df}{f} \quad \ldots\ldots \quad (408)$$

Nach dem Mariotte'schen Gesetze ist bei gleicher Temperatur die Dichtigkeit s der Luft dem auf sie ausgeübten Drucke proportional: man kann daher zunächst

$$s = cp$$

setzen, wobei c einen von der Temperatur der Luft abhängigen Coeffizienten bezeichnet. Mit diesem Werthe von s geht die Gleichung (408) über in

$$\frac{dp}{p} = -cgdz - \frac{df}{f},$$

und wenn man berücksichtigt, dass die Intensität g der Schwere in der Höhe z durch die Intensität g_0 an der Erdoberfläche durch die Gleichung

$$g = \frac{r^2 g_0}{(r + z)^2}$$

ausgedrückt werden kann, so erhält man weiter

$$\frac{dp}{p} = -c g_0 r^2 \frac{dz}{(r + z)^2} - \frac{df}{f} \quad . \quad . \quad . \quad (409)$$

Der Coefficient c müsste als eine Function von z dargestellt werden, wenn das Gesetz bekannt wäre, nach welchem sich die Temperatur der Atmosphäre mit der Höhe ändert. Da dieses Gesetz aber unbekannt ist, so nimmt man mit Poisson die Temperatur der Atmosphäre zwischen den beiden Stationen constant und zwar gleich dem arithmetischen Mittel aus den daselbst beobachteten Temperaturen an. Bezeichnet τ dieses Mittel aus t_1 der Temperatur in Centesimalgraden an der unteren und t_2 der Temperatur an der oberen Station; ist ferner α der Ausdehnungscoefficient der Luft für 1^0C und k ein später zu bestimmender constanter Coefficient; und behalten endlich s und p ihre bisherige Bedeutung, so ist aus physikalischen Gründen

$$\frac{1}{c} = \frac{p}{s} = k\,(1 + \alpha\,\tau) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (410)$$

und somit c in Bezug auf die Höhe z eine unveränderliche Grösse.

Integrirt man nun die Gleichung (409), so wird

$$\text{Log}\, p = \frac{c\, g_0 r_2}{r + z} - \text{Log}\, f + C$$

und hieraus erhält man für die Höhen z′ und z″, in welchen der Luftkegel die Querschnitte f′ und f″ hat, durch entsprechende Substitution und Subtraction:

$$\text{Log}\, p'' - \text{Log}\, p' = c\, g_0\, r^2 \frac{z' - z''}{(r + z')\,(r + z'')} - \text{Log}\, f'' + \text{Log}\, f'.$$

Sucht man aus dieser Gleichung den Höhenunterschied der beiden Stationen $z'' - z' = h$, indem man gleichzeitig für das Product $(r + z')\,(r + z'')$ den Näherungswerth $r_2 + r\,(z' + z'')$ setzt, so findet man

$$h = \frac{1}{c\, g_0}\left(1 + \frac{z' + z''}{r}\right) \text{Log}\, \frac{p'\, f'}{p''\, f''} \quad . \quad . \quad . \quad (411)$$

Da zwischen den Querschnitten f′, f″ und ihren Abständen $r + z'$, $r + z''$ von der Kegelspitze die Gleichung stattfindet:

$$\frac{f'}{f''} = \frac{(r + z')^1}{(r + z'')^2} \; ;$$

da ferner, wenn $\varDelta$ die Dichtigkeit des Quecksilbers bei derjenigen Temperatur τ ist, für welche in der Höhe z der Barometerstand b und die Schwere-Intensität g gilt, der Luftdruck

$$p = \varDelta g b$$

und demnach auch, wenn g', g'' die Intensitäten der Schwere und b', b'' die Barometerstände bei der Temperatur τ in den Höhen z', z'' vorstellen:

$$\frac{p'}{p''} = \frac{g' b'}{g'' b''}$$

ist; und da endlich die Intensitäten g', g'' sich umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen $r + z'$, $r + z''$ verhalten, so wird, wenn man substituirt, der Ausdruck

$$\frac{p' f'}{p'' f''} = \frac{b'}{b''} .$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung (411) und führt statt der natürlichen Logarithmen, die bis jetzt angewendet sind, die gemeinen dadurch ein, dass man jene mit dem Modul $m = 0{,}4342945$ theilt, so wird schliesslich der gesuchte Höhenunterschied

$$h = \frac{1}{m c g_0} \left(1 + \frac{2 z' + h}{r}\right) \log \frac{b'}{b''} \quad . \; . \; . \quad (412)$$

Würde man, wie es vor Ohm geschah, statt der konischen Luftsäule die cylindrische von dem Querschnitte f benützt haben, so wäre, da hier $f' = f'' = f$ ist, der in Gleichung (411) vorkommende Quotient

$$\frac{p' f'}{p'' f''} = \frac{p'}{p''} = \frac{g'}{g''} \frac{b'}{b''}$$

und folglich nach der letzten Gleichung der aus den Barometerständen b', b'' berechnete Höhenunterschied

$$h' = \frac{1}{m c g_0} \left(1 + \frac{2 z' + h'}{r}\right) \left(\log \frac{b'}{b''} + \log \frac{g'}{g''}\right) \quad (413)$$

geworden. Vergleicht man die beiden Ausdrücke für h und übersieht dabei die verschwindend kleine Differenz, welche in den zweiten Factoren liegt, so findet man den Unterschied derselben

$$n = h' - h = \frac{1}{m c g_0} \left(1 + \frac{2 z' + h}{r}\right) \log \frac{g'}{g''} \quad . \quad (414)$$

Um diese Grösse liefert die Ohm'sche Formel die Höhenunterschiede zweier Orte kleiner als die Formeln von Laplace, Poisson, Gauss

u. A.; diese gehen also auch in jene über, sobald man es nur unterlässt, die beobachteten Barometerstände (b', b'') mit den ihnen entsprechenden Intensitäten der Schwere (g', g'') zu multiplicieren.

Es kommt nunmehr darauf an, in der Formel (412) das Product der constanten Grössen m, c, g_0 auszudrücken und statt der auf gleiche Temperatur reducirten Barometerstände b', b'' die wirklich beobachteten einzuführen.

Der Werth von m ist bekannt und seine Reciproke

$$\frac{1}{m} = 2,3025851;$$

ferner liefert die Gleichung (410) den Factor

$$\frac{1}{c} = k\,(1 + \alpha\,\tau),$$

wobei $\tau = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ und $\alpha = 0,003665$ ist, so lange die Luft keine Feuchtigkeit enthält. Da aber stets etwas Wasserdunst in ihr vorkommt und dessen Menge mit der Zunahme der Temperatur wächst; da ferner die Dichtigkeit des Wasserdunstes bei gleichem Drucke etwas geringer ist als die der atmosphärischen Luft und folglich auch die Dichtigkeit der letzteren bei steigender Temperatur durch die Feuchtigkeit vermindert wird; und da es endlich wiederum nicht möglich ist, aus den an beiden Stationen vorgenommenen Hygrometerbeobachtungen den wahren Feuchtigkeitszustand der Atmosphäre anzugeben: so bringt man die Einwirkung des in der Luft enthaltenen Wasserdunstes dadurch in Rechnung, dass man zunächst den Werth des Coefficienten α von 0,003665 auf 0,004 erhöht, und ausserdem noch den Ausdruck $1 + \alpha\,\tau$ mit der Zahl 1,0011 [1] multiplicirt. Demnach wird jetzt

$$\frac{1}{c} = 1,0011\,(1 + 0,004\,\tau)\,k \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (415)$$

Der Coefficient k stellt das Verhältniss des auf die Flächeneinheit bezogenen und durch das Gewicht der Barometersäule (b_0) gemessenen Drucks der Luft (p_0) zu deren Dichtigkeit (s_0) bei 0° Temperatur und einem Barometerstande b_0 vor, d. h. es ist

$$k = \frac{p_0}{s_0} = \frac{b_0\,g_1\,s_t}{s_0},$$

[1] Diese Zahl ist theilweise aus Beobachtungen über die mittlere Feuchtigkeit der Atmosphäre, theilweise aber auch aus dem Bestreben hervorgegangen, die Uebereinstimmung der barometrischen und trigonometrischen Höhenmessungen grösser zu machen.

wenn g_1 die Intensität der Schwere an dem Orte, wo s_0 und b_0 gemessen wurden, und s_1 das specifische Gewicht des reinen Quecksilbers bei 0^0 C bezeichnet.

Nach den Versuchen von Biot und Arago ist für Paris und den Barometerstand $b_0 = 0,^m76$ das Verhältniss von $s_1 : s_0 = 10463$ und folglich

$$k = 7951,88\, g_1.$$

Da Paris die geographische Breite $\psi' = 48^0\ 50'\ 14''$ hat und die Intensität der Schwere sich mit der Breite des Orts ändert, so erhält man, wenn g_0 die Intensität unter der Breite ψ ist, das Verhältniss

$$\frac{g_1}{g_0} = \frac{1 - 0,002588 \cos 2\,\psi'}{1 - 0,002588 \cos 2\,\psi} = \frac{1,0003457}{1 - \beta \cos 2\,\psi},$$

wobei $\beta = 0,002588$ gesetzt ist.

Nunmehr kann man das Product $m\,c\,g_0$ und auch dessen reciproken Werth ausdrücken; es ist nämlich

$$\frac{1}{m\,c\,g_0} = 2.302585 \cdot 1,0011 \cdot 7951,^m88 \cdot 1,0003457 \cdot \frac{1 + \alpha\,\tau}{1 - \beta \cos 2\,\psi},$$

$$\frac{1}{m\,c\,g_0} = 18336^m \frac{1 + \alpha\,\tau}{1 - \beta \cos 2\,\psi}.$$

Setzt man diesen Werth in Gleichung (412) ein, schreibt daselbst h_1 für $2z' + h$, und berücksichtigt, dass, da $\beta \cos 2\,\psi$ sehr klein ist, der umgekehrte Werth von $1 - \beta \cos 2\,\psi$ gleich $1 + \beta \cos 2\,\psi$ gesetzt werden kann: so folgt

$$h = 18336^m\,(1 + \beta \cos 2\,\psi)\;(1 + \alpha\,\tau)\left(1 + \frac{h_1}{r}\right) \log \frac{b'}{b''}.$$

Will man statt der auf gleiche Temperatur reducirten Barometerstände b' und b'' die bei den Temperaturen t' und t'' beobachteten Barometerstände B' und B'' in die Formel einführen, so kann dieses in folgender Weise geschehen. Da es für das Verhältniss von b' zu b'' ganz gleichgültig ist, ob die Reduction auf τ^0 oder auf 0^0 C geschah, so nehmen wir an, b' und b'' seyen auf 0^0 reducirte Barometerstände. Nennt man γ den Ausdehnungscoefficienten des Quecksilbers für 1^0 C, so gelten bekanntlich die zwei Gleichungen:

$$B' = b'\,(1 + \gamma\,t') \text{ und } B'' = b''\,(1 + \gamma\,t''),$$

aus denen mit Rücksicht auf die Kleinheit des Werthes von γ, welcher nur $\frac{1}{5550}$ beträgt, folgt:

$$\log \frac{b'}{b''} = \log \frac{B'}{B''} + \log \left(1 - \frac{t' - t''}{5550}\right).$$

Somit gestaltet sich mit Anwendung der bisherigen Coefficienten die Ohm'sche Barometerformel wie folgt:

$$h = 18336^m \,(1 + 0{,}002588 \cos \psi) \left(1 + \frac{t_1 + t_2}{500}\right) \left(1 + 2\,\frac{h_1}{r}\right)$$
$$\left[\log \frac{B'}{B''} + \log \left(1 - \frac{t' - t''}{5550}\right)\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (416)$$

Da in der Regel die Höhe der unteren Station über dem Meere bekannt ist, so kann man vorläufig $2z'$ für h_1 und erst später, wenn h annähernd bestimmt ist, $h_1 = 2z' + h$ nehmen. In vielen Fällen darf $2z'$ und auch h_1 gegen r vernachlässigt werden.

Fasst man jetzt wieder den bereits in Gleichung (414) ausgedrückten Grössenunterschied der Formeln von Laplace und Ohm in's Auge und bemerkt, dass

$$\frac{g'}{g''} = \left(\frac{r + z''}{r + z'}\right)^2 = \left(1 + \frac{h}{r}\right)^2$$

und folglich, mit Rücksicht auf die für einen sehr kleinen Werth von x geltende Gleichung:

$$\log (1 + x) = m x = 0{,}4342945\, x,$$
$$\log \frac{g'}{g''} = 2 \log \left(1 + \frac{h}{r}\right) = 0{,}868589\, \frac{h}{r}$$

ist: so geht der erwähnte Unterschied über in

$$u = 0{,}868589 \cdot 18336^m \,(1 + 0{,}002588 \cos 2\,\psi) \left(1 + \frac{t_1 + t_2}{500}\right) \cdot \frac{h}{r} \quad (417)$$

Dieser Ausdruck stimmt mit dem von Peters in Nr. 963 der astronomischen Nachrichten angegebenen bis auf den Factor $1 + 0{,}002588 . \cos 2\,\psi$, der dort nicht aufgeführt ist, überein. Nimmt man $\log r = 6{,}8048452$ und bestimmt hiernach den Zahlencoefficienten des Ausdruckes für u, so erhält man sehr nahe

$$u = \frac{1}{400}\,(1 + 0{,}002588 \cos 2\,\psi)\,(1 + 0{,}004\,\tau)\,h, \quad (418)$$

woraus folgt, dass fast in allen Fällen die nach den Formeln von Laplace und Ohm berechneten Höhenunterschiede um mehr als $\frac{1}{400}\,h$ differiren, da nur selten die in Klammern eingeschlossenen Factoren kleiner als 1 werden.

Diese Differenz von $\frac{1}{400}\,h$ ist keineswegs unbedeutend und um

so mehr zu beachten, als die aus Barometerbeobachtungen berechneten Höhenunterschiede zweier Punkte nach der Ohm'schen Formel um den Betrag von $\frac{1}{400}$ h kleiner werden als nach der Formel von Laplace, während letztere ohnehin schon etwas geringere Höhen gibt als die trigonometrischen Messungen. Es ist daher zu wünschen, dass der Zahlencoefficient der Höhenformel bald einer Revision unterworfen und beziehungsweise entsprechend vergrössert werde, was — wie auch schon Ohm bemerkt — am einfachsten dadurch geschehen könnte, dass man bei verschiedenen Lufttemperaturen viele auf trigonometrischem Wege oder — wie wir für besser halten — durch Nivelliren möglichst genau bestimmte Höhen mit dem Barometer sorgfältig nachmisst und aus der Vergleichung der Messungsresultate den genauen Coefficienten sucht.

Um die Anwendung der Formel (416) zu zeigen, mag hier eine wirklich ausgeführte Höhenmessung als Beispiel folgen. Ramond fand bei der Messung des unter dem 43° nördlicher Breite gelegenen Pic de Bigore in den Pyrenäen:

$$B' = 27'',170;\ t_1 = 15^0{,}3\ R;\ t' = 14^0{,}9\ R$$
$$B'' = 19'',845;\ t_2 = 3^0{,}2\ R;\ t'' = 7^0{,}6\ R.$$

Da die in der Gleichung vorkommenden Coefficienten für die Ausdehnung der Luft (α) und des Quecksilbers (γ) für Centesimalgrade gelten, so müssen entweder die vorstehend gegebenen Reaumur'schen Grade in 100theilige oder die Coefficienten α und γ durch Multiplication mit $^5/_4$ umgewandelt werden. Das Letztere ist hier einfacher. Wir erhalten demnach

$$1 + \frac{t_1 + t_2}{400} = 1{,}04625 \text{ für } 1 + \frac{t_1 + t_2}{500},$$
$$1 - \frac{t' - t''}{4440} = 0{,}99868 \text{ für } 1 - \frac{t' - t''}{5550},$$
$$1 + 0{,}002588 \cos 86^0 = 1{,}0001805,$$

und wenn man diese Werthe in die Formel (416) einsetzt und vorläufig den vierten Factor $1 + \frac{h_1}{r} = d$ weglässt, für die drei ersten Factoren (a, b, c)

$$\log\ 18336 = 4{,}2633046$$
$$\log 1{,}00018 = 0{,}0000782$$
$$\log 1{,}04625 = 0{,}0196355$$
$$\log\ a\ b\ c = 4{,}2830183 = \log 19187{,}5$$

In welchem Masse die Barometerstände B′, B″ bestimmt sind, ist gleichgältig, da in der Formel nur das Verhältniss B′ : B″ vorkommt. Man findet nun

$$\begin{aligned} \log B' &= \log 27'',17 &&= 1,4340896 \\ \log B'' &= \log 19'',845 &&= 1,2976511 \\ \hline \log B' &- \log B'' &&= 0,1364385 \\ + \log 0,99868 & &&= 0,9994264 - 1 \\ \hline e = \log \frac{B'}{B''} &+ \log\left(1 - \frac{t' - t''}{5550}\right) &&= 0,1358649. \end{aligned}$$

Nun ist weiter:

$$\begin{aligned} \log e &= 0,1331076 - 1 \\ \log (a\,b\,c) &= 4,2830183 \\ \hline \log (a\,b\,c\,e) &= 3,4161259 = \log 2606,91. \end{aligned}$$

und folglich

Der erste Werth von h ist somit = 2606,91 Meter. Da in dem vorliegenden Falle der Werth von $2z'$ gegen h nur klein ist, so kann man $h_1 = 2606,91$ nehmen und mit Hilfe des $\log r = 6,8048452$ den Factor

$$d = 1 + \frac{h_1}{r} = 1,0004086$$

berechnen. Addirt man schliesslich die Logarithmen der Factoren, a, b, c, d, e, so erhält man den Logarithmus der Höhe und damit diese selbst. Es ist aber

$$\begin{aligned} \log d &= \log 1,0004086 = 0,0001773 \\ \log (a\,b\,c\,e) &= \log \quad 2606,91 = 3,4161259 \\ \hline \log h &= \log (a\,b\,c\,d\,e) = 3,4163032 = \log 2607,96 \end{aligned}$$

und somit die berechnete Höhe h = 2607,96 Meter = 1338,08 Toisen = 8028,48 Pariser Fuss. Nach den Formeln von Laplace und Gauss würde man erhalten haben h = 8040,30 Pariser Fuss, also um $\frac{1}{680}$ h mehr. Die trigonometrische Messung lieferte h = 8044 Par. Fuss.[1] Wollte man nun bewirken, dass die Formel (416) dasselbe Resultat gäbe, so müsste der barometrische Zahlencoefficient von 18336^m auf $18371^m,5$ erhöht werden.

Zur kürzeren Berechnung der Höhenunterschiede aus den beobachteten Grössen B′, B″, t_1, t_2, t′, t″, ψ gibt es besondere Hilfstafeln, unter denen die von Gauss die bekanntesten sind. Da dieselben aber in Folge der durch Ohm angebahnten Vereinfachung

[1] Die Uebereinstimmung der beiden Messungen bis auf $\frac{1}{2000}$ des Höhenunterschiedes ist jedenfalls nur zufällig und keineswegs in der Natur des Barometers als Höhenmesser begründet.

der Höhenformel und einer kaum zu vermeidenden Aenderung des Barometercoefficienten einer Umrechnung bedürfen, so unterlassen wir es, sie hier mitzutheilen.

§. 354.

Aufgabe. Den Fehler in dem Höhenunterschiede zu berechnen, der aus einer mangelhaften Beobachtung der Barometerstände entspringt.

Wenn angenommen wird, dass, mit Ausnahme der Barometerstände, alle Grössen richtig bestimmt sind, so lässt sich zum Zweck der vorstehenden Untersuchung die Formel (419) auch so schreiben:

$$h = p\left(\log \frac{x}{y} + \log q\right),$$

wobei p und q constante Zahlen, x und y aber die veränderlichen Barometerstände vorstellen.

Stellt Δh den gesuchten Fehler vor, welcher aus den Aenderungen Δx und Δy in x und y entspringt, so erhält man dafür mit Rücksicht auf die Bemerkungen des §. 269 die Ausdrücke:

$$\Delta h = \pm p\left(\frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta y}{y}\right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (419)$$

wenn Δx und Δy entweder beide positiv oder beide negativ sind. Dagegen findet man

$$\Delta h = \pm p\left(\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}\right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (420)$$

wenn Δx und Δy entgegengesetzte Vorzeichen haben. Dieser Fall ist jedenfalls der ungünstigste.

Nehmen wir nun beispielsweise an, bei der im vorigen Paragraph behandelten barometrischen Messung des Pic de Bigore sey der Barometerstand $B' = 27'',170$ um $\frac{1}{20}$ Linie zu gross und der Barometerstand $B'' = 19'',845$ um $\frac{1}{20}$ Linie zu klein gemessen worden, so ist hier

$$\Delta x = +0''',05 = +0'',00417 \text{ und } \frac{\Delta x}{x} = +\frac{0,00417}{27,170} = +0,00015348$$

$$\Delta y = -0''',05 = -0'',00417 \text{ und } \frac{\Delta y}{y} = -\frac{0,00417}{19,845} = -0,00021012$$

und demnach nach Gleichung (420), in welcher die Vorzeichen schon berücksichtigt sind:

$$\Delta h = 0,0003636\ p$$

Nun ist nach §. 353 das Product $p = abcd$ und

$$\begin{array}{lrl} & \log\ (a\,b\,c\,d) & = 4{,}2831956; \\ \text{folglich, da} & \log 0{,}0003636 & = 0{,}5606239 - 4 \\ \hline & \log\ (\Delta h) & = 0{,}8438195 \\ \text{und schliesslich} & \Delta h & = 6^m{,}98. \end{array}$$

Es entsteht also in dem vorliegenden Falle aus zwei entgegengesetzten Fehlern von $^1/_{20}$ Par. Linie in jedem Barometerstande ein Höhenunterschied von nahezu 7 Meter oder von $^1/_{372}$ der ganzen Höhe; und zwar wird die Höhe um $6^m{,}98$ zu gross, wenn Δx positiv und Δy negativ, dagegen um $6^m{,}9794$ zu klein, wenn Δx negativ und Δy positiv ist.

Dritter Abschnitt.

Grubenmessungen.

A. Technische Ausdrücke der Bergleute und Markscheider.

§. 355.

Der geordnete Betrieb der Bergwerke fordert, dass man die vorhandenen Lagerstätten nutzbarer Mineralien und die Grubenanlagen, welche zu ihrer Ausbeutung dienen, aufnehmen und bildlich darstellen, und projectirte Grubenbaue ihrer Grösse und Lage nach abstecken kann. Dieses Geschäft heisst Markscheiden und derjenige, welcher es ausübt, ein Markscheider.

Es handelt sich also auch hier, wie in den beiden vorausgehenden Abschnitten, um Aufnehmen und Abstecken, und so lange der Markscheider nicht in der Grube, sondern im freien Felde arbeitet, sind seine Hilfsmittel und Operationen von denen des praktischen Geometers nicht verschieden, oder sollten es jedenfalls nicht seyn. Eine Verschiedenheit der Instrumente und Messmethoden tritt nur bei Arbeiten in engen Grubenräumen ein, welche die Anwendung geodätischer Instrumente nicht gestatten. Wo jedoch Raum für diese gegeben ist, zieht sie der wissenschaftlich gebildete Markscheider auch bei seinen unterirdischen Arbeiten den weniger genauen Hilfsmitteln, welche er zur Messung horizontaler und vertikaler Winkel in dem Hängecompass und dem Gradbogen besitzt, vor.

In die Lehrbücher der Markscheidekunst wird in der Regel auch die Lehre von den Horizontal- und Vertikalmessungen im freien Felde, oder nach bergmännischem Ausdrucke, die Lehre von den „Tagemessungen" aufgenommen und entweder im Sinne der praktischen Geometer auf die vollkommeneren Messinstrumente der Neuzeit, oder im Sinne der alten Markscheider auf deren unbehilfliche und ungenaue Werkzeuge gegründet. Da wir aber diese Messungen im ersteren Sinne bereits abgehandelt haben, so brauchen wir sie nicht weiter zu berühren, als um ihre Verknüpfung mit den unterirdischen Messungen oder mit anderen Worten, den Anschluss der Grubenmessungen an die Tagmessungen zu zeigen.

Da die Markscheidekunst nur für den Bergbau vorhanden ist und vorzugsweise von Bergleuten ausgeübt wird, so begreift sich leicht, dass in derselben viele bergmännische Ausdrücke üblich sind, welche der praktische Geometer und der Ingenieur in der Regel nicht kennen, und welche ihnen desshalb erklärt werden müssen, wenn sie in den Stand gesetzt werden sollen, die Bergleute zu verstehen oder sich ihnen verständlich zu machen. Diese Kunstwörter beziehen sich zum Theil auf geognostische Verhältnisse, insoferne sie die Lagerstätten der Mineralien betreffen; zum Theil bezeichnen sie die technischen Anlagen und Arbeiten, welche zur Gewinnung der brauchbaren Mineralien dienen; und theilweise werden sie zur Bezeichnung geometrischer Begriffe (in diesem Falle also gleichbedeutend mit den Ausdrücken der Geometer) gebraucht. Wir theilen nachstehend eine grössere Anzahl bergmännischer Kunstwörter mit, ohne uns jedoch zu verpflichten, die geometrischen auch da beizubehalten, wo es bereits allgemein gebräuchliche gute Namen zur Bezeichnung von hiehergehörigen Dingen und Begriffen gibt.

§. 356.

Geognostische Ausdrucke.

Die grossen zusammenhängenden Massen, welche die Hauptbestandtheile der Erdrinde bilden, heissen Gebirgsmassen. Sind diese Massen auf beträchtliche Weite durch parallele Ebenen in Lagen von mässiger Dicke getheilt, so nennt man sie geschichtet, die Lagen selbst Schichten. Jene Schichten, welche aus Mineralmassen bestehen, die der Hauptgebirgsmasse fremdartig und untergeordnet sind, heissen Lager. Von diesen hat man diejenigen Lagen verschiedenartiger Mineralmassen zu unterscheiden, welche die Gebirgsschichten durchschneiden und Gänge genannt werden. Lager und Gänge nennt man zusammen Lagerstätten. Erstrecken sich diese bis an die Erdoberfläche, so sagt man von ihnen, sie gehen zu Tage aus; das Hervortreten einer Lagerstätte an das Tageslicht nennt man wohl auch das Ausbeissen derselben. Die Schichten, auf denen eine Lagerstätte ruht, heissen das Liegende, jene, welche sie bedecken, das Hangende, und die Ebenen, welche die Lagerstätte vom Liegenden und Hangenden trennen, die Salbänder der Lagerstätte. Der senkrechte Abstand der beiden Salbänder einer Lagerstätte wird deren Mächtigkeit genannt. Ist

die Mächtigkeit eines Lagers im Verhältniss zu seiner Länge sehr gross, so heisst es ein Stock.

§. 357.

Bergmännische Ausdrücke.

Unter dem Abbau einer Lagerstätte versteht man die Gewinnung der in ihr vorkommenden nutzbaren Mineralien. Der Raum, welchen ein Grubenbesitzer (Lehenträger, Gewerk) abbauen darf, heisst das Grubenfeld. Zur Bezeichnung der Grenzen eines solchen Feldes dienen an der Erdoberfläche (über Tage) die Lochsteine und in der Grube (unter Tage) die in das Gestein eingehauenen Markscheidestufen.

Der Abbau der Lagerstätten geschieht durch Stollen und Schächte. Ein Stollen ist ein in einen Berg führender (getriebener) Gang, von sehr geringer Neigung und mässigem Querschnitte.[1] Dient er zum Aufsuchen einer neuen oder zur näheren Untersuchung einer alten Lagerstätte, so heisst er Schurfstollen; werden durch ihn die Grubenwässer abgeleitet, Erbstollen; soll er den Gruben gute Luft zuleiten, Wetterstollen; geschieht durch ihn der Transport der gewonnenen Mineralmassen, Förderstollen; und wenn er vorhandene Gänge verbindet oder verkreuzt, Zubaustollen. Das zu Tage gehende Ende eines Stollens heisst sein Mundloch, das entgegengesetzte Ende der Feldort; Boden, Decke und Seitenwände nennt man beziehlich Sohle, First, Ulmen.

Unter Schacht versteht man eine von der Erdoberfläche ausgehende lothrechte oder geneigte Grube von rechteckigem Querschnitte. Dient er zum Auf- und Niedersteigen (Aus- und Einfahren) in der Grube, so heisst er Fahrschacht; soll er frische Luft zuführen, Wetterschacht; werden durch ihn mittels Maschinen (Künste) die Grubenwässer weggeschafft (gelöst), Kunstschacht; dient er zur Hebung der gewonnenen Mineralmassen, Förderschacht; und wenn dieses Heben durch besondere Maschinen geschieht, Treibschacht. Das untere Ende eines Schachtes heisst dessen Sohle, seine Längenausdehnung die Teufe.

Eine nicht von der Erdoberfläche, sondern von einem Stollen ausgehende lothrechte oder schiefe Grube nennt man ein Gesenke,

[1] Die Höhe beträgt in der Regel nur $1^1/_4$, die Breite $^1/_2$ Lachter, die Steigung höchstens $^1/_2$ Procent.

und einen nicht von einem Bergabhange, sondern von einem Schachte ausgehenden Stollen eine Strecke. Eine von einem Stollen rechtwinkelig abzweigende Strecke heisst ein Querschlag, ausserdem ein Flügelort. Die Oerter, welche so niedrig sind, dass die Bergleute nur sitzend darin arbeiten können, nennt man Sitzörter, und jene weiten, welche unter einem Förderschachte liegen und zur Einfüllung der Kübel und Tonnen dienen, Füllörter.

Stollen, Strecken, Schächte und Gesenke werden überall, wo Felsen es nicht unnöthig macht, zur Vermeidung des Einsturzes ausgezimmert (manchmal auch ausgemauert). Die Zimmerung eines Stollens geschieht mit Thürstöcken, die nach Erforderniss dicht aneinander oder eine halbe Lachter von einander stehen. Die in den Seitenwänden stehenden Holzstämme heissen Stämpel, die darauf liegenden Kappen.

§. 358.

Geometrische Ausdrücke.

Eine söhlige Linie oder Ebene ist mit einer wagrechten, eine seigere mit einer lothrechten Linie oder Ebene gleichbedeutend. Demnach bedeutet Seigerteufe eine in die Tiefe gehende Vertikallinie und Seigerebene eine Vertikalebene. Unter einer flachen oder tonnlägigen Linie oder Ebene wird jede gegen den Horizont geneigte Linie oder Ebene verstanden.

Denkt man sich durch den einen Endpunkt einer geneigten Linie eine Horizontalebene gelegt und den anderen Endpunkt darauf projicirt, so heisst dessen Projection der Seigerpunkt, während die Horizontal-Projection der Linie selbst deren Ebensohle genannt wird. Der Neigungswinkel der flachen Linie gegen den Horizont heisst der Fallwinkel und der horizontale Winkel, den die Ebensohle mit der Mittagslinie bildet, der Streichwinkel der flachen oder tonnlägigen Linie.

Zieht man auf einer Lager- oder Gangebene (in der Regel auf einem Salbande) eine horizontale (söhlige) Linie, so heisst dieselbe die Streichlinie dieser Ebene. Misst man den horizontalen Winkel, welchen diese Linie mit dem Meridiane bildet, so hat man den Streichwinkel des Lagers oder des Ganges, wobei nur noch anzugeben ist, von welcher Seite der Mittagslinie er gezählt wird. Eine in der Gang- oder Lagerebene senkrecht zur

Streichlinie gezogene Gerade heisst die Falllinie der Ebene, und der Neigungswinkel dieser Linie gegen den Horizont der Fallwinkel der Lagerstätte, zu welcher jene Ebene gehört. Die Ebene des Fallwinkels nennt man die Fallebene der Lagerstätte. Zwei Gänge fallen rechtsinnig, wenn ihre Falllinien nach gleichen Himmelsgegenden gerichtet sind, und widersinnig, wenn das Gegentheil stattfindet.

Statt des Wortes Abstecken bedienen sich die Markscheider des Ausdruckes Abgeben (einen Punkt, eine Linie abgeben); das Aufnehmen nennen sie Verziehen, und die bildliche Darstellung oder das Auftragen einer Figur Zulegen. Für Horizontalprojection brauchen sie das auch sonst übliche Wort Grundriss, für erste Vertikalprojection oder Aufriss den Ausdruck Seigerriss, und für zweite Vertikalprojection das Wort Quer- oder Kreuzriss.

B. Grundoperationen in der Grube.

§. 359.

Die Arbeiten, welche der Markscheider in der Grube oder „unter Tage" vorzunehmen hat, bestehen wie die des Feldmessers in der Bestimmung der gegenseitigen Lage von Punkten, und folglich in dem Aufnehmen und Abstecken von Punkten, Linien und Winkeln. Die zusammengesetztesten Markscheide-Aufgaben erfordern zu ihrer Lösung weiter nichts als eine entsprechende Combination von Linien- und Winkelmessungen; wer daher als Markscheider etwas leisten will, muss vor allen Dingen mit diesen Messungen vertraut seyn und sich ausserdem durch ein gründliches Studium der darstellenden Geometrie die Befähigung erworben haben, die Lösung zusammengesetzter Aufgaben über die gegenseitige Lage von Linien und Ebenen auf die Construction und Messung von Linien und Winkeln zurückzuführen.

Jede Messung in der Grube muss an einem fixen Punkte (Anhaltspunkt) beginnen und schliessen; ausgedehnte Messungen erfordern auch zwischen den Enden Fixpunkte, um an sie spätere Messungen anschliessen zu können. Diejenigen Punkte, welche nur für kurze Zeit bezeichnet werden, nennt man, im Gegensatze zu den Fixpunkten, verlorene Punkte. Die Anhaltpunkte werden auf verschiedene Weise bezeichnet.

§. 360.

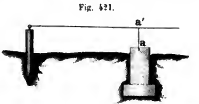
Aufgabe. Die gebräuchlichsten Arten, Fixpunkte in den Gruben zu bezeichnen, anzugeben.

Beginnt eine Messung an einem Stollenmundloche (Ein- oder Ausgang), so wird an demselben ein Fixpunkt angebracht, der zugleich für die Verbindung der Messung in der Grube mit der über Tage dient. Ist der Stollen mit Holz abgesteift, so begnügen sich manche Markscheider damit, in der Kappe des Thürstocks oder in dessen Pfosten ein Kreuz (†) einzuschneiden und dieses als Fixpunkt anzusehen; ein solcher Punkt ist aber zu unsicher und zu vergänglich, als dass er den Namen Fixpunkt verdiente. Dauerhafter sind jene Zeichen, welche aus 4 bis 5 Zoll langen hölzernen Dübeln bestehen, die entweder in das feste Gestein oder das Mauerwerk des Stollenmundloches eingetrieben sind, um beim Verrichten des Zugs eine Verziehschraube oder ein 6 Zoll langes und am Kopfe 1 Zoll breites Punkteisen (Fig. 420) aufzunehmen. Am sichersten und geeignetsten aber erscheinen besondere Fixteine, welche man vor dem Stollenmundloche auf ein festes Fundament so weit versenkt, dass sie nur etwa einen Zoll über die Sohle des Stollens vorstehen (Fig. 421). Dergleichen Steine (a) sind Prismen von einem Quadratfuss Grundfläche und 2 bis 3 Fuss Höhe, in welche oben ein 2 Zoll tiefes Loch gebohrt ist, das den Anfangspunkt vorstellt. Zur Schonung des Steins ist es gut, denselben mit einem Deckel zu versehen, der bei Messungen abgenommen wird; ausserdem ist seine Lage gegen andere unveränderliche Gegenstände in horizontaler und vertikaler Projection genau einzumessen, um sich jederzeit von dem unverrückten Stande desselben überzeugen zu können.

Fig. 420.



Fig. 421.



Sind in den Firsten von Stollen oder Strecken Punkte zu fixiren, von denen bloss herabgesenkelt wird, so geschieht dieses durch Senkeleisen (Fig. 422), welche eine Länge von $2\frac{1}{2}$ bis 3 Zoll und eine $2\frac{1}{2}$ bis 3 Linien weite Oeffnung haben, um die Senkel-

schnur aufzunehmen. In Fig. 423 ist ein solcher Punkt (m) angedeutet; das Loth m n berührt die gespannte Schnur s.

Als Anhaltepunkte für das Nivellement eines Stollens oder einer Strecke dienen die Sohlnägel (Fig. 424), welche 3 bis $3\frac{1}{2}$ Zoll



Fig. 422. Fig. 423. Fig. 424.

lang und am Kopfe $1\frac{1}{2}$ bis 2 Zoll breit sind. Diese Nägel werden in Sohlschwellen oder hölzerne Dübel eingeschlagen und sind behufs späterer Benützung gegen Beschädigung zu schützen.

§. 361.

Aufgabe. Eine geneigte oder tonnlägige Linie abzustecken und auszumessen.

Das Abstecken von Linien in der Grube muss sich wegen Mangels an Aussicht und Tageslicht von dem Abstecken über Tage wesentlich unterscheiden. Sind es hier die Lichtstrahlen, welche gerade Linien bezeichnen, so dienen in den finstern und engen Grubenräumen lediglich Schnüre und Seile (manchmal auch Dachlatten) zur Verkörperung dieser Linien, und an die Stelle der Absteckstäbe treten alsdann die Verzieh- oder Markscheideschrauben.

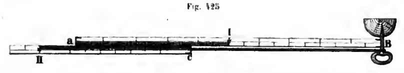
Wie die 20 bis 30 Klafter lange, $2\frac{1}{2}$ bis 3 Linien dicke und auf eine Spule gewickelte Mess- oder Verziehschnur mittels der eben genannten Schrauben in der Grubenzimmerung oder in besonderen Spreitzen befestigt und gespannt wird, und wie man die Schnurlänge zwischen zwei Schrauben mit Hilfe der Lachterkette finden kann, ist bereits in §. 171 beschrieben worden; hier ist also nur noch beizufügen, wie man die Schnurlänge mit den aus §. 165 bekannten Lachterstäben erhält.

Der Markscheider muss hiezu zwei Stäbe und einen Gehilfen

haben; jener führt den Massstab Nr. I, dieser Nr. II, und jeder hält seinen Stab so mit den beiden Händen, dass dieser im ersten Drittel von den Enden her, unten vom Daumen, oben von den übrigen Fingern umschlossen ist, und die Theilung nach oben kommt. Ist nur der halbe Lachterstab bis auf Linien getheilt, so richte man ihn so, dass seine fein getheilte Hälfte gegen das Ende der zu messenden Linie liegt. Den Stab Nr. I legt der Markscheider so über die gespannte Schnur, dass sein Beschläg die Mitte des Stengels der ersten Schraube (A) berührt, und dass das Gewicht der Schnur auf dem Daumen noch fühlbar ist. Auf den Ruf „gut" schiebt der Gehilfe vorsichtig seinen Stab Nr. II an den des Markscheiders, bis ein leiser Klang gehört und das Schnurgewicht auf den Daumen gefühlt wird. Wenn dieses der Gehilfe durch das Wort „gut" angezeigt hat, setzt der Markscheider seinen Stab ab, zählt laut „eins" und fügt ihn wieder an Nr. II an. Hierauf nimmt der Gehilfe, die Zahl „zwei" aussprechend, seinen Stab weg, legt ihn an Nr. I, worauf der Markscheider seine Lachter mit dem Rufe „drei" und dann wieder der Gehilfe seinen Stab mit dem Rufe „vier" abschiebt. In dieser Weise wird mit der Messung bis an's Ende der Linie fortgefahren und dabei darauf gesehen, dass der Markscheider fortwährend die ungeraden, der Gehilfe aber die geraden Lachterlängen auszusprechen hat, weil darin eine gewisse Sicherung gegen irriges Abzählen liegt.

Das Ende der Schnur wird in der Regel von der zweiten Schraube (B) aus rückwärts gemessen, da es häufig nicht möglich ist, den letzten Stab über das Ende hinausragen zu lassen, und da, wenn dieses auch möglich wäre, die Ablesung über der Schraube nicht so sicher ist, als am Ende (c) des vorletzten Lachterstabes, welcher in Fig. 425 mit Nr. II bezeichnet ist. Der Stab Nr. I wird

Fig. 425



wie auf dem Anfangspunkte A über die Mitte der Schraube B gelegt und neben den ersten gehalten, so dass die Länge Bc leicht abzunehmen ist. Während der Markscheider diese Länge bestimmt und in sein Notiz- oder Zugbuch einschreibt, hält der Gehilfe beide Stäbe, und der Controle wegen lesen beide Messende die Länge Bc laut ab.

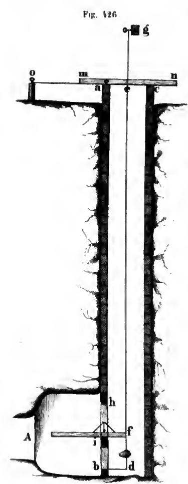
§. 362.

Aufgabe. Eine lothrechte oder seigere Linie abzustecken und auszumessen.

Ist die Linie nicht über 25 Lachter lang, so bedient man sich der Messschnur, ausserdem aber eines Treibseils zur Absteckung. Da jede solche Linie in einen seigeren Schacht hinabführt, so wollen wir sofort annehmen, es sey die Tiefe eines solchen Schachtes auszumessen.

A. Die Tiefe betrage nicht über 25 Lachter. Fig. 426. Stellt bc den seiner Tiefe nach auszumessenden Schacht vor, so handelt es sich darum, den lothrechten Abstand de zwischen der auf der Sohle liegenden Grundschwelle b und der durch eine Latte mn vorgestellten Oberfläche des Tagkranzes ac zu finden. Man bringe desshalb in einem Balken (g) des Schachthauses eine Verziehschraube an, befestige an ihr die unten mit einem Steine beschwerte Messschnur und errichte in dem Schachtfenster bh in passender Höhe eine Spreize i, welche gestattet, eine Latte if mittels einer Setzwage horizontal zu legen. Ist der Senkel zur Ruhe gekommen, so bemerke man an der Schnur die Stellen e und f durch Bindfaden und messe mit dem Lachterstab die Höhe bi. Hierauf zieht man den Senkel nach und nach aus der Grube und misst die Länge ef auf ähnliche Weise wie die Schnurlänge einer geneigten Linie. Nachdem nämlich die Schnur so weit gehoben ist, dass der Punkt e etwa einen Fuss über dem Boden steht, legt der Markscheider den Lachterstab Nr. I an die Schnur, worauf dieser wieder gehoben wird. Ist das untere Ende des ersten Stabs einen

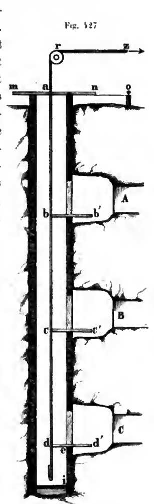
Fig. 426



Fuss über ac gekommen, so legt der Messgehilfe den Stab Nr. II an, der Markscheider setzt ab, zählt „eins“ und legt wieder an. Dasselbe thut dann der Gehilfe, „zwei“ zählend. Hierauf nimmt der Markscheider die dritte, der Gehilfe die vierte Lachter ab, und so fahren beide fort, bis das untere Zeichen f des Senkels eingemessen ist. Es versteht sich von selbst, dass bei dieser Messung der Stein fortwährend an der Schnur bleibt, damit sich deren Länge so wenig als möglich ändert. Nach der Figur ist die Tiefe des Schachts de = ef + df.

B. Die Tiefe des Schachts betrage mehr als 25 Lachter. Fig. 427. Das Verfahren zur Messung der Tiefe ist dem vorigen gleich, nur der Senkel ist ein anderer. Das Treibseil, welches jetzt an die Stelle der Schnur tritt, und welches wie diese schon längere Zeit hindurch gebraucht seyn soll, liegt auf einer Rolle (r) und wird von irgend einer Hebmaschine in der Richtung rz gehalten. Vermöge seines grossen Gewichts nimmt es von selbst eine lothrechte Richtung an; es bedarf also keiner Beschwerung. Hat man durch horizontal gelegte Latten und Bindfaden die Stellen bezeichnet, deren Entfernungen gemessen werden sollen, so lässt man das Seil langsam über die Rolle treiben und misst dabei die gesuchten Längen wie vorhin mit Lachterstäben. Kommt das erste Seilzeichen (b) an, so wird mit dem Auftreiben des Seils so lange innegehalten, bis die Länge des ersten Lauts in das Zugbuch eingetragen ist; dasselbe geschieht bei jedem folgenden Laufe. Da die Seilzeichen leicht so beschmutzt werden können, dass man sie übersieht, so bindet man gewöhnlich noch ein Stückchen Holz mit an, welches die Nummer des Laufs enthält, dessen Seigertiefe gesucht wird.

Fig. 427



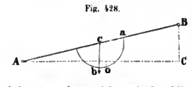
§. 363.

Aufgabe. Den Höhen- oder Tonnlagewinkel einer geneigten Linie zu bestimmen.

Dieser Winkel kann nach Umständen mit dem Gradbogen, dem Setzniveau oder dem Grubentheodolithen gemessen werden.

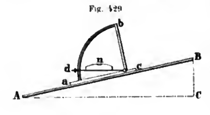
A. **Messung des Winkels mit dem Gradbogen.** Fig. 428. Ist die Linie durch eine Schnur bezeichnet, so lässt sich nur der Gradbogen (§. 196, Fig. 209) zur Messung ihres Neigungswinkels anwenden. Dieser Bogen soll immer in der **Mitte** der Sehnur und nicht, wie manche Markscheider zu thun pflegen, unterhalb derselben aufgehängt werden. Je steiler der Zug, desto kürzer soll er seyn. Hat man den Winkel auf der einen Seite der Schnur abgenommen und gestattet es der Raum, den Bogen umzuhängen, so nimmt man den Winkel oeb = BAC zum zweiten Male auf. Differiren beide Aufnahmen, so sieht man das arithmetische Mittel der Ablesungen als den richtigen Tonnlagewinkel an. Behufs des Ablesens hält der Messgehilfe das Grubenlicht **hinter** den Gradbogen, damit der Schatten des Senkelhaares nicht mit diesem selbst verwechselt werde. Durch geeignetes Entgegenhalten des Zugbuchs kann der Markscheider das Licht an die Stelle leiten, wo die Ablesung stattfindet. In vielen Fällen ist es nöthig, erst den in dem Stollen oder Strecken herrschenden Zug zu hemmen, um den Senkel zur Ruhe zu bringen. Da das Haar des Senkels leicht reisst, soll der Markscheider immer eines im Vorrath haben und bei dem Aus- und Einpacken, sowie bei dem Aufhängen des Gradbogens, sehr vorsichtig verfahren.

Fig. 428.



B. **Messung des Winkels mit dem Setzniveau.** Fig. 429. Stellt AB eine feste unbiegsame Latte vor und wird auf derselben ein eingetheilter Quadrant abc, der auf einem messingenen Lineale ac ruht, vertikal und so aufgestellt, dass die Linie ca, welche durch den Nullpunkt der Theilung geht, mit der tonnlägigen Linie AB parallel läuft, so gibt

Fig. 429



die durch die Libelle n horizontal gestellte Alhidade ed mittels des bei d befindlichen Nonius den Tonnlagewinkel BAC = aed bis auf einzelne Minuten an, während dieser Winkel mit dem Gradbogen höchstens auf 3 Minuten genau erhalten werden kann. Die nähere Einrichtung des durch abed angedeuteten Setzniveaus von Prof. Weisbach kann man aus dem zweiten Bande der Zeitschrift „der Ingenieur" S. 450 u. s. f. kennen lernen.

C. **Messung des Winkels mit dem Grubentheodolithen.** Fig. 430. In diesem Falle ist die geneigte Linie AB am ersten Endpunkte (A) durch die Drehaxe des Fernrohrs und am zweiten (B) durch die Mitte des leuchtenden oder beleuchteten Signals (§. 140, S. 260—263) vorgestellt. Hat man in dem Punkte A den Höhenwinkel BAC gemessen, so kann man auch noch den Tiefenwinkel ABC' bestimmen, indem man die Stative D, E stehen lässt, das Signal von B mit dem Theodolithen in A vertauscht und von B nach A zurückvisirt. Die Höhen- und Tiefenwinkel sollen genau gleich seyn, da, nach der in

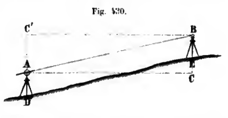


Fig. 430.

§. 140 beschriebenen Einrichtung der Leuchtsignale für Gruben, die Visirlinie BA mit der AB zusammenfällt. Findet eine Abweichung zwischen beiden Ergebnissen der Messung statt und hat man sich überzeugt, dass diese nicht von den ungleichen Höhen des Instruments und des Signals herrührt, so kann man das arithmetische Mittel als den richtigen Vertikalwinkel ansehen.

§. 364.

Aufgabe. Den Streichwinkel einer wagrechten oder geneigten (söhligen oder tonnlägigen) Linie zu bestimmen.

Würde die gegebene Linie AB (Fig. 431), deren Streichwinkel gefunden werden soll, eine andere Gerade CD schneiden, deren Neigung gegen die Mittagslinie bekannt wäre, und gestattete der Raum das Aufstellen eines Theodolithen und der ihm entsprechenden Signale, so erhielte man den Streichwinkel der Geraden AB ohne

Fig. 431.

Zweifel am genauesten, indem man den Horizontalwinkel der Linien AB und CD zu dem Azimuthe der letzteren addirte oder von ihm subtrahirte, je nach der Lage der Linien.

Sind aber diese Bedingungen nicht gegeben und hat man sich vorher überzeugt, dass sich in der Nähe keine Eisenstücke (z. B. Geräthe, Eisenschienen etc.) oder Gebirgsarten (z. B. Eisensteine, Kobalt, Nickel, Basalt, Serpentin, Grünstein etc.) befinden, welche auf die Nadel störend einwirken: so hängt man den in den §§. 125 bis 127 dargestellten Hängecompass auf die aus Fig. 125 näher ersichtliche Weise an der gespannten Verziehschnur AB (Fig. 431) und zwar gewöhnlich ausserhalb der Mitte so auf, dass der mit Stunde 0 = Stunde 24, oder auch mit 360⁰ bezeichnete Nordpunkt des Compassringes in der Richtung von A nach B liegt.

Sobald der Hängecompass ruhig steht, stellt sich der Markscheider vor den Nordpol der Nadel um abzulesen, wobei der Gehilfe so leuchtet,[1] dass weder der Reflex des Glasdeckels noch der Schatten der Nadel dieses Geschäft stören. Hierauf macht man auch am Südpole eine Ablesung und nimmt aus den zwei Resultaten das arithmetische Mittel als den gesuchten Streichwinkel. Ehe man jedoch dieses Mittel in das Zugbuch einträgt, bringt man die Nadel erst noch einmal zum Schwingen und sieht zu, ob ihre Enden sich wieder wie vorhin stellen oder nicht. Sollten merkliche Abweichungen stattfinden, welche nur magnetischen Störungen zugeschrieben werden können, so muss man vorläufig auf die Abnahme des Stundenwinkels verzichten und dieselbe zu einer mehr geeigneten Zeit (vor 10 Uhr Morgens und nach 2 Uhr Nachmittags) vornehmen.

Ist der Gradring nicht von 0^0 bis 360^0 oder von Stunde 0 bis Stunde 24, sondern in zweimal 180^0 oder zweimal 12 Stunden getheilt, so ist nach §. 125, S. 212 die östliche oder westliche Richtung des Streichens mit zu bemerken.

Der Streichwinkel, welchen man durch das eben beschriebene Verfahren erhält (der beobachtete oder observirte Streichwinkel) ist auf die Magnetlinie bezogen; will man ihn auf die Mittagslinie beziehen, so muss er um die Abweichung der Magnetnadel vergrössert oder verkleinert werden, und in dieser Gestalt heisst er der verbesserte oder reducirte Streichwinkel.

[1] Dass die Grubenlampe nicht von Eisen seyn darf, sondern aus Kupfer oder Messing bestehen muss, versteht sich von selbst.

Bezeichnet δ die Abweichung der Magnetnadel, und ist ω der auf einem von rechts nach links (widersinnig) in 360° oder 24 Stunden getheilten Compass beobachtete Streichwinkel, so ist der verbesserte Streichwinkel: bei der östlichen Abweichung der Magnetnadel gleich

$$\omega' = \omega + \delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (421)$$

und bei der westlichen Abweichung gleich

$$\omega'' = \omega - \delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (422)$$

Wäre der Compass wie die Kreise der Theodolithen von links nach rechts (rechtsinnig) beziffert, so würde $\omega' = \omega - \delta$ und $\omega'' = \omega + \delta$ seyn. Da in diesem Jahrhundert die Declination der Magnetnadel westlich bleibt, so hat man bei widersinnigen Gradringen fortwährend nur die letztere Formel anzuwenden.

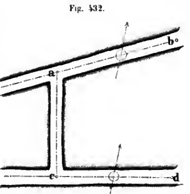
Wo die Abweichung der Magnetnadel unbekannt ist, kann man dieselbe dadurch bestimmen, dass man sich nach §. 322 eine Mittagslinie zieht, über diese die Bussole stellt, nach einem in der Mittagslinie stehenden Signale visirt und am Nordende der Nadel abliest. Diese Ablesung mehrmals wiederholt und durch die Ablesung am Südende verbessert, gibt die gesuchte Abweichung der Magnetnadel, welche die Bergleute auch das Streichen der Mittagslinie nennen. Dieses ist selbstverständlich östlich, wenn die Abweichung der Nadel westlich ist, und umgekehrt.

§. 365.

Aufgabe. Den Neigungswinkel zweier gerader Linien zu bestimmen. (Fig. 432.)

Schneiden sich die Geraden a b, c d und lässt sich im Schnittpunkte ein Theodolith aufstellen, so misst man den gesuchten Winkel mit diesem Instrumente am genauesten. Dasselbe ist auch der Fall, wenn die beiden Geraden a b, c d sich selbst nicht schneiden, aber von einer dritten Geraden a c so geschnitten werden, dass sich in den Schnittpunkten a, c der Theodolith aufstellen lässt. In diesem Falle

Fig. 432.



misst man den Winkel bac $= \alpha$, acd $= \gamma$ und berechnet daraus den Neigungswinkel $\beta = \alpha + \gamma - 180^0$.

Besitzt man keinen Theodolithen oder ist er nicht anwendbar, so bestimmt man das Streichen beider Linien mit dem Hängecompass und berechnet daraus den Neigungswinkel β. Ist der Streichwinkel der Linie cd, welche als der rechte Schenkel angesehen werden soll, $= \alpha'$ und das der Linie ab, welche somit der linke Schenkel ist, $= \alpha''$, so erhält man

$$\beta = \alpha' - \alpha'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (423)$$

so lange beide Linien (ab, cd) zugleich auf der östlichen oder westlichen Seite der Nadel liegen; liegt aber der rechte Schenkel östlich und der linke westlich, so wird, wie man sich leicht überzeugt,

$$\beta = 360^0 + \alpha' - \alpha''; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (424)$$

dagegen erhält man β wieder aus der Gleichung (423), wenn der rechte Schenkel östlich und der linke westlich liegt, und wenn, wie bisher, die Ablesungen α' und α'' auf einem widersinnig und von 0^0 bis 360^0 oder von 0^h bis 24^h bezifferten Gradringe gemacht werden.

§. 366.

Aufgabe. Das Streichen und Fallen von Lagerstätten unter verschiedenen Bedingungen zu bestimmen.

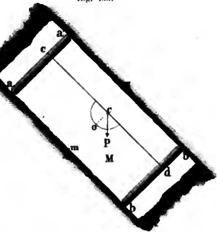
Würden die Lagerstätten auf eine grosse Ausdehnung in der Grube entblösst seyn, wie es mit geschichteten Steinen über Tage oft der Fall ist, so wäre die Bestimmung des Streichens und Fallens eine leichte Arbeit: man würde mittels einer Latte und einer Setzwage auf der Lagerstätte eine horizontale Linie abstecken, längs dieser Linie eine Schnur spannen, den Compass anhängen, das Streichen gegen die Magnetlinie ablesen und dieses beobachtete Streichen mittels der bekannten Declination der Magnetnadel auf die Mittagslinie reduciren; hierauf zöge man zu der horizontalen Streichlinie eine in der Lagerstattebene liegende Senkrechte, spannte in deren Richtung über die Ebene eine Schnur, hienge daran den Gradbogen und bekäme hierdurch den gesuchten Fallwinkel oder das Verflächen der Lagerstätte.

Allein die Natur der Lagerstatten und die Art ihres Abbaues gewähren keine so grossen Entblössungen, wie sie hier vorausgesetzt werden: der Markscheider muss sich vielmehr mit sehr kleinen

Theilen der Lagerstätten begnügen, um aus den auf ihnen erhobenen Daten auf das allgemeine Streichen und Fallen jener Stätten zu schliessen. Es folgen nun zunächst Andeutungen darüber, wie man unter verschiedenen Localverhältnissen das Streichen und Fallen an einzelnen Stellen beobachtet und nöthigenfalls berechnet.

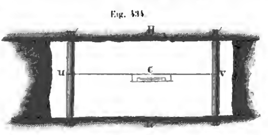
1) Stellt in Fig. 433 H das Hangende und L das Liegende eines Steinkohlenflötzes vor und ist dieses einige Lachter weit entblösst, so suche man vor allen Dingen mit einer etwa 2 Lachter langen Latte und einer Setzwage auf dem Liegenden eine horizontale Linie und errichte darauf mit einem Winkelmasse eine Senkrechte a b. Denken wir uns den Schnitt des Flötzes nach dieser Senkrechten genommen, so stelle man auf derselben zwei Stämpel a a′, b b′, senkrecht gegen a b auf, mache a c = b d oder

Fig. 433.



a′c = b′d und spanne die Schnur c d, so wird diese mit a b in einer Ebene liegen und dem Dache (H) und der Sohle (L) des Flötzes parallel seyn. Wird an die Schnur c d der Gradbogen gehängt und der Winkel o c p abgelesen, den der Pendelfaden anzeigt, so hat man damit das Fallen des Flötzes in der Strecke M gefunden. Errichtet man ebenso an den Endpunkten der horizontalen Geraden m n (Fig. 434) zwei Stämpel m m′, n n′ entweder senkrecht auf das Liegende und Hangende oder lothrecht, macht m u = n v oder m′u = n′v, zieht die Schnur u v und hängt an derselben den Compass C auf, so findet man das Streichen des Flötzes in der Strecke M.

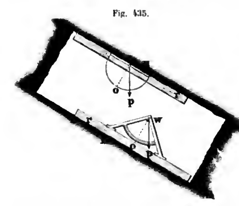
Fig. 434.



2) Sollte es wegen zu beschränkten Raumes nicht möglich seyn, erst eine Horizontallinie des Hangenden oder Liegenden und darauf

die Verflächungslinie herzustellen, so sucht man letztere, wenn das Hangende entblösst ist, dadurch, dass man (wie in Fig. 435 angedeutet) auf einer parallelepipedischen Latte r einen Gradbogen so befestigt, dass der durch den Nullpunkt gehende Halbmesser senkrecht zur Axe der Latte steht, und diese Latte so lange an dem Hangenden hin und her bewegt, bis der Neigungswinkel, den das Loth anzeigt, seinen grössten Werth erlangt hat: in diesem Falle gibt die Latte die Richtung der Linie des stärksten Falles an und folglich der Gradbogen die Verflächung des Flötzes. Wäre nur das Liegende entblösst, so würde man auf die Latte r statt eines Gradbogens eine Bergwage w (§. 195) aufsetzen, um so den grössten Neigungswinkel und damit die Verflächung des Liegenden zu erfahren. In manchen Fällen genügt es auch, das Liegende mit Staub oder Bohrmehl zu bestreuen und eine Kugel darüber rollen zu lassen: ihre Bahn bezeichnet die Linie des grössten Falles und es braucht dann nur noch deren Neigung gemessen zu werden.

Fig. 435.



3) Ist das Fallen einer Lagerstätte bestimmt und lässt sich parallel mit der Linie des grössten Falles eine Schnur spannen, so kann deren Streichen mittels des Hängecompasses bestimmt werden. Ist aber dieses sogenannte Kreuzstreichen bekannt, so erhält man das Hauptstreichen, indem man jenes um 90° vermehrt, so dass also

$$\sigma = 90^0 + \sigma' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (425)$$

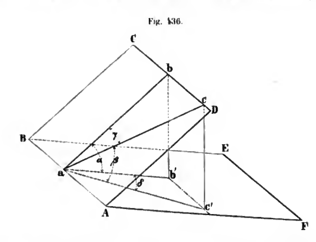
wenn σ das Haupt- und σ' das Kreuzstreichen vorstellt. Ueberschreitet die Summe $90^0 + \sigma'$ die Grösse eines ganzen Kreises (2π), so sind selbstverständlich 360^0 von $90^0 + \sigma'$ oder 270^0 von σ' abzuziehen, um σ zu erhalten. Wäre z. B. $\sigma' = 316^0\ 50'$, so erhielte man, da $316^0\ 50'$ schon im vierten Quadranten liegen, also $90^0 + \sigma' > 360^0$ ist, $\sigma = 90^0 + \sigma' - 360^0 = \sigma' - 270^0 = 46^0\ 50'$.

Dass die Gleichung $\sigma = 90^0 + \sigma'$ richtig ist, wird sich der Leser leicht klar machen, wenn er bedenkt, dass die Horizontalprojectionen der Falllinie und der Streichungslinie auf einander

senkrecht stehen, und dass das Kreuzstreichen das Streichen der Projection der Falllinie ist.

4) Kann man bloss das Streichen einer Lagerstätte und den Neigungswinkel derselben nach einer gegebenen Richtung, welche aber nicht die des grössten Falles ist, unmittelbar bestimmen: so lässt sich aus diesen Daten die Verflächung der Lagerstätte berechnen. Denn stellt in Fig. 436 AC die Lagerstattebene, BF die

Fig. 436.



Horizontalebene und AB den horizontalen Schnitt beider vor; zieht man ferner in AC die Linie ab und in BF die ab' senkrecht zu AB und bb' senkrecht auf ab', so dass abb' ein rechtwinkeliges Dreieck und bab' $= \alpha$ der Fallwinkel der Lagerstattebene wird; projicirt man endlich die Linie ac horizontal = ac', vertikal = cc' und in der Ebene AC = ab und setzt den Neigungswinkel cac' $= \beta$, cab $= \gamma$, c'ab' $= \delta$: so finden zwischen den Winkeln α, β, γ, δ folgende leicht zu beweisende Beziehungen statt:

$$\sin\beta = \sin\alpha \cdot \sin\gamma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (426)$$

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\delta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (427)$$

Ist nun der Neigungswinkel β der Linie ac und der Winkel δ der Fallebene abb' gegen die projicirende Ebene acc' der Linie ac bekannt, so findet man den Fallwinkel α aus der Gleichung (427). Nun wurde aber β direkt gemessen und δ ergibt sich aus den beobachteten Streichen der Horizontalen AB und der Linie ac; denn ist σ das Streichen der söhligen Linie AB, so ist das Kreuzstreichen σ' der Falllinie ab oder ihrer Projection ab' nach Gleichung (425)

$= \sigma - 90^0$, und wenn man dieses von dem beobachteten Streichen σ'' der Linie ac oder ihrer Projection ac' abzieht, so findet man

$$\delta = 90^0 + \sigma'' - \sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (428)$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung (427) und berücksichtigt, dass

$$\cos(90^0 + \sigma'' - \sigma) = \sin(\sigma'' - \sigma''),$$

so erhält man den gesuchten Fallwinkel α aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin(\sigma - \sigma'')}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (429)$$

in welcher nur die direkt gemessenen Grössen σ, σ'', β vorkommen.

C. Von den Markscheidezügen.

§. 367.

Gleichwie der Geometer die Vermessung eines Flurbezirks an ein vorher aufgenommenes Polygon anknüpft, also schliesst auch der Markscheider die Detailaufnahme eines grösseren Grubengebäudes an eine Reihe unter sich verbundener gerader Linien oder an ein Polygon an, das er nach Erforderniss entweder auf der Erdoberfläche oder durch unterirdische Räume zieht. Ein solches Polygon nennt er einen Markscheidezug; liegt es unter der Erdoberfläche, so heisst der Zug ein Grubenzug, ausserdem aber ein Tagezug. In den meisten Fällen wird der Grubenzug mit dem Tagezug so in Verbindung gebracht, dass man die gegenseitige Lage der über und unter Tage liegenden aufgenommenen Punkte bestimmen kann.

Aeltere Markscheider verrichten auch die Tagezüge mit Schnur und Compass; dieses Verfahren kann jedoch wegen seiner Ungenauigkeit und Umständlichkeit nicht gebilligt werden. Indem wir voraussetzen, dass man die Horizontalprojection eines Tagezugs mit dem Messtische oder Theodolithen und die Vertikalprojection desselben mit dem Nivellirinstrument nach Anleitung der Abschnitte I und II aufzunehmen wisse, nehmen wir hier von den Tagezügen nichts weiter als ihre Verbindung mit den Grubenzügen auf. Letztere allein beschäftigen uns, und in der Regel unter der Voraussetzung so enger Grubenräume, dass die Anwendung von Schnur und Compass gerechtfertigt erscheint.

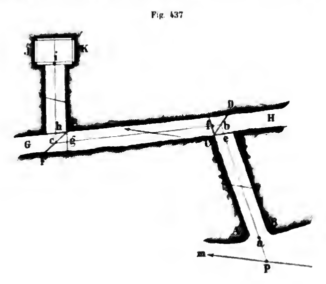
§. 368.

Aufgabe. Einen Markscheidezug in Strecken von geringer Neigung vorzunehmen und zu berechnen.

Aus denselben Gründen, warum es für die Aufnahme eines Flurbezirks nothwendig ist, dass sich der Geometer erst eine Kenntniss des aufzunehmenden Terrains verschaffe und dieses in einer Handzeichnung darstelle, muss sich auch der Markscheider vor der Ausführung eines Markscheidezugs über alle Verhältnisse der Grube unterrichten und eine vorläufige Zeichnung der letzteren entwerfen. Auf dieser Zeichnung hat er zugleich alles zu bemerken, was zur Aufnahme gehört, wie z. B. an welcher Stelle ein Gestein, eine Mauerung oder Zimmerung anfängt und aufhört, wo sich eine Gesteinscheide, eine wasserführende Kluft befindet, wo Querschläge, Flügelörter, Gesenke etc. von der Strecke abgehen u. s. w. Damit er aber namentlich die geognostischen Verhältnisse einer Strecke richtig erkennen kann, ist es nöthig, dass diese vor dem Beginne der Aufnahme frisch „bestuft" oder entblösst werde. Die vorliegende Aufgabe kann unter zwei Voraussetzungen gelöst werden; es sind nämlich die Räumlichkeiten entweder so beschränkt, dass nur Compass und Gradbogen anwendbar sind, oder sie sind so gross, dass man Theodolith und Nivellirinstrument gebrauchen kann.

1. Lösung der Aufgabe mit Compass und Gradbogen. Stellt die Fig. 437 den Grundriss der aufzunehmenden Strecken vor, die wir uns der Einfachheit halber sehr kurz denken, so wird man zunächst vor dem Stollenmundloche AB einen Pfahl p in den

Fig. 437



Boden schlagen und auf ihm und der Spreize CD eine Schnur ab so ziehen, dass sie (wie in Fig. 438) über den Fixstein a in einer Höhe von 3 bis 4 Fuss weggeht. Ferner wird man, um die Neigung der Sohle des Stollens zu erhalten, auf der Grundschwelle CL einen Sohlnagel e lothrecht unter der Schnur ab befestigen. Weiter zieht man alsdann die Schnur bc mittels der auf den Spreizen CD und Ef befestigten Schrauben und schlägt in der Vertikalebene dieser Schnur die Nägel f und g in zwei Sohlschwellen der Strecke GH ein. Endlich zieht man die Schnur cd, wobei d eine in der Zimmerung des Schachtes IK befestigte Schraube vorstellt, und h und i wieder Sohlnägel sind.

Ist die Messung in dieser Weise vorbereitet, so misst man bei a (nach Fig. 438) die Seigerhöhe aa' von a bis zur Schnur und die horizontalen und senkrechten Abstände der Seitenwände A, B von der Schnur ab. Die Linie aa' erscheint als die Schnur Nr. 1 mit einem Tonnlagewinkel von 90° und einem Streichen = 0. Die Schnur Nr. 2 umfasst die Länge ae: auf dieser wird der Tonnlage- und Streichwinkel nebst ihrer Länge gemessen. An dem Punkte e, dessen Höhe die Schnur Nr. 3 vorstellt, wird wie bei a verfahren. Die vierte Schnur besteht aus der Linie eb; von dieser ist das Streichen und die Neigung schon aus der Schnur Nr. 2 bekannt; es bleibt also nur noch die Länge eb zu messen. In ähnlicher Weise verfährt man längs der Geraden bc und cd. Die Messungsresultate werden in das sogenannte Zugbuch (d. i. ein in Leder gebundenes Notizbuch von der Grösse eines Achtelbogens Schreibpapier) nach einem bestimmten Formulare, z. B. dem folgenden (A) eingeschrieben und zu Hause weiter verarbeitet.

Fig. 438

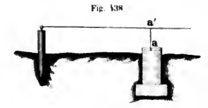


Tabelle A.

Schnur.	Tonnlagewinkel.		Steigen: + Fallen: —	Schnur-mass.	Streichwinkel.		Anmerkungen.
Nr.	Grad.	Min.		Lachter.	Grad.	Min	
1	90	0	+	0,472	—	—	Vom Fixstein a bis zur Schnur ab: Aa = 0,32; aB = 0,28 Lachter.
2	2	30	+	7,218	65	10	
3	90	0	—	0,367	—	—	Vom Sohlnagel e bis zur Schnur ab: Ce = 0,27; eL = 0,33 Lachter.
4	2	30	+	0,741	65	10	
5	3	55	—	0,812	335	30	
6	90	0	—	0,278	—	—	Vom Sohlnagel f bis zur Schnur bc; Ef = 2,45 Lachter.
7	3	55	—	6,410	335	30	
8	90	0	—	0,325	—	—	Vom Sohlnagel g bis zur Schnur bc: Eg = 0,30 Lachter.
9	3	55	+	1,015	335	30	
10	4	25	+	0,874	82	45	
11	90	0	—	0,288	—	—	Vom Sohlnagel h bis zur Schnur cd; Eh = 0,28 Lachter.
12	4	25	+	3,421	82	45	
13	90	0	—	0,327	—	—	Bis zur vordern Grundschwelle des Schachtes IK.
14	4	25	+	1,250	82	45	
15	90	0	—	0,320	—	—	Bis zur hintern Grundschwelle desselben Schachtes.
							Mit dem Compass Nr 2, dessen Abweichung 15° 20' betrug, aufgenommen am .. durch N. N.

Nachdem alle Messungen gemacht sind, werden deren Ergebnisse nebst den daraus berechneten Grössen mit Tinte in das Schinbuch (welches die Grösse eines ganzen Bogens Schreibpapier hat) nach dem Formulare B eingetragen. Zu berechnen sind alle diejenigen Stücke des Zugs, welche zur Darstellung des Grubengebäudes nöthig sind, aber sich nicht unmittelbar aus dem Zugbuche ergeben. Hieher gehören: die Reduction der Schnurlängen auf den Horizont (Berechnung der Ebensohlen), das Berechnen der absoluten Steigungen und Gefälle (Seigerhöhen), das Reduciren des beobachteten Streichens, die Berechnung der Coordinaten aller Zugpunkte in Bezug auf die Mittagslinie. Bezeichnet

l die Länge der flachen Schnur,

τ deren Neigungs- oder Tonnlagewinkel,

σ den reducirten Streichwinkel der Schnur,

ς die Horizontalprojection oder Ebensohle der Schnur l,

z die Vertikalprojection oder Seigerhöhe derselben,

x die Projection der Ebensohle auf die Mittagslinie (Breite, Streichungscosinus der Linie l),

y die Projection der Ebensohle auf das Perpendikel zur Mittagslinie (Länge, Streichungssinus der Linie l):

so gelten folgende von selbst verständliche Beziehungen:

$$s = l \cos \tau \quad \ldots \ldots \ldots \quad (430)$$

$$z = \pm l \sin \tau \quad \ldots \ldots \ldots \quad (431)$$

$$x = s \cos \sigma \quad \ldots \ldots \ldots \quad (432)$$

$$y = s \sin \sigma \quad \ldots \ldots \ldots \quad (433)$$

Da der Winkel σ von 0 bis 360° gezählt wird, so ergeben sich die Zeichen von x und y aus der Grösse dieses Winkels.

Vorstehende Ausdrücke beziehen sich immer nur auf eine einzige Schnur; will man aber die gegenseitige Lage aller Punkte besser übersehen, so legt man durch den Anfangspunkt der Messung drei rechtwinkelige Coordinatenaxen, welche beziehlich horizontal und vertikal sind und wobei die Axe der x durch die Mittagslinie des Anfangspunktes, die der y durch das Perpendikel zur Mittagslinie in dem Anfangspunkte, und die der z durch das Loth auf die Ebene xy im Anfangspunkte vorgestellt wird.

Demnach wird für irgend einen (den n^{ten}) Punkt:

$$X = s_1 \cos \sigma_1 + s_2 \cos \sigma_2 + s_3 \cos \sigma_3 + \ldots + s_n \cos \sigma_n \quad (434)$$

$$Y = s_1 \sin \sigma_1 + s_2 \sin \sigma_2 + s_3 \sin \sigma_3 + \ldots + s_n \sin \sigma_n \quad (435)$$

$$Z = l_1 \sin \tau_1 + l_2 \sin \tau_2 + l_3 \sin \tau_3 + \ldots + s_n \sin \tau_n \quad (436)$$

Denkt man sich unter n den letzten Punkt des Markscheidezugs, so stellt X dessen Hauptbreite oder den Hauptstreichungscosinus, Y die Hauptlänge oder den Hauptstreichungssinus und Z die Haupthöhe oder den Hauptsummenrest der Seigerhöhen, d. i. das Gesammtgefälle oder die Gesammtsteigung zwischen Anfangs- und Endpunkt vor, während der aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} \Sigma = \frac{y}{x} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (437)$$

berechnete Winkel Σ den Hauptstreichungswinkel des ganzen Zugs bezeichnet.

Nach diesen Erklärungen wird die folgende auf Fig. 437 sich beziehende Tabelle B durch specielle Berechnung einiger Nummern hinreichend erläutert seyn.

Nr. 1. Der Ursprung der Coordinaten liegt im Anfangspunkte

a der ersten Schnur, welche lothrecht genommen wurde und daher weder Ebensohle noch Streichen, weder Länge noch Breite hat.

Nr. 2. Die Seigerhöhe ist $= 7{,}218 \sin 2^0\,30' = 0{,}337$; die Ebensohle $= 7{,}218 \cos 2^0\,30' = 7{,}212$; die Breite $X = 7{,}212 \cos 65^0\,10' = 2{,}952$; die Länge $Y = 7{,}212 \sin 65^0\,10'$; die Höhe $Z = 0{,}472 + 0{,}337 = 0{,}809$.

Nr. 3. Eine Lothlinie hat kein Streichen und keine Ebensohle; es gilt folglich für ihren Fusspunkt die Länge und Breite ihres Kopfes; die Höhe Z aber ist, da der Zug abwärts geht, gleich $= 0{,}809 - 0{,}367 = 0{,}442$.

Nr. 4. Die Seigerhöhe über den Endpunkt von Nr. 2 ist $= 0{,}741 \sin 2^0\,30' = 0{,}032$; die Ebensohle $= 0{,}741 \cos 2^0\,30' = 0{,}740$; die Breite $X = 2{,}952 + 0{,}74 \cos 65^0\,10' = 3{,}255$; die Länge $Y = 6{,}544 + 0{,}74 \sin 65^0\,10' = 7{,}216$; die Höhe $Z = 0{,}809 + 0{,}032 = 0{,}841$.

Nr. 5. Die Breite X ist $= 3{,}255 + 0{,}81 \cos 335^0\,30' = 3{,}255 + 0{,}737 = 3{,}992$; die Länge $Y = 7{,}216 + 0{,}81 \sin 335^0\,30' = 7{,}216 - 0{,}336 = 6{,}880$.

Nr. 15. Die Hauptbreite des ganzen Zugs ist $= 10{,}907$; die Hauptlänge $= 9{,}530$; die Haupthöhe $= 0{,}522$; der Hauptstreichwinkel Σ, welcher sich aus der Gleichung $10{,}907 \operatorname{tg} \Sigma = 9{,}530$ ergibt, $= 41^0\,8'$.

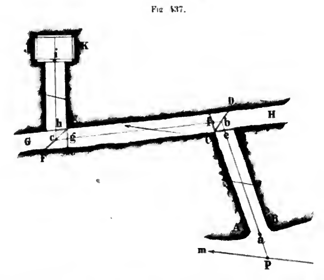
Tabelle B.

Schnur.	Schnur-mass.	Steigen + Fallen −	Tonnlage-winkel.		Streich-winkel.		Seiger-höhe.	Eben-sohle.	Breite X.	Länge Y.	Höhe Z.	Bemerkungen.
Nr.	Lachter.	±	Grad.	Min.	Grad.	Min.	Lachter.	Lachter.	Lachter.	Lachter.	Lachter.	
1	0,472	+	90	—	—	—	+0,472	0	0	0	0,472	Anfangspunkt am Stollenmundloche.
2	7,218	+	2	30	65	10	+0,337	7,212	2,952	6,544	0,809	
3	0,367	—	90	—	—	—	−0,367	0	2,952	6,544	(0,442)	Fusspkt der Schnur Nr. 3.
4	0,741	+	2	30	65	10	+0,032	0,740	3,255	7,216	0,841	
5	0,812	—	3	55	335	30	−0,055	0,810	3,992	6,880	0,786	
6	0,278	—	90	—	—	—	−0,278	0	3,992	6,880	(0.508)	Fusspkt der Schnur Nr. 6.
7	6,410	—	3	55	335	30	−0,438	5,833	9,300	4.461	0,348	
8	0,325	—	90	—	—	—	−0,325	0	9.300	4,461	(0,023)	Fusspkt der Schnur Nr. 8.
9	1,015	+	3	55	335	30	+0,068	1,014	10,210	4,046	0,416	
10	0,874	+	4	25	82	45	+0,067	0,871	10,320	4,910	0,483	
11	0,288	—	90	—	—	—	−0,288	0	10,320	4,910	(0,195)	Fusspkt der Schnur Nr. 10.

Lachter.	Schnurmass.	Steigen + Fallen −	Tonnlagewinkel.		Streichwinkel.		Seigerhöhe.	Ebensohle.	Breite X.	Länge Y.	Höhe. Z.	Bemerkungen.
Nr.	Lachter.	+ −	Grad.	Min.	Grad.	Min.	Lachter.	Lachter.	Lachter.	Lachter.	Lachter.	
12	3.421	+	4	25	82	45	+0,263	3.411	10,750	8,294	0,746	
13	0,327	−	90	—	—	—	−0,327	0	10,750	8,294	(0,419)	Fusspkt der Schnur Nr. 13.
14	1,250	+	4	25	82	45	+0.096	1.246	10,907	9.530	0.842	
15	0,320	−	90	—	—	—	−0,320	0	10,907	9.530	(0.522)	Endpunkt an der hintern Grundschwelle des Josephschachts; zugleich Fusspunkt der Schnur Nr. 15.

2. **Lösung der Aufgabe mit dem Theodolithen und Nivellirinstrument.** Mit Bezug auf Fig. 437 wird man zuerst den Theodolithen in b aufstellen und nach einander zwei in a und c angebrachte Signale, wovon a ein Tagsignal ist, anvisiren, um den

Fig. 437.



Horizontalwinkel abc zu erhalten. Hat man sonst kein Mittel, das Polygon abci zu orientiren, so misst man mit dem auf dem Grubentheodolithen befestigten Compass auch den Streichwinkel der Linie bc, womit auch die Lage des Schenkels ab gegen die Mittagslinie bestimmt ist. Ebenso misst man, nachdem vorher in h und i Grubensignale

aufgestellt wurden, in dem Punkte c den Horizontalwinkel bci und nochmals das Streichen der Linie cb. Mit dem Winkel bci ist alsdann auch das Streichen der Linie ci bekannt. Wäre über Tage, etwa in dem Punkte p, die Richtung der Mittagslinie pm gegeben, so dürfte man nur in p den Horizontalwinkel mpb messen, um damit auch die Neigung aller Polygonseiten ab, bc, ci gegen die Mittagslinie zu finden. Die horizontalen Entfernungen ae, ab, bf, bg, bc ... werden mit der Lachterkette oder dem Lachterstabe bestimmt, welche man am zweckmässigsten auf Dachlatten, die in den Richtungen des Zugs liegen, abzieht oder abschiebt. Ist auf die angegebene Weise die Horizontalprojection des Markscheidezugs festgestellt, so nimmt man die Vertikalprojection desselben entweder mittels des früher erwähnten Setzniveaus oder auch mit einem gewöhnlichen Nivellirinstrumente auf. Die Handhabung des Setzniveaus ergibt sich aus §. 363, und was das Nivelliren betrifft, so unterscheidet sich dasselbe vom Nivelliren über Tage gar nicht und ist darüber lediglich zu bemerken, dass man wegen der Finsterniss in den Grubenräumen, welche das Ablesen durch das Fernrohr verbietet, statt der Reichenbach'schen Nivellirlatte eine Schieblatte anwendet, deren Zieltafel in der Mitte eine horizontale, von hinten erleuchtete Spalte (hf, Fig. 206) hat, die in die Visirlinie eingestellt wird.

Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass, wenn einmal nach den Seiten ab, bc, cd Latten gelegt sind, die Horizontalabstände der Punkte e, b, f am kürzesten mittelbar aus den schiefen Entfernungen und den mit dem Setzniveau gemessenen vertikalen Neigungswinkeln bestimmt werden, und dass die Aufzeichnungen in dem Zug- und Schinbuche nur zum Theil nach den Tabellen A und B geschehen können und eines anderen leicht zu findenden Schema's bedürfen.

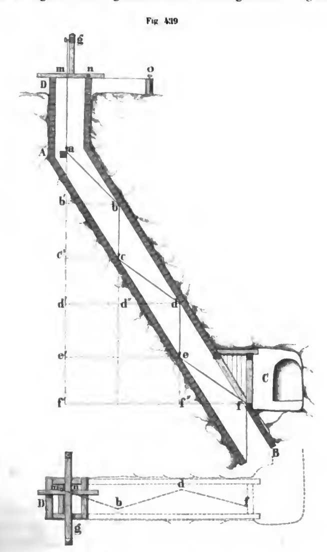
§. 369.

Aufgabe. Einen Markscheidezug in einem Schachte und einer Strecke von starker Neigung vorzunehmen und zu berechnen.

In sehr stark geneigten Strecken, wie Fig. 439 zwischen A und B eine vorstellt, lässt man stets eine flache Schnur mit einer seigeren abwechseln. Die erste Schnur geht hier von einem in dem

Balken g des Schachthauses befestigten Senkeleisen aus und reicht bis zu der Stelle a, wo die geneigte Strecke beginnt: sie wird nach §. 362 behandelt. Von a aus zieht man die zweite Schnur ab an das Hangende, misst sie nach §. 361 aus und bestimmt nach §. 364 ihren Streich- und Tonnlagewinkel. Hat man ferner den Punkt b auf das Liegende bei c gesenkelt und die Seigerhöhe bc gemessen,

Fig. 439



so verfährt man mit der Schnur cd wie mit ab; senkelt dann d nach e, misst de, und zieht endlich ef bis zur Grundschwelle f der Strecke c, worauf man wieder die Länge, das Streichen und die Tonnlage von ef misst. Reicht die Strecke AB noch weiter hinab, so wiederholt sich das oben angedeutete Verfahren so oft, bis die tiefste Stelle der Strecke erreicht ist.

Die Aufzeichnungen des in Rede stehenden Zugs geschehen nach dem Schema A, die Berechnungen nach den Formeln Nr. 430 bis Nr. 437 und die Einschreibungen in das Schinbuch nach dem Schema B, Seite 353. Man wird hiernach leicht im Stande seyn, die gesammte Tiefe des Schachtes AD und der Strecke $AB = mf' = ma + ab' + b'e' + e'd' + d'e' + e'f'$, sowie den Horizontalabstand der Punkte m und $f = ff' = bb' + dd'' + ff''$ anzugeben und, wenn auch die Abstände der Ulmen von den Schnüren gemessen und aufgezeichnet wurden, den Grund- und Aufriss des Schachtes und der Strecke AB zu zeichnen.

Bei starken Neigungen der Schnur muss dafür gesorgt werden, dass der Compass und der Gradbogen nicht rutschen. Dieses Rutschen wird aber entweder durch die in §. 171 beschriebenen Zwingen (Fig. 181), welche von Messing seyn müssen, damit sie nicht auf die Magnetnadel wirken, oder durch ganz einfache hölzerne Kluppen (Fig. 440), welche etwa 3 Zoll lang, $\frac{1}{2}$ Zoll breit und $\frac{1}{4}$ Zoll dick und so weit ausgeschlitzt sind, dass sie auf die Schnur gezwängt werden können, verhindert.

Fig. 440



§. 370.

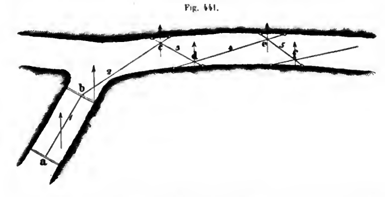
Aufgabe. Einen Markscheidezug in solchen Gruben vorzunehmen, wo die Magnetnadel abgelenkt wird.

Gestatten es die Räumlichkeiten, so nimmt man den Zug mit dem Grubentheodolithen oder Messtische vor und setzt die Aufnahme nach einer oder zwei Richtungen so weit fort, dass schliesslich eine Orientirung gegen die Mittagslinie stattfinden kann. Muss aber wegen beschränkten Raumes mit dem Hängecompass gearbeitet werden, so bedient man sich am zweckmässigsten des von Rittinger empfohlenen Verfahrens, durch welches die aus der Abweichung der Magnetnadel entspringenden Fehler eliminirt werden.

Dieses Verfahren beruht auf der richtigen Voraussetzung, dass die Ablenkung der Magnetnadel an ein und derselben Stelle während der Messung des Winkels zweier Richtungen sich nicht ändert, und besteht demzufolge darin, dass man zwei an den Scheiteln der Winkel sich kreuzende Schnüre zieht, an den Kreuzungspunkten die (um die Ablenkung δ falschen) Streichwinkel jeder Schnur abnimmt, und den Zug so weit fortsetzt, bis wenigstens eine Schnur ausserhalb des Bereichs der magnetischen Ablenkung kommt.

In Fig. 441 stelle **ab** diese Schnur vor, während die übrigen in einer Strecke liegen, die magnetische Ablenkungen veranlasst. An der Schnur **ab** wird nun die Länge, die Tonnlage und das Streichen, an allen übrigen Schnüren bc, cd, de aber nur die Länge

Fig. 441.



und Tonnlage auf bekannte Weise gemessen. Die Horizontalwinkel **bcd**, **cde**, **def**... ergeben sich dadurch, dass man den Compass in dem Punkte c zuerst an die Schnur bc und dann an die Schnur cd, in dem Punkte d zuerst an die Schnur cd und hierauf an de, in dem Punkte e zuerst an ed und hierauf an ef hängt und jedesmal den Stand der Nadel abliest. Sind nun die Ablesungen in c um die Grösse δ falsch, so gibt ihre Differenz doch den richtigen Winkel **bcd**, weil **jede** Ablesung um δ falsch ist; beträgt die Ablenkung in d den Winkel δ', so erhält man aus den beiden Ablesungen in d, indem man sie in der rechten Weise subtrahirt, doch den richtigen Winkel **cde**; und ebenso findet man **def** und alle übrigen Horizontalwinkel des Zugs.

Ueber die praktische Ausführung dieser Art des Verziehens ist zu bemerken, dass die Kreuzung der Schnüre nicht unter zu stumpfen

Winkeln erfolgen soll, wesshalb man gerne zwischen zwei längere Schnüre eine kürzere (wie ed zwischen bc und de, ef zwischen ed und fg) einschaltet; ferner dass die kreuzenden Schnüre, nachdem sie angespannt sind, an der Kreuzungsstelle sich gerade berühren und der Sicherheit wegen daselbst mit Bindfaden verbunden werden sollen; ferner dass der Drehpunkt der Magnetnadel bei den zwei Lagen des Compasses lothrecht unter dem Kreuzungspunkt sich befinden soll; und dass endlich bei den Aufschreibungen im Zugbuche angemerkt werden muss, ob die folgende Schnur von der vorhergehenden sich rechts oder links abwendet, wenn man sich in den Winkel gestellt und auf den Scheitel blickend denkt. Das Schema der Aufschreibung kann mit Bezug auf die Fig. 441 etwa folgendes seyn.

Tabelle C.

Schnur Nr.	Wendung der Schnur.	Abgelesenes Streichen der Schnur.		Aeusserer Vielecks-winkel.	Wahres Streichen gegen die		Bemerkungen.
		vorangehenden	nachfolgenden		Magnetlinie.	Mittagslinie.	
1			30° 40′		30° 40′	15° 15′	Orientirungslinie.
2	rechts	30° 40′	65° 15′	34° 35′	65° 15′	49° 50′	Bei b noch keine Ablenkung bemerkbar.
3	rechts	66° 30′	115° 50′	49° 20′	114° 35′	99° 10′	
4	links	115° 25′	45° 10′	70° 15′	44° 20′	28° 55′	
5	rechts	45° 10′	138° 35′	93° 25′	137° 45′	122° 20′	

Mit dem Compass Nr. 3, dessen westliche Abweichung 15° 25′ betrug, aufgenommen am .... durch N. N.

Zur Erläuterung dieser Aufschreibung fügen wir noch folgende Anmerkungen bei:

1) Würden die Ablenkungen der Magnetnadel an allen Stellen gleich seyn, so müssten die abgelesenen vorangehenden und nachfolgenden Streichwinkel einer jeden Schnur gleich seyn, was sie hier nicht sind.

2) Der äussere Vieleckswinkel, durch Verlängerung der vorhergehenden Schnur entstehend, wird durch Subtraction der beiden Ablesungen erhalten, wenn, wie hier geschehen, bei der Aufhängung des Compasses der Nullpunkt des Gradrings immer vor dem Winkelscheitel, also bei e z. B. gegen b und den linken Anfangspunkt der Schnur Nr. 3 liegt.

3) Das wahre Streichen gegen die Magnetlinie ergibt sich aus

dem wahren Streichen der Orientirungslinie a b und den Polygonwinkeln, indem man bei rechtseitigen Wendungen der Schnur die äusseren Polygonwinkel zu dem Streichen der vorhergehenden Schnur addirt, bei linkseitigen Wendungen aber subtrahirt.

4) Zieht man endlich von dem Streichen gegen die Magnetlinie die westliche Declination der Magnetnadel von 15° 25′ ab, so ergibt sich schliesslich das wahre Streichen gegen die Mittagslinie. Alle übrigen Aufzeichnungen können nach dem Schema A geschehen.

Ausser dem eben beschriebenen Verfahren lässt sich auch noch ein anderes anwenden, welches darin besteht, dass man durch die ganze Strecke zusammenhängende Schnurdreiecke bildet, deren drei Seiten und Tonnlagewinkel misst, und dieses Dreiecknetz an eine bereits orientirte Seite anschliesst. Diese Operation ist aber umständlicher und auch weniger genau als die vorhergehende, da sich sehr spitze und sehr stumpfe Dreieckwinkel nicht vermeiden lassen, ohne eine grosse Anzahl von kleinen Dreiecken. Sie findet daher wenig Anwendung. Dasselbe gilt auch von dem Verziehen mit der Eisenscheibe, welche ein unbehilfliches Ersatzmittel für den Grubentheodolithen ist.

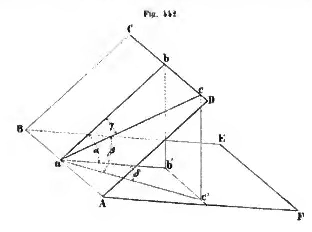
D. Markscheide-Aufgaben.

§. 371.

Aufgabe. Aus dem bekannten Fallen einer Lagerstätte die Richtung einer Strecke von bestimmter Steigung, welche darauf getrieben werden soll, anzugeben.

Es sey A C in Fig. 442 die Lagerstattebene, A E eine Horizontal-

Fig. 442



ebene, ab die Falllinie, ab' deren Ebensohle, ac die gesuchte Streckenrichtung und ac' ihre horizontale Projection. Beobachtet sey der Fallwinkel bab' $= \alpha$ und gegeben die Steigung der Strecke ac $= \beta$; gesucht wird entweder der Winkel bac $= \gamma$, welchen die Strecke mit der Falllinie bildet, oder dessen horizontale Projection b'ac' $= \delta$.

Die Lösung der vorstehenden Aufgabe ist bereits durch die Gleichungen (426) und (427), welche mit Bezug auf die vorstehende Figur entwickelt wurden, gegeben; denn man erhält aus der ersteren

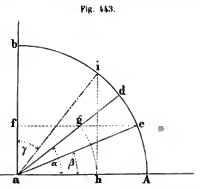
$$\sin\gamma = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

und aus der letzteren

$$\cos\delta = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Will man den Winkel γ durch Construction finden, so zeichne man nach Fig. 443 einen rechten Winkel Aab, in welchem ab die Fallinie und aA die Streichlinie vorstellt. Ueber denselben beschreibe man mit einem beliebigen Halbmesser ab $=$ r einen Viertelkreis und trage an den Schenkel aA den Winkel $\alpha =$ Aad und $\beta =$ Aae an. Fällt man von dem Punkte e aus die Senkrechte ef auf ab, beschreibt mit ag den Kreisbogen gh, macht hi senkrecht zu aA und zieht schliesslich die Gerade ia: so stellt iab den gesuchten Winkel γ vor. Denn es ist nach der Construction

Fig. 443.



$$\text{af} = \text{ae}\cdot\sin\beta = \text{ag}\cdot\sin\alpha = \text{ah}\cdot\sin\alpha$$

und folglich

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\text{ah}}{\text{ae}} = \frac{\text{ah}}{\text{r}}.$$

Ferner ist der Winkel bai $=$ aih und nach der Figur

$$\sin(\text{aih}) = \frac{\text{ah}}{\text{ae}} = \frac{\text{ah}}{\text{r}}.$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \sin (a i h) = \sin (i a b);$$

da aber das Verhältniss von $\sin \beta : \sin \alpha = \sin \gamma$ ist, so muss nothwendig $i a b = \gamma$ seyn.

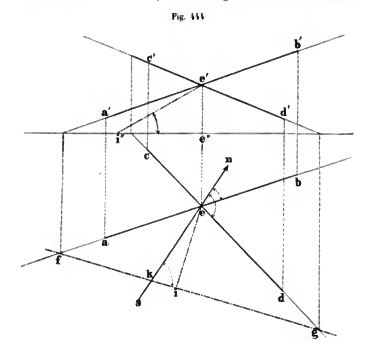
§. 372.

Aufgabe. Von zwei in einer Lagerstattebene sich kreuzenden Strecken kennt man die horizontalen und vertikalen Projectionen: es soll hieraus das Streichen und Fallen der Lagerstattebene abgeleitet werden.

Reicht zur Bestimmung des Streichens und Fallens die Zeichnung aus, so suche man zunächst die Schnittlinie der durch die Strecken gegebenen Lagerebene mit der horizontalen Projectionsebene und ziehe darauf die bekannte Richtung der Mittagslinie, so ist der Streichwinkel gefunden, da jene Schnittlinie die Streichlinie ist. Alsdann lege man durch den Schnittpunkt der Strecken eine Senkrechte zur Streichlinie und bestimme deren Neigungswinkel mit der horizontalen Projectionsebene: so ist dieses der gesuchte Fallwinkel.

Sind ab, a′b′ und cd, c′d′ in Fig. 444 die horizontalen und

Fig. 444



vertikalen Projectionen der in dem Punkte e, e' sich schneidenden geraden Strecken AB, CD, so findet man auf bekannte Weise die horizontalen Durchgänge f und g der Geraden AB und CD; daher die Streichlinie = fg. Stellt sn die Mittagslinie vor und verlängert man dieselbe bis zu fg, so ist, wie man leicht sieht, der erhabene Winkel fke dem gesuchten Streichwinkel gleich.

Zieht man weiter ei senkrecht zu fg, macht e'' i'' = ei und verbindet e' mit i'', so ist e'i''e'' der gesuchte Fallwinkel.

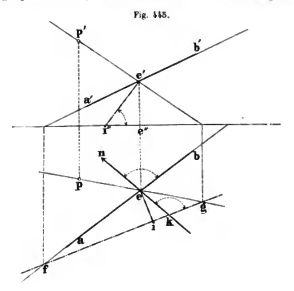
Wer mit den Rechnungen der analytischen Geometrie vertraut ist, wird hiernach die beiden gesuchten Winkel auch berechnen können; wer es aber nicht ist, dem nützt auch eine Ableitung dieser Winkel nichts. Wir übergehen daher die Bestimmung des Fallens und Streichens durch Rechnung um so mehr, als in den meisten praktischen Fällen der vorliegenden Art die Construction allein ausreicht.

§. 373.

Aufgabe. Von einer Lagerstattebene sind eine gerade Strecke und ein Punkt durch ihre Projectionen gegeben: man soll das Streichen und Fallen dieser Lagerstätte bestimmen.

Die Lösung dieser Aufgabe führt sofort auf die des vorhergehenden Paragraphs zurück, wenn man sich durch den gegebenen Punkt

Fig. 445.



p, p' (Fig. 445) eine Gerade pe, p'e' gelegt denkt, welche die gegebene Strecke ab, a'b' unter einem beliebigen Winkel schneidet. Man findet alsdann die Streichlinie fg aus den Horizontaldurchgängen f, g der Linien ab, a'b' und pe, p'e' und damit den Streichwinkel gke, wenn ek die Richtung der Mittagslinie ist. Ebenso erhält man aus der Senkrechten ei und dem Abstande ee'', indem man das rechtwinkelige Dreieck e'e''i'' construirt, den gesuchten Fallwinkel = e'i''e''.

Hinsichtlich der Berechnung des Fallens und Streichens, welche auch an die Stelle der Construction treten kann, gilt die Schlussbemerkung des vorhergehenden Paragraphs.

§. 374.

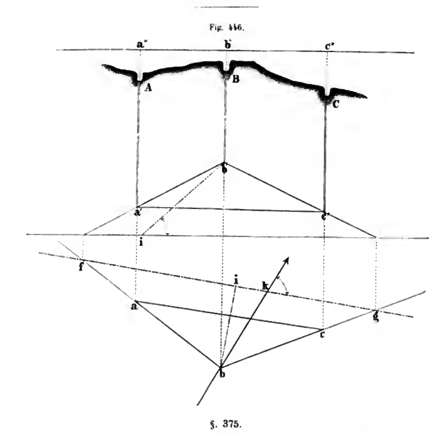
Aufgabe. Aus drei ihrer gegenseitigen Lage nach bekannten Punkten einer Lagerstätte deren Streichen und Fallen zu bestimmen.

Es kommt im praktischen Bergbaue sehr oft vor, dass man eine Lagerstätte bloss aus drei Bohrlöchern, welche bis zu derselben hinabführen, zu bestimmen hat.

Soll diese Bestimmung möglich seyn, so muss man die Coordinaten der Fusspunkte jener drei Bohrlöcher gegen drei Axen kennen, wovon eine lothrecht steht und zwei horizontal sind, und von denen wiederum eine mit der Mittagslinie parallel läuft; oder mit andern Worten: es müssen die horizontalen und vertikalen Projectionen jener drei Punkte und die Richtung der Mittagslinie bekannt seyn.

Sind A, B, C die drei Stellen, von denen aus die Bohrlöcher abgeteuft werden, so hat man erstens die horizontale Projection abc des Dreiecks ABC und die Neigung einer Seite desselben gegen die Mittagslinie auf bekannte Weise zu bestimmen, zweitens die drei Punkte A, B, C in Bezug auf eine beliebige Horizontalebene einzunivelliren, und drittens die Tiefen Aa', Bb', Cc' an den Erdbohrern abzunehmen, ehe zur Bestimmung des Streichens und Fallens der Lagerstätte geschritten werden kann. Kennt man aber diese Daten, so lässt sich die Aufgabe auf constructivem Wege nach §. 372 lösen, da durch die Projectionen a, b, c und a', b', c' dreier in der Lagerstätte liegender Punkte auch drei Paar sich kreuzender Richtungen gegeben sind.

Fig. 446.

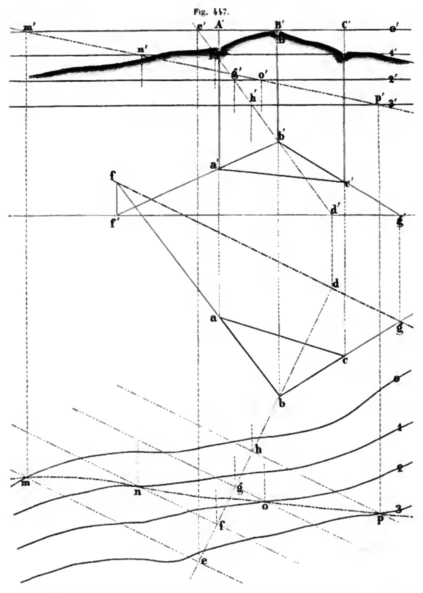


§. 375.

Aufgabe. Das Ausbeissen einer Lagerstätte über Tage zu bestimmen, wenn deren Streichen und Fallen aus drei Bohrlöchern bekannt ist.

Es seyen in Fig. 447 A, B, C die drei Bohrlöcher und a, a', b, b' und c, c' die Projectionen ihrer Fusspunkte; fg, f'g' stelle die gegebene Streichlinie und bd, b'd' die zu fg senkrechte Falllinie vor; und 0, 0', 1, 1', 2, 2', 3, 3' . . . . seyen die Projectionen der Schnitte der Terrainoberfläche durch horizontale Ebenen, welche gleichweit (etwa 10') von einander abstehen: die Aufgabe ist, die Linie mnop, m'n'o'p' zu suchen, nach welcher das Lager zu Tage ausgeht. Verlängert man die Falllinie bis zur obersten Horizontalebene, so werden diese und alle übrigen Horizontalebenen von ihr geschnitten. Zieht man nun in dieser Ebene durch die Schnittpunkte parallele Gerade zur Streichlinie, so liegen diese gleichzeitig auch in

Fig. 447.

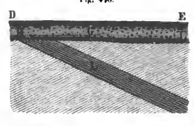


der Lagerebene und stellen deren Horizontalschnitte vor. Jeder solche gerade Schnitt wird, hinreichend erweitert, die seiner Ebene angehörende Horizontalcurve der Terrainfläche treffen, und jeder solche Durchgang ist ein Punkt der gesuchten Ausbeissungslinie.

Um die Zeichnung nach dieser Anleitung auszuführen, verlängere man die Vertikalprojection b'd' bis e' und bestimme die Horizontalprojection e des Punktes e, e'. Durch e ziehe man em parallel zu fg bis die Horizontalcurve o in m getroffen wird, so ist m, m' ein Ausbeisspunkt. Ebenso suche man zu dem Schnittpunkte h' die Horizontalprojection h, lege durch h die Parallele hp zu fg und verlängere sie, bis die Horizontalcurve 3 von ihr geschnitten wird, so ist p, p' abermals ein Punkt der Ausbeissungslinie. Zwischen e' und h' liegen die Schnittpunkte f', g' in gleichen Entfernungen: darum theile man in der Horizontalprojection den Abstand eh in drei gleiche Theile und ziehe durch f, g die Parallelen fn, go, so ergeben sich schliesslich auch noch die Punkte n, n' und oo' der gesuchten Linie mnop, m'n'o'p'.

Wäre nach Fig. 448 das Lager L von einem jüngeren Gebilde G überdeckt, so dass jenes nicht zu Tage austreten könnte, so dürfte man sich nur vorstellen, dass die Horizontalcurven 0, 1, 2, 3 . . . nicht der Terrainoberfläche DE, sondern der Grundfläche HI des überdeckenden Gebildes angehört, um nach der vorstehenden Anleitung das Ausbeissen unter der Voraussetzung zu finden, dass die Ueberlagerung entfernt worden sey. Sollte nun die Lagerstätte an ihrem oberen Rande entblösst werden, so wäre lediglich die Horizontalprojection mnop auf dem Terrain abzustecken und überall die Mächtigkeit des Gebildes G zu durchsenken.

Fig. 448.

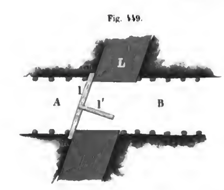


§. 376.

Aufgabe. Das wahre Streichen und Fallen einer Lagerstätte anzugeben, welche bloss durch einen Schlag gekreuzt wird.

Stellt L in Fig. 449 die Lagerstätte vor, welche weder auf der Sohle noch auf dem Dache entblösst ist, sondern nur von einer Streeke oder einem Schlage AB gekreuzt wird, so durchfahre man erst die ganze Mächtigkeit des Lagers und suche hierauf mittels einer Latte (l) und Setzwage an dem Hangenden oder Liegenden (hier an dem Hangenden) der Lagerstätte durch Abgraben zwei

Fig. 449.



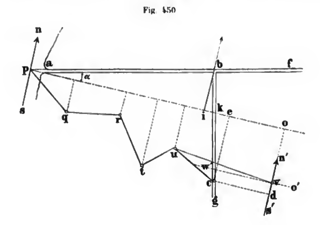
Punkte (m, n) auf, welche in einer Horizontalebene liegen, und messe hiernach das Streichen mit dem Setzcompass. Alsdann lege man eine zweite Latte (l') senkrecht zur ersten und so, dass sie ober- oder unterhalb der letzteren an einem Punkte des Hangenden oder Liegenden (hier des Hangenden) ansteht und folglich in die Dach- oder Sohlebene (hier die Dachebene) der Lagerstätte fällt. Misst man nun den Neigungswinkel dieser Latte gegen den Horizont mit dem Gradbogen oder dem Setzniveau, so stellt dieser das gesuchte Fallen der Lagerstätte vor.

§. 377.

Aufgabe. Ein in der Grube gegebener Punkt soll in seiner Vertikallinie über Tag, und ausserdem die Länge dieser Linie angegeben werden.

Diese Aufgabe, welche sich bergmännisch auch so ausdrücken lässt: „einen Grubenpunkt seiger an den Tag überzutragen," oder so: „den Feldort eines Grubenpunktes anzugeben," hat der Markscheider sehr oft zu lösen; denn angenommen z. B., es sey nach Fig. 450 der Tagstollen ab sehr lang, so wird die Luft in dem

Fig. 450



Kreuzschlage bc sowohl das Brennen der Lichter als das Athmen der Bergleute sehr erschweren, wesshalb zur Verbesserung der Luft entweder ein Wetterbohrloch oder ein Wetterschacht abgeteuft werden muss. Soll nun die Abteufung in einem bestimmten Punkte c der Grube eintreffen, so ist dessen Oertung über Tage (Feldort, Projection) genau anzugeben.

Um dieses zu bewirken, wird man vor allen Dingen einen Markscheidezug in der Grube ausführen und diesen an die vor dem Stollenmundloche a ausgesteckte Mittagslinie sn anknüpfen: hiedurch findet man die Länge, Breite und Höhe des Punktes c in Bezug auf den Fixpunkt p und die rechtwinkeligen Axen ps, po, pz, von denen die letztere lothrecht ist. An diese Axen und den Fixpunkt p anschliessend, steckt man über Tage ein Polygon pqrtuv bis zu einer Stelle hin aus, von der man glaubt, dass sie lothrecht über c liege. Dieses Polygon wird auf bekannte Weise nach seiner horizontalen und vertikalen Projection aufgenommen und von jedem Eckpunkte werden die Coordinaten (x, y, z) oder Länge, Breite und Höhe berechnet. Unter den horizontalen Coordinaten werden zwei der Länge und Breite von c ziemlich nahe kommen; wir wollen annehmen, die von v. Von diesem Punkte aus und im Anschlusse an die Polygonseite uv wird man nun leicht den Feldort c' finden. Denn trägt man an v die Mittagslinie s'n' an und errichtet darauf die Senkrechte o'w', so hat man die Axen parallel zu ihrer ursprünglichen Richtung und die Coordinaten des Punktes v in die Lage vs', vo', vz' verschoben: es sind daher leicht die Coordinaten von c in Bezug auf diese neuen Axen zu berechnen und abzustecken. Hat man dieses aber gethan, so ist die Aufgabe gelöst, weil der Feldort c' und die Seigerhöhe cc', welche die Länge der Wetterführung angibt, bekannt sind.

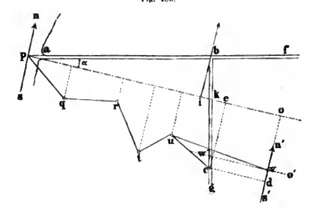
§. 378.

Aufgabe. Ein auf dem Felde gegebener Punkt soll in die Grube übertragen oder projicirt werden.

Diese Aufgabe behandelt den umgekehrten Fall der vorigen, wesshalb wir darauf verweisen und die Fig. 450 wiederholt anwenden.

Man wird demnach den Punkt c', dessen gesuchte Projection (Oertung unter Tage) c ist, mit einem Fixpunkte p, der vor einem Stollenmundloche a steht, durch einen Polygon cutrqp verbinden

Fig. 450.



und die Coordinaten x, y, z aller Eckpunkte in Bezug auf die Axen ps, po, pz berechnen. Hierauf schliesst man an dieselben Axen einen Grubenzug pabf an und berechnet aus diesem einen Punkt b, der so liegt, dass, wenn von ihm aus ein Kreuzschlag bg unter einen Winkel β = ibk gegen die Mittagslinie ib geführt wird, dieser Schlag durch das Loth von c' gehen, also zur unterirdischen Oertung c des Punktes c' führen muss, sobald die Strecke bc berechnet und hergestellt ist.

Um aber den Punkt b zu erhalten, verfahre man wie folgt. Es sey die Abscisse ce des Punktes c = x_1 und die Ordinate pe = y_1; die Richtung bc bilde mit der Mittagslinie den Winkel ibc = β und die Richtung ab mit der Ostwestlinie den Winkel bpo = α. Setzt man nun die gesuchte Abscisse von b = pi = x, die Ordinate bi = y und den ebenfalls noch unbekannten Abschnitt ik = m, so ist (von den Vorzeichen abgesehen) aus der Aehnlichkeit der Dreiecke bik und kce:

$$m y_1 = (x_1 - x - m)\, y.$$

Setzt man in diese Gleichung die aus den rechtwinkeligen Dreiecken bpi und bki folgenden Werthe von $y = x \operatorname{tg} \alpha = x t$ und $m = y \operatorname{tg} \beta = x \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = x t t'$, so findet man nach einander die gesuchten Coordinaten:

$$x = \frac{x_1 - y_1 t'}{1 + t t'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (438)$$

$$y = \frac{(x_1 - y_1 t')\, t}{1 + t t'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (439)$$

und hieraus die Hypothenuse pb des Dreiecks ipb gleich

$$l = \frac{x}{\cos\alpha} = \frac{x_1 - y_1\, t'}{(1 + t t')\cos\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (440)$$

Mit dem berechneten Werthe von l kann man den Punkt b in der Grube abstecken, und ist dieser gefunden, so lässt sich die Richtung bc, deren Horizontalprojection die Länge

$$l' = \frac{y + y_1}{\cos\beta} = \frac{x_1 + y_1}{(1 + t t')\cos\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (441)$$

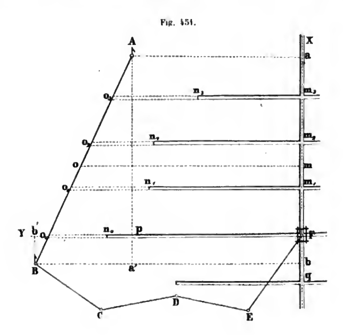
hat, leicht bezeichnen. Ist nun der Querschlag bg bis auf die horizontale Länge l' von b aus in den Berg getrieben, so kann c abgemessen und die Aufgabe als gelöst betrachtet werden.

§. 379.

Aufgabe. Eine auf dem Felde gegebene Markscheide soll in die Grube übertragen werden.

Die Markscheide sey auf dem Felde durch die Fixsteine A, B (Fig. 451) bezeichnet und die Grube, in welcher die durch AB gehende Vertikalebene abzustecken ist, sey eine Kohlengrube. Für den Abbau des Kohlenflötzes seyen bereits der Schacht F, in der

Fig. 451.



Richtung des Falles FX die Strecke Fa und in der Richtung des Streichens die Strecken Fn, $m_1 n_1$, $m_2 n_2$, $m_3 n_3$ ... angelegt. Es handelt sich also nur darum, die Längen $Fo = y_0$, $m_1 o_1 = y_1$, $m_2 o_2 = y_2$, $m_3 o_3 = y_3$ anzugeben, welche von FX bis an die Vertikalebene AB reichen.

Zu dem Ende stecke man über Tage zwischen der Markscheide AB und dem Schachte F ein Polygon ABCDEF aus, nehme es in bekannter Weise auf und berechne die Coordinaten von A und B in Bezug auf die rechtwinkeligen Axen FX und FY. Das Ergebniss dieser Messung und Rechnung sey:

$$Ap = + x', \quad Aa = y'$$
$$Bb' = - x'' \quad Bb = y''.$$

Für irgend eine mit der Y-Axe parallele Strecke mn, deren Horizontalabstand von $F = \alpha$ ist, erhält man die Länge

$$mo = \lambda = mp + po = y_2 + \eta,$$

wobei Aa' parallel der X-Axe gezogen und $po = \eta$ gesetzt ist. Schreibt man

$$tg\,(BAa') = \frac{Ba'}{Aa'} = \frac{y'' - y'}{x'' + x'} = t,$$

so folgt sofort aus dem rechtwinkeligen Dreiecke Apo, wenn $Im = \zeta$ gesetzt wird:

$$\eta = (x' - \zeta)\, t$$

und daher durch Substitution dieses Werthes in dem Ausdrucke für mo die Gleichung

$$\lambda = y' + (x - \zeta)\, t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (442)$$

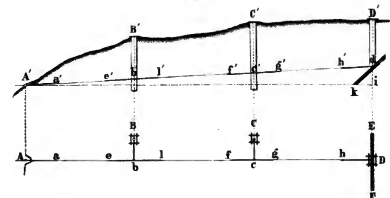
Setzt man hierin nach und nach für ζ die Werthe o, ζ_1, ζ_2, ζ_3 ...., so findet man λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 .... und kann folglich damit, wenn die zugehörigen Strecken weit genug in den Berg getrieben sind, die Grenzpunkte o_0, o_1, o_2, o_3 .... durch Markscheidestufen und die Grenze selbst durch einen Querschlag bezeichnen.

§. 380.

Aufgabe. Einen Stollen mit Lichtschächten und Gegenortspunkten abzustecken.

Stellt in Fig. 452 der schwarze Streifen EF den wagrechten und kd den lothrechten Durchschnitt einer Lagerstätte vor und soll von dem gegebenen Tagpunkte A, A' aus ein Stollen an diese Lagerstätte so geführt werden, dass er die kleinste Länge erhält und das

Fig. 452.



Lager möglichst tief untersetzt: so muss seine Richtung senkrecht zur Streichlinie EF der Lagerstätte stehen, und seine Steigung α die kleinstmögliche seyn. Ist nun durch einen Markscheidezug die Lage des gegebenen Punktes A, A' gegen die mit EF parallele Streichlinie bestimmt, so steht damit auch die horizontale Projection AD der Stollenaxe fest, insoferne sie EF senkrecht schneidet; und wenn man von A' aus eine Linie A'd mit der gegebenen Steigung α gegen die Horizontale Ai zieht, so hat man auch die vertikale Projection A'd der Axe des Stollens.

Da die Lage des Punktes A gegen die Streichlinie der Lagerstätte als bekannt vorausgesetzt wird, so lässt sich die Absteckung der zur Streichlinie senkrechten Stollenrichtung auf dem Terrain nach den bereits bekannten Methoden für die Absteckung gerader Linien leicht bewirken. Diese Absteckung vorausgesetzt, erhält man die Lage des Endpunkts d des Stollens auf folgende Weise.

Man nivellirt die ausgesteckte Gerade bis zu einem (in Fig. 452 nicht mehr angedeuteten) Punkte L, an welchem die Lagerstätte entweder ausbeisst oder entblösst ist. Hierdurch erfährt man den Höhenunterschied $Lm = h$ und die Horizontalprojection von $A'L = A'm = l$. Da auch der Fallwinkel $Lkm = \beta$ bekannt ist, so ergibt sich aus dem rechtwinkeligen Dreiecke Lkm die Länge von

$$km = k \cdot \cot \beta$$

und aus dem ebenfalls rechtwinkeligen Dreiecke A'mn die absolute Steigung des Stollens bis zur Vertikalen Lm gleich

$$mn = l \operatorname{tg} \alpha.$$

Mit diesen Grössen findet man aber leicht, was über die Lage von d zu wissen nöthig ist, nämlich

$$A'i = \frac{h - l \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} = s,$$

$$di = \frac{s \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta},$$

$$A'd = \frac{s \cot \beta}{\cos \alpha}.$$

Sobald man A'i kennt, kann man in der abgesteckten Stollenrichtung den Punkt D' auf der Terrainoberfläche abmessen und somit die Oertung des Punktes d angeben. Aus dem Nivellement von A' bis D' ergibt sich auch die Tiefe des Schachtes D'd.

Sollen in den Punkten B, C zur Seite der Geraden AD zwei Lichtschächte bestimmt werden, so erhält man die Tiefe derselben (B'b' und C'c') bis auf die Sohle des Stollens aus dem an die Linie AD geknüpften Nivellement der Punkte B, B' und C, C' in Verbindung mit den bekannten absoluten Steigungen des Stollens auf die Längen Ab und Ac. Die Schächte werden um 1 bis 2 Lachter tiefer gemacht, als die berechneten Grössen B'b' und C'c' verlangen, damit sich in der Vertiefung oder dem Sumpfe das Grubenwasser absetzen kann; die 3 bis 4 Lachter langen Querschläge Bb und Cc sind aber in der Höhe der Stollensohle anzulegen.

Damit man die Gegenortspunkte b, b' und c, c', von denen aus der Stollen nach be, bl und cf, cg hin betrieben wird, genau erhält, müssen erstens die Richtungen Bb und Cc in dem Kreuzstreichen des Stollens angelegt und die aus der Lage von B und C bekannten Abstände Bb und Cc genau abgemessen, und zweitens die Punkte b' und c' von B' und C' aus in den Schächten abgesenkelt und in den Querschlägen scharf einnivellirt werden. Sind diese Punkte ihrer horizontalen und vertikalen Projection nach bekannt, so ergeben sich die Richtungen be, bl und cf, cg aus dem bekannten Streichen und die Neigungen b'e', b'l' und c'f', c'g' aus dem vorgeschriebenen Gefälle der Stollenaxe. Die Lage der Linien el, e'l' und fg, f'g' oder der Feldörter e', l', f', g' wird in den die Breite des Stollens durchbrechenden Querschlägen Bb und Cc durch Fixpunkte (Einstemmungspunkte) genau bezeichnet, und während des Stollenbetriebs findet eine wiederholte Controle der Absteckung durch den Markscheider statt, um jede Abweichung von den im

horizontalen und vertikalen Sinne vorgeschriebenen Richtungen des Stollens sofort zu verhindern.

Will man die horizontalen Richtungen der Querschläge und Gegenörter des Stollens nicht mit der Magnetnadel, sondern, was mehr zu rathen ist, mit dem Grubentheodolithen bestimmen, so kann man in der Weise verfahren, dass man in jedem Schachte zwei Punkte hinabsenkelt, welche möglichst weit von einander entfernt sind und deren Richtung gegen den Meridian und die Stollenaxe über Tage genau bestimmt ist. Mit dieser bereits orientirten und durch die Senkelung in die Grube übertragenen Linie lässt sich, wie leicht einzusehen, der zu jedem Schachte gehörige Querschlag und, wenn dieser ausgeführt ist, die Stollenaxe abstecken.

Vierter Abschnitt.

Wassermessungen.

§. 381.

Nachdem im sechsten Abschnitte des ersten Bandes nur diejenigen Messinstrumente betrachtet wurden, welche zur unmittelbaren Messung der Geschwindigkeiten fliessender Gewässer dienen, wird hier auch nur von den hydrometrischen Arbeiten die Rede seyn, welche an Gerinnen, Bächen, Flüssen und Strömen vorzunehmen sind, um deren Geschwindigkeiten, Wassermengen und sogenannte Wasserkräfte kennen zu lernen. Es ist somit, wie schon in §. 217 des ersten Bandes angedeutet, hier nicht die Rede von den Messungen, durch welche man die Geschwindigkeiten und Wassermengen sehr kleiner Wasserläufe, wie die der Quellen und Röhrenleitungen, erfährt, und von den Canälen und Flüssen werden auch nur diejenigen Stellen berücksichtigt, in welchen die Widerstände des Betts die ursprünglich beschleunigte Bewegung bereits in eine gleichförmige verwandelt haben. Ebenso wenig liegt es im Plane dieses Buchs, von den Messungen zu handeln, welche das Steigen und Fallen der Wasserstände der Flüsse betreffen und mit dem Ausdrucke „Pegelbeobachtungen“ bezeichnet werden; denn diese Messungen

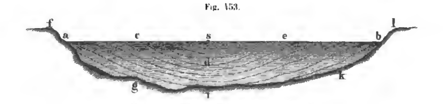
würden zu weit in das Gebiet des Flussbaues, jene aber zu weit in das der Hydraulik eingreifen.

A. Geschwindigkeitsmessungen.

§. 382.

Die Geschwindigkeit eines fliessenden Wassers ist selbst an solchen Stellen, wo das Flussbett regelmässig beschaffen und von Wehren, Buhnen und anderen auf die Bewegung des Wassers störend einwirkenden Bauwerken entfernt ist, nicht in dem Sinne gleichförmig, dass alle Wasserfäden gleiche Geschwindigkeit besitzen, sondern nur insoferne, als ein und derselbe Wasserfaden auf eine ziemliche Länge seine Geschwindigkeit nicht merklich ändert. Es fliessen immer diejenigen Wasserfäden, welche sich näher an den Ufern oder in grösserer Tiefe befinden, langsamer als die mittleren und höher gelegenen, so dass sich nach Fig. 453 in jedem Querprofile Linien

Fig. 453.



(wie a i b, c d e) angeben lassen, welche die Schnittpunkte der Wasserfäden von gleicher Geschwindigkeit vereinigen.

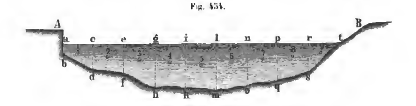
Das Gesetz, nach welchem die Geschwindigkeiten der Wasserfäden nach der Tiefe und den Seiten eines Querprofils abnehmen, ist nicht bekannt, obwohl es nicht an Formeln fehlt, welche diese Abnahme darzustellen suchen. Würde man dieses Gesetz kennen, so reichte es hin, die Geschwindigkeit des Stromstrichs zu messen, um daraus die mittlere Geschwindigkeit des Wassers durch Rechnung zu finden; so lange aber jene Kenntniss mangelt, ist man darauf angewiesen, die mittlere Geschwindigkeit des Wassers auf anderen Wegen zu suchen.

Einer dieser Wege besteht darin, dass man die von Eytelwein entwickelte Formel, welche die mathematischen Beziehungen zwischen der Geschwindigkeit des Wassers und den Abmessungen eines regelmässigen Gerinnes darstellt, auch auf Flüsse überträgt und aus

den Dimensionen einiger Querprofile und der Grösse des Wasserspiegelgefälles die mittlere Geschwindigkeit berechnet. Dieses Verfahren ist als eine mittelbare Messung der Geschwindigkeit zu bezeichnen, insoferne Nivellirinstrumente und Längemesser ausreichen, es zu vollziehen; es kann aber nur für solche Fälle empfohlen werden, in denen entweder gar keine unmittelbare Messung stattfinden kann, oder in welchen nur sehr geringe Genauigkeit gefordert wird.

Der andere Weg, die mittlere Geschwindigkeit eines Flusses auszumitteln, besteht darin, dass man, wie in Fig. 454 angedeutet, das Querprofil in eine entsprechende Anzahl Trapeze (ad, cf, eh... st) abtheilt, in deren Mittelpunkten (1, 2, 3... 9) die Geschwindigkeiten direkt misst, die durch jedes Trapez fliessende Wassermenge berechnet, und aus der Gesammtwassermenge durch Division derselben mit dem Flächeninhalte des Querprofils die mittlere Geschwin-

Fig. 454.



digkeit sucht. Dieses Verfahren wird dem vorigen gegenüber als eine unmittelbare Messung der mittleren Geschwindigkeit des Flusses bezeichnet und liefert, wenn die einzelnen Geschwindigkeiten mit dem Woltman'schen Flügel gemessen werden, unter allen bis jetzt bekannten Methoden die zuverlässigsten Resultate. Wir brauchen jedoch hierüber nichts weiter mitzutheilen, da bereits bei der Beschreibung der Instrumente zum Geschwindigkeitsmessen (Bd. I. S. 420—452) ausführlich von deren Gebrauch die Rede war und einige damit zusammenhängende Operationen auch bei den mittelbaren Geschwindigkeitsmessungen, von denen nunmehr die Rede seyn soll, vorkommen.

§. 383.

Eytelwein'sche Formel. Da die mittelbaren Geschwindigkeitsmessungen von der mathematischen Beziehung zwischen der

Geschwindigkeit, dem Gefälle und dem Querprofile eines Wasserlaufs abhängen, so ist vor Allem dieser Zusammenhang darzustellen.

Die ersten richtigen Ansichten über die Abhängigkeit der Geschwindigkeit eines Flusses von dessen Gefälle und Querprofile sprach A. Brahms in seinen vor hundert Jahren erschienenen „Anfangsgründen der Deich- und Wasserbaukunst" aus; er unterliess es aber, eine algebraische Formel, welche die von ihm aus Versuchen erkannte Gesetzmässigkeit ausdrückte, aufzustellen. Später beschäftigten sich in Frankreich namentlich Dubuat und Prony, in Deutschland Woltman und Eytelwein mit Herleitung eines Ausdrucks für die Geschwindigkeit des Wassers in Canälen und Flussbetten. Die Arbeiten von Eytelwein sind ohne Zweifel die gründlichsten und fanden daher auch die meiste Anerkennung und Anwendung.

Die nachstehend entwickelte Formel gilt eigentlich nur für ganz regelmässige Gerinne, in welchen die Querprofile gleich gross sind; für Flüsse gaben ihr Eytelwein und Prony eine etwas veränderte Gestalt. Vergleicht man jedoch die Ergebnisse direkter Messungen mit den aus den zusammengesetzten Formeln berechneten Geschwindigkeiten, so sind die Abweichungen immer noch so gross, dass man die völlige Richtigkeit der Annahmen, worauf die Entwickelung der Formeln für die Flüsse beruht, bezweifeln muss. So lange diese Unsicherheit noch besteht, ist es daher wohl gerechtfertigt, sich des einfacheren Ausdrucks zur Berechnung der Geschwindigkeit aus dem Gefälle und Querprofile zu bedienen.

Bei der Herleitung dieses Ausdrucks ging man von der natürlichen Annahme aus, dass die Beschleunigung der Bewegung des Wassers, welche in Folge seines Falles über eine schiefe Ebene eintreten müsste, wenn keine Hindernisse entgegen wirkten, durch die Cohäsions- und Reibungs-Widerstände an der Sohle und den Seitenwänden des Canal- oder Flussbettes aufgehoben wird. Mit dieser Annahme hatte man einen Massstab zur Messung der Widerstände, und es kam nur mehr darauf an, festzustellen, wovon die Widerstände und die Beschleunigung abhängen. Durch Beobachtungen hielt man sich aber für berechtigt anzunehmen, dass der Widerstand zunächst mit der Grösse der vom Wasser berührten Fläche des Flussbetts wächst und abnimmt. Zieht man nun eine Flussstrecke von der Länge 1 in Betracht und ist p der benetzte Umfang des

Querprofils dieser Strecke (in Fig. 453 ist $p = a g i k b$ und in Fig. 454 $p = a b d \dots s t$), so ist die widerstandleistende Fläche $= p$. Ferner glaubte man nach Beobachtungen über die Bewegung des Wassers in Flüssen annehmen zu müssen, dass der Widerstand gegen die Bewegung auch mit dem Quadrat der Geschwindigkeit wachse, insoferne bei doppelter Geschwindigkeit doppelt so viele Theile und jeder Theil in der halben Zeit von der benetzten Wand abgerissen werden müsse. Bezeichnet man nun den Widerstand mit w, die Geschwindigkeit in der Sekunde mit v, den benetzten Umfang des Querprofils mit p und eine noch unbekannte, von den Reibungsverhältnissen des Wassers abhängige constante Grösse mit i, so ist nach den vorstehenden Erörterungen

$$w = i p v^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (443)$$

Nennt man ferner α das relative Gefälle des Wasserspiegels der durch das Querprofil q fliessenden Wassermasse, und bezeichnet g die Beschleunigung der Schwerkraft der Erde, so beträgt die Beschleunigung der Bewegung jeder cubischen Einheit der in Rede stehenden Wassermasse αg, da diese Beschleunigung der Neigung der schiefen Ebene (hier dem Gefälle des Wassers) proportional ist. Für die Länge 1 der Flussstrecke beträgt die Gesammtwassermasse q Raumeinheiten und folglich ist deren Beschleunigung $= \alpha g q$.

Nach der schon erwähnten Annahme über die Vernichtung der Beschleunigung durch die Widerstände der Bewegung muss nunmehr

$$\alpha g q = i p v^2$$

und somit die Geschwindigkeit des Wassers

$$v = \sqrt{\frac{g}{i}} \cdot \sqrt{\frac{q}{p}\,\alpha}$$

gesetzt werden. Nimmt man, wie es in der Regel geschieht, das Verhältniss von g zu i als constant an und setzt

$$k = \sqrt{\frac{g}{i}\,\alpha}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (444)$$

so geht die vorstehende Formel in folgende über:

$$v = k \sqrt{\frac{q}{p}\,\alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (445)$$

Soll nun die Geschwindigkeit in der Sekunde in preussischen oder rheinländischen Fussen ausgedrückt werden, wenn q und p in demselben Masse gegeben sind, so ist nach Eytelwein $k = 90{,}9$ zu

setzen. Für bayerisches und hannoverisches Fussmass ist demnach $k = 94$ und für wiener Fussmass $k = 90{,}6$ zu nehmen.

Der Coefficient k kann in keinem Falle für jeden Fluss derselbe seyn, sondern muss sich ohne Zweifel mit der Beschaffenheit des Flussbettes ändern. Wie viel diese Aenderung in den einzelnen Fällen beträgt, lässt sich bis jetzt nicht allgemein angeben; jedenfalls aber hat die Beschaffenheit des Flussmaterials einen wesentlichen Einfluss darauf. Will man in Ermangelung des Gesetzes, nach welchem sich dieser Einfluss richtet, den Werth von k, welcher einem gegebenen Flusse möglichst gut entspricht, durch Versuch bestimmen, so braucht man nur an diesem Flusse die Grössen q, p, α, v so genau als möglich unmittelbar zu messen und nach Gleichung (445) den Werth von

$$k = \frac{v}{\sqrt{\alpha\, t}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (446)$$

zu berechnen. Dabei ist das Verhältniss von $q : p = t$ gesetzt und angenommen, dass v die mittlere Geschwindigkeit im Querprofile q vorstellt.

§. 384.

Aufnahme der Querprofile. Zur mittelbaren Bestimmung der Geschwindigkeit aus der Gleichung (445) gehört zunächst die Kenntniss der Werthe von q und p, welche sich aus der Aufnahme einiger Querprofile an einer geeigneten Flussstrecke ergeben. Als geeignet ist aber jede gerade oder unmerklich gebogene Flussstrecke zu betrachten, welche von Wehren, Schützen, Buhnen, Brücken etc. ziemlich weit entfernt ist und deren Querprofile nahezu gleiche mittlere Breite und Tiefe, also auch fast gleichen Flächeninhalt haben.

1) Ist der Fluss nicht sehr breit, so kann man mit Hilfe von starken Bohlen oder langen Leitern einen gegen die Ufer senkrecht gerichteten Steg über denselben herstellen, darauf die Breite des Betts in gleiche Theile theilen und mittels einer Peilstange, die wie der Schaft des Reichenbach'schen Strommessers (Fig. 244) beschaffen ist, damit sie keine merkliche Stauung des Wassers veranlasst, an den Theilungspunkten die lothrechten Wassertiefen messen.

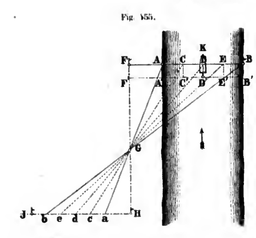
Der Steg gibt somit die Abcissen und die Peilstange die Ordinaten des Querprofils, welches hiernach gezeichnet und berechnet werden kann.

Hat man an den beiden Enden und in der Mitte Querprofile aufgenommen, und hat sich während dieser Zeit der Wasserstand nicht geändert, was man an einem am Ufer befestigten Massstabe erkennen kann: so gibt das arithmetische Mittel aus den Flächen der drei Profile den gesuchten Werth von q und das Mittel aus den drei benetzten Umfängen den Werth von p, welcher in die Formel (445) einzusetzen ist. Der bei der Messung der Profile stattfindende Wasserstand muss angemerkt werden, damit bei eben demselben das Gefälle des Wasserspiegels bestimmt werden kann.

2) Ist der Fluss breit aber nicht tief, so dass ein Arbeiter die Nivellirlatte in demselben noch halten kann, so lässt sich zur Sommerszeit das Querprofil dadurch aufnehmen, dass man über den Fluss eine starke in Leinöl getränkte, mit Wachs abgeriebene und in gleichen Abständen mit farbigen Läppchen versehene Leine spannt, an den durch die Läppchen bezeichneten Stellen die Nivellirlatte von dem im Flusse stehenden Arbeiter auf der Sohle des Flussbetts lothrecht aufstellen lässt, alle diese Punkte in Bezug auf einen am Ufer befindlichen Fixpfahl, dessen Kopf über den Wasserspiegel reicht, einnivellirt, ferner den Abstand des Wasserspiegels von dem Pfahlkopfe misst und endlich den Wasserstand an dem am Ufer stehenden Massstabe abnimmt. Man sieht, dass sich diese Aufnahme des Querprofils eines Flusses von der eines trockenen Bodens nur dadurch unterscheidet, dass hier noch der Abstand des Wasserspiegels in Bezug auf den am Ufer befindlichen Fixpfahl einzumessen ist. Dieses muss aber geschehen, wenn man den Flächeninhalt und den benetzten Umfang des Profils finden will.

3) Ist der Fluss so breit und tief, dass die vorhergehenden Methoden zur Messung der Abscissen und Ordinaten nicht mehr angewendet werden können, so müssen die Abscissen vom Ufer und die Ordinaten von einem Kahne aus gemessen werden, was in folgender Weise geschehen kann.

Es stehe ein Kahn (K, Fig. 455) zur Verfügung, in dessen Mitte eine Messfahne aufgestellt ist, die zum Einrichten desselben dient. An den Ufern werden die Stäbe A und B eingesteckt, welche eine Gerade bezeichnen, die dem in der Richtung A'B' aufzunehmenden Querprofile parallel ist und von diesem um die halbe Schiffslänge absteht. An der Spitze (D') des Kahns werden die Tiefen abgepeilt, sowie dort auch die Geschwindigkeiten mit dem



Woltman'schen Flügel gemessen werden, wenn es sich um unmittelbare Messungen handelt. Um nun die Länge von AB zu erfahren und in gleiche Theile zu theilen, verlängere man dieselbe bis F, errichte dort eine Senkrechte FH und stecke in H eine Parallele HI zu FB ab. Misst man auf FH einen Punkt G so ab, dass GH = m . FG ist und von HI aus über G die ganze Linie AB übersehen werden kann, und verlängert man AG und BG rückwärts bis zu HI, so wird hierauf die Linie ab abgeschnitten, welche zu AB in dem Verhältnisse von 1 : m steht. Es ist also AB = m (ab). Theilt man nun ab in so viele gleiche Theile, als AB erhalten soll, so werden die Absehlinien bG, eG, dG . . . . diese Theile auf AB bestimmen, vorausgesetzt, dass die Messfahne auf dem Schiffe auch in die an den Ufern bezeichnete Linie AB eingerichtet ist.

Dieses Einrichten kann ohne Beihilfe vom Schiffe aus geschehen, wenn man das Prismenkreuz anwendet; ohne dieses ist ein Gehilfe erforderlich, der von A oder B aus das Einwinken besorgt.

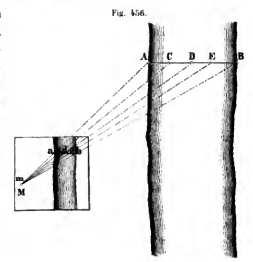
Ist der Strom in einem grossen Massstabe geometrisch aufgenommen, so kann man die Länge AB auf dem Plane abgreifen und mittels des Messtisches und der Kippregel in gleiche oder beliebige Theile theilen, wie aus Fig. 456 ohne Weiteres hervorgeht. Dabei versteht sich übrigens von selbst, dass das Einstellen in die Linie AB vom Ufer oder vom Schiffe aus, wie vorhin angedeutet, nicht verabsäumt werden darf.

Wird es wegen grosser Tiefe oder Geschwindigkeit des Stroms zu schwer, die Peilstange lothrecht festzuhalten, so wendet man zur Tiefenmessung ein Senkblei an, dessen Leine eingetheilt ist und am unteren Ende ein etwa 10 Pfund schweres Gewicht trägt. Damit die Leine bei der Messung möglichst lothrecht gehalten werden kann, muss man das Gewicht so weit oberhalb des Punktes, an dem die Tiefe gesucht wird, einwerfen, als es während des Sinkens durch

den Stoss des Wassers abwärts getrieben wird. Wie viel dieses Abwärtstreiben beträgt, erfährt man bald durch Uebung.

Da jede Profilmessung an Strömen längere Zeit dauert, so hat man fortwährend den Wasserstand an einem in der Nähe eingestellten Massstab zu beobachten, damit man die gemessenen Tiefen alle auf eine und dieselbe Horizontale reduciren kann.

Fig. 456.



§. 385.

Aufnahme der Längenprofile. Ausser den Werthen von q und p, welche der vorige Paragraph finden lehrt, bedarf man noch des relativen Gefälles α des Wasserspiegels zur Berechnung der Geschwindigkeit v nach der Formel (445). Dieses Gefälle ist stets eine sehr kleine Grösse, und da es ein geringer Messungsfehler in der Bestimmung des absoluten Falles h auf die horizontale Uferlänge l, woraus sich

$$\alpha = \frac{h}{l}$$

ergibt, oft bedeutend ändern kann, die Geschwindigkeit v aber der Quadratwurzel aus α proportional ist: so wird man auf die Bestimmung von h alle Sorgfalt verwenden.

Bestimmt man das Gefälle eines Flusses an mehreren unter sich zusammenhängenden Punkten und nimmt man zugleich an diesen Punkten Querprofile auf, so lässt sich aus diesen Aufnahmen das Längenprofil des Flusses für die betreffende Strecke berechnen und auftragen. Obwohl unser nächster Zweck eigentlich nur das relative Gefälle zwischen dem obersten und untersten Querprofile der Flussstrecke, in welcher die Geschwindigkeit mittelbar gemessen werden soll, fordert, so werden wir doch sofort näher angeben, wie die Arbeiten zur Aufnahme eines Längenprofils zu geschehen haben,

weil dieser allgemeinere Zweck den besondern in sich schliesst und eine Wiederholung erspart wird.

Um das Längenprofil eines Flusses zwischen zwei Punkten M und N aufzunehmen, bezeichne man längs des Ufers von M bis N alle diejenigen Stellen mit Grundpfählen, welche entweder einen bestimmten Abstand von etwa 100 oder 200 Fuss von einander haben, oder an denen sich das Gefälle des Wasserspiegels ändert. Diese Grundpfähle werden in das Flussbett geschlagen und müssen mit ihrem horizontal abgeschnittenen Kopfe einige Zolle über den zu nivellirenden Wasserspiegel vorragen; ausserhalb des Bettes schlage man Beipfähle mit entsprechenden Nummern wie für ein Längenprofil auf trockenem Boden. Hierauf messe man die horizontalen Entfernungen aller Grundpfähle mittels Ketten oder Latten am Ufer ab und nivellire schliesslich alle Grundpfähle unter sich und in Beziehung auf einen ständigen oder vorübergehend aufgestellten Pegel mit grösster Sorgfalt zweimal ein. Sobald der Wasserstand eintritt, für welchen man das Längenprofil wünscht, lasse man an allen Grundpfählen die Abstände des Wasserspiegels von den Pfahlköpfen gleichzeitig[1] genau messen und aufschreiben. Addirt man diese Abstände (Stichmasse) zu den vorher berechneten Abständen der Pfahlköpfe vom Horizont des Längenprofils, so erhält man die Ordinate der einnivellirten Punkte des Wasserspiegels und das Nivellement des letzteren lässt sich nach §. 336 auftragen. Da vorher schon die Querprofile aufgenommen wurden, so kennt man in jedem die tiefste Stelle; trägt man daher an den zugehörigen Ordinaten deren Abstände vom allgemeinen Horizont ab und verbindet die Endpunkte, so erhält man auch die zum Längenprofil gehörige Stromrinne (§. 217), womit dieses aufgenommen ist. Bei höheren oder niederen Wasserständen sind die Stichmasse von Neuem zu nehmen und die Ordinaten wie vorhin zu berechnen und aufzutragen. Auf diese Weise kann man in ein Längenprofil sowohl den tiefsten als höchsten und einen mittleren Wasserstand einzeichnen. Um die eingetragenen Wasserstände auch in späterer Zeit auf dem Terrain angeben zu können, ist es nöthig, die Grundpfähle in Bezug auf einen Fixpunkt oder Pegel einzunivelliren.

[1] Gleichzeitig müssen die Abstände desshalb gemessen werden, weil man ausserdem nicht sicher ist, ob sich der Wasserstand des Flusses nicht geändert hat. Jede Aenderung würde das Gefälle bedeutend verfälschen.

Was in Bezug auf das Einnivelliren von Flussbauwerken und anderen in dem Ueberschwemmungsgebiete eines Flusses liegenden Gegenständen für den Hydrotechniker von Bedeutung ist, gehört in das Gebiet der Wasserbaukunde, mit der wir uns hier nicht beschäftigen.

B. Messung der Wassermenge eines Flusses.

§. 386.

Die Bestimmung der Wassermenge, welche ein Fluss in der Zeiteinheit abführt, oder die Messung der „Wasserführung" eines Flusses geschieht immer auf indirektem Wege, indem man die gesuchte Wassermenge aus den aufgenommenen Profilen und Geschwindigkeiten berechnet.

Hat man die mittlere Geschwindigkeit nach der Formel

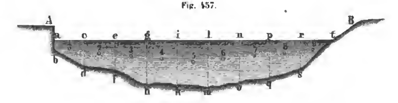
$$v = k \sqrt{\frac{q}{p}\,\alpha}$$

mittelbar bestimmt, so sind damit auch schon alle Messungen gemacht, welche die Wassermenge m geben, indem

$$m = vq = qk \sqrt{\frac{q}{p}\,\alpha}$$

ist. Wurden dagegen die verschiedenen Geschwindigkeiten, welche in einem Querprofile stattfinden, mittels des Reichenbach'schen Strommessers oder des Woltman'schen Flügels unmittelbar gemessen, und lag dabei ein Querprofil, wie das in Fig. 457 gezeichnete, zu Grunde, so ist, wenn

Fig. 457.



$f_1, f_2, f_3 \ldots f_9$ die auf einander folgenden Trapezflächen ad, cf, eh ... st und

$v_1, v_2, v_3 \ldots v_9$ die mittleren Geschwindigkeiten in diesen Trapezen

bezeichnen, die Gesammtwassermenge

$$m = f_1 v_1 + f_2 v_2 + f_3 v_3 + \ldots + f_9 v_9 = \Sigma (fv) \qquad (447)$$

Will man nunmehr die mittlere Geschwindigkeit v des Flusses in dem Querprofile AB finden, so ist diese nach der Definition in §. 382 gleich

$$v = \frac{m}{F}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (448)$$

wo $F = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots . f_9 = \Sigma f$ gesetzt wird.

C. Messung der Arbeitsstärke oder Wasserkraft eines Flusses.

§. 387.

Wenn von der „Wasserkraft" eines Flusses oder Canales die Rede ist, so versteht man darunter nicht, wie man glauben könnte, die Kraft des Wassers, welche dessen Gewicht gleich ist, sondern die mechanische Wirkung, welche das fliessende Wasser in der Zeiteinheit hervorbringt. Es wird also hier keine Kraft, sondern ein durch die Kraft hervorgebrachter Effekt gemessen; der Ausdruck „Wasserkraft" ist somit eben so ungeeignet als der Ausdruck „Pferdekraft" für die Masseinheit, in welcher die Stärke der Wirkung eines Flusses angegeben wird. Diese unrichtigen Bezeichnungen sollte man aus der Mechanik und aus der Technik um so mehr verbannen, als bereits andere und bessere dafür vorgeschlagen sind.

Am beachtenswerthesten in dieser Beziehung erscheinen die Vorschläge von Reuleaux (im 3. Bande des „Civilingenieurs" S. 112 u. s. f.), welche weiter nichts verlangen, als dass man das Wort „Kraft" mit „Intensität" oder „Stärke" vertausche.

Indem wir auf diese Vorschläge eingehen, verstehen wir unter „Pferdestärke" wie bisher unter „Pferdekraft" das Produkt aus der Kraft eines mittelstarken Pferdes und seiner Geschwindigkeit, oder dem Wege, den es in der Zeiteinheit zurücklegt. Die Kraft aber, welche ein mittleres Pferd bei 1 Meter Geschwindigkeit auszuüben im Stande ist, beträgt durchschnittlich 75 Kilogramm; daher ist das Produkt aus der Kraft $P = 75^k$ und der Geschwindigkeit $v = 1^m$ in der Sekunde oder

$$Pv = 75^{km} \text{ in der Sekunde} = 1 \text{ Pferdestärke.}$$

Um den wörtlichen Beisatz („in der Sekunde, Minute, Stunde" etc.) zu vermeiden, schlägt Reuleaux vor, die für die Zeiteinheiten gebräuchlichen Zeichen in wagrechter Lage unter die Bezeichnung der Gewichts- und Masseinheiten zu setzen, so dass also

75^{km} mit „75^{km} in der Sekunde“ und
10^{km} mit „10^{km} in der Minute“

gleichbedeutend ist: wir werden diese Bezeichnung ebenfalls gebrauchen und also

1 Pferdestärke = 75^{km} = $510^{\text{f℔}}$ preuss. = $459^{\text{f℔}}$ bayer.

setzen, wobei f℔ „Fusspfund“ bedeutet und der Beisatz: „preuss., bayer. etc.“ aussagt, dass preussische, bayerische etc. Fusse und Pfunde gemeint sind. Eine Pferdestärke ist somit = 510 ℔ preuss. in der Sekunde 1 preuss. Fuss, oder = 459 ℔ bayer. in der Sekunde 1 bayer. Fuss hoch gehoben.

Ferner ist

für österreichisches	Mass und Gewicht 1 Pferdestärke	= $424^{\text{f℔}}$
„ sächsisches	„ „ „ „ „	= $530^{\text{f℔}}$
„ württembergisches	„ „ „ „ „	= $560^{\text{f℔}}$
„ badisches u. schweizerisches	„ „ „ „ „	= $500^{\text{f℔}}$
„ englisches	„ „ „ „ „	= $542^{\text{f℔}}$

Statt „Wasserkraft eines Flusses“ sagen wir nunmehr „Arbeitstärke eines Flusses“ und drücken dieselbe in Pferdestärken von der vorstehenden Grösse aus.

§. 388.

In der Technik bieten sich gewöhnlich zwei Fälle dar, in denen die Arbeitsstärke eines Wasserlaufes zu bestimmen ist. Es handelt sich nämlich entweder

a) um die Arbeitsstärke eines aufgestauten Wassers, das von einer durch die Localverhältnisse bedingten Höhe herabfallen muss, um durch seine Kraft, d. i. sein Gewicht, einen mechanischen Effekt hervorzubringen; oder es handelt sich

b) um die Arbeitsstärke eines ungestauten fliessenden Wassers, also eines Baches, Flusses oder Werkcanals, in welchen unterschlächtige Wasserräder ohne Gerinne oder sog. Schiffmühlräder eingehängt werden sollen.

Zu a. Um die Arbeitsstärke in dem ersten Falle zu bestimmen, ist es zunächst nöthig, die Wassermenge und das absolute Gefälle zwischen dem oberen und unteren Wasserspiegel genau zu kennen. Wie man die Wassermenge findet, ist aus dem Vorhergehenden bekannt; und was die Messung des absoluten Gefälles betrifft, so ist darüber lediglich zu bemerken, dass dieses durch Nivelliren unter

Beobachtung derselben Vorsichtsmassregeln, welche bei der Aufnahme des Längenprofils eines Flusses zu berücksichtigen sind, geschieht. Der obere Wasserspiegel ist gewöhnlich durch den Aichpfahl (A) des Wasserwerks fixirt; der untere wird an einem eingeschlagenen Grundpfahle (B) gemessen. Hat man den Höhenunterschied u dieser zwei festen Punkte ermittelt, so staut man das Wasser bis zur Aiche und nimmt alsdann das Stichmass am unteren Pfahle B bis zum Wasserspiegel = v. Man darf nun nicht sofort das wirksame Gesammtgefälle = u + v setzen, sondern muss davon einen gewissen Betrag ε abziehen, welcher das Gefälle des Unterwassers von A bis B vorstellt. Bezeichnet α dieses Gefälle (welches zwischen 0,001 und 0,002 wechselt) und ist δ der Horizontalabstand AB, so hat man $\varepsilon = \alpha\delta$ und daher das in Rechnung zu bringende absolute Gefälle

$$h = u + v - \varepsilon = u + v - \alpha\delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (449)$$

Ist m die sekundliche Wassermenge, für welche die Arbeitsstärke des aufgestauten Werkcanals bestimmt werden soll, und bezeichnet γ das absolute Gewicht der Raumeinheit Wasser: so beträgt das in jeder Sekunde von der Höhe h abfallende Gewicht $m\gamma$ und folglich ist die Arbeitsstärke dieses Gewichtes oder dieser Kraft $= m\gamma h^{\underline{\underline{km}}}$, wenn m in Cubikmetern, h in Metern und γ in Kilogrammen für einen Cubikmeter Wasser ausgedrückt ist. Dagegen ist die Arbeitsstärke des abfallenden Wassers $= m\gamma h^{\underline{\underline{f\,\mathit{g}}}}$ preuss., wenn m in preuss. Cubikfussen, γ in preuss. Pfunden für einen Cubikfuss Wasser und h in preussischen Fussen ausgedrückt ist.

Da 1 Pferdestärke nach dem vorigen Paragraph $= 75^{\underline{\underline{km}}} = 510^{\underline{\underline{f\,\mathit{g}}}}$, so hat man, je nachdem alle Abmessungen in französischem oder preussischem Masse und Gewichte gegeben sind, die Arbeitsstärke des in Rede stehenden Wassers gleich

$$x = \frac{m\gamma h^{\underline{\underline{km}}}}{75^{\underline{\underline{km}}}} = \frac{m\gamma h^{\underline{\underline{f\,\mathit{g}}}}}{510^{\underline{\underline{f\,\mathit{g}}}}} \text{ preuss.}$$

Betrüge z. B. die sekundliche Wassermenge 340 preuss. Cubikfuss und wäre das Gefälle h = 4',5 preuss., so hätte man, da das Gewicht γ eines preuss. Cubikfusses Wasser 66 ℔ preuss. beträgt:

$$x = \frac{340 \cdot 66 \cdot 4.5}{510} = 198 \text{ Pferdestärken.}$$

Von dieser Arbeitsstärke des Wassers würde eine gut construirte Turbine etwa 75% oder 148 Pferdestärken, ein unterschlächtiges

Rad in geradem Gerinne aber nur etwa 33% oder 66 Pferdestärken als Nutzeffekt verwerthen.

Zu b. Der zweite Fall erfordert, dass man die Wassermenge und die mittlere Geschwindigkeit des Flusses oder Canales kennt, dessen Arbeitsstärke bestimmt werden soll. Angenommen, es sey jene = m und diese = v für die Sekunde bekannt, so lässt sich die Berechnung dieses Falles auf die des ersten zurückführen, wenn man erwägt, dass zur Erzeugung der Geschwindigkeit v eine Druckhöhe h erfordert wird, welche sich aus der Gleichung

$$v = \sqrt{2gh}$$

ergibt, in der g die Beschleunigung der Schwere, also für unsere Gegenden die Grösse 9,81 Meter oder 31,25 preuss. Fuss vorstellt. Da hiernach

$$h = \frac{v^2}{2g}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (450)$$

so erhält man, wenn wieder γ das Gewicht der Raumeinheit Wasser bezeichnet, die Arbeitsstärke des Wasserlaufs in der Sekunde gleich

$$m\gamma h = m\gamma \cdot \frac{v^2}{2g} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m\gamma}{g} \cdot v^2 \quad . \quad . \quad . \quad (451)$$

Aus der Dynamik ist bekannt, dass der Quotient aus der Beschleunigung (g) in das Gewicht ($m\gamma$) eines Körpers dessen Masse vorstellt; setzen wir daher

$$\frac{m\gamma}{g} = M,$$

so folgt aus der letzten Gleichung

$$m\gamma h = \tfrac{1}{2} M v^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (452)$$

womit nachgewiesen ist, dass die Arbeitsstärke des ungestauten Wasserlaufs nichts anderes als seine „lebendige Kraft“ ist.

Zur Berechnung der Arbeitsstärke des genannten Wasserlaufs in Pferdestärken dient somit, wenn h aus der Gleichung (450) berechnet ist, wieder die Gleichung:

$$x = \frac{m\gamma h^{\underline{\underline{km}}}}{75^{\underline{\underline{km}}}} = \frac{m\gamma h^{\underline{\underline{f\,\mathfrak{T}}}}}{510^{\underline{\underline{f\,\mathfrak{T}}}}} \text{ preuss.}$$

Zur schnellen Berechnung von h in den nachstehenden Masseinheiten dienen folgende Ausdrücke, wenn in denselben v in der gleichen Masseinheit und für die Sekunde eingesetzt wird:

$$h = 0{,}05097\ v^2 \text{ Meter},$$
$$h = 0{,}01600\ v^2 \text{ Fuss preuss.}$$

$h = 0{,}01611\ v^2$ Fuss österr.
$h = 0{,}01488\ v^2$ „ bayr. und hannov.
$h = 0{,}01529\ v^2$ „ badisch und schweiz.
$h = 0{,}01444\ v^2$ „ sächsisch,
$h = 0{,}01460\ v^2$ „ württemb.
$h = 0{,}01554\ v^2$ „ englisch.

Fliesst in einem Bache bei einer mittleren Geschwindigkeit von 4,'1 bayer. in der Sekunde eine Wassermenge von 222 Cubikfuss bayer. ab und beträgt das absolute Gewicht eines bayer. Cubikfusses Wasser 44,4 ℔ bayer., so hat man zunächst die Geschwindigkeitshöhe nach der vierten der vorstehenden Gleichungen:

$$h = 0{,}01488 \cdot 1681 = 0{,}'25$$

und hierauf die Arbeitsstärke des Bachs

$$x = \frac{222 \cdot 44{,}4 \cdot 0{,}25}{459} = 5{,}3 \text{ Pferdestärken.}$$

Wir können diesen Gegenstand nicht beschliessen, ohne auf einen argen Missgriff hinzuweisen, den manche ausübende und sogar docirende Techniker bei der Berechnung der Arbeitsstärke eines ungestauten Wasserlaufs machen, indem sie aus Unkenntniss der ersten Elemente der Dynamik statt der Geschwindigkeitshöhe h des Wassers dessen Geschwindigkeit v selbst setzen. Die Folgen eines solchen unverzeihlichen Fehlers, welcher die Arbeitsstärke eines ungestauten Wassers viel zu gross angibt und den man kaum für möglich halten sollte, treffen leider immer die Wasserwerkbesitzer, welche dem Urtheile eines technischen Quacksalbers Zutrauen geschenkt haben.

Dritte Abtheilung.

Die Lehre von der bildlichen Darstellung des Gemessenen oder dem Entwerfen der Karten und Pläne.

Theorie der Plan- und Kartenzeichnung.

§. 389.

Jede geometrische Aufnahme, geschehe sie auf oder unter der Erde und bestehe sie in Horizontal- oder Vertikalmessungen oder in beiden zugleich, erhält ihren vollständigen Abschluss erst durch das Bild, welches die Messungsresultate zur Anschauung bringt. Dieses Bild heisst nach §. 7 ein Plan, wenn es nur einen so kleinen Theil der Erdoberfläche oder der Erdrinde umfasst, dass bei dessen Darstellung die Kugelgestalt der Erde unberücksichtigt bleiben kann; dagegen eine Karte, wenn die darzustellende Fläche so gross ist, dass die Erdkrümmung berücksichtigt werden muss. Hieraus entspringt eine verschiedene Art der Darstellung, in so ferne die Pläne geometrisch-ähnliche, die Karten aber nur mehr oder minder verzerrte Bilder liefern, und in so ferne jene ein unmittelbares Abgreifen von Massen gestatten, diese aber stets eine (wenn auch einfache) Berechnung der Entfernungen erfordern. Es erscheint daher für die Lösung der Aufgabe dieser dritten Abtheilung: zu zeigen, wie die Ergebnisse der auf oder unter der Erdoberfläche vorgenommenen Messungen bildlich darzustellen sind, zweckmässig, die Theorie der Planzeichnung von jener der Kartenzeichnung zu trennen, wie hier auch geschieht.

Erster Abschnitt.

Kartenzeichnung.

§. 390.

Als Grund, wesshalb die Karten keine geometrisch-treuen Abbildungen der darzustellenden Theile der Erdoberfläche seyn können, ist schon in der Einleitung die Unmöglichkeit, eine Kugelfläche und das von ihr getragene Bild in eine Ebene abzuwickeln, bezeichnet worden. Kann aber die Aehnlichkeit der natürlichen und abgebildeten Formen nicht vollständig erreicht werden, so besteht jedenfalls für die Lehre von der Kartenzeichnung die Aufgabe, die Hilfsmittel anzugeben, durch welche die Abbildung der Erdoberfläche oder einzelner Theile derselben entweder mit der grössten Uebersichtlichkeit oder mit der kleinsten Abweichung von der Wahrheit geschehen kann.

Die Hilfsmittel, deren man sich zum Entwerfen von Karten bedient, sind zunächst gewisse Systeme von Linien, welche die auf der Erdoberfläche vorhanden gedachten Meridiane und Parallelkreise in der Ebene der Karte vorstellen, und in welche sich alle bemerkenswerthen Orte und Terrainpunkte nach ihren geographischen Längen und Breiten eintragen lassen. Diese Liniensysteme heissen Grad- oder Kartennetze und werden auf zwei verschiedenen Wegen erhalten.

Der eine Weg besteht darin, dass man die darzustellende Erdfläche so abbildet, wie sie von einem gegebenen Standpunkte (dem Aug- oder Gesichtspunkte) aus auf einer gleichfalls gegebenen Ebene (der Projections- oder Bildebene) erscheinen würde, wenn diese Ebene und der Erdkörper durchsichtig wären. Dieses Verfahren beruht, wie man bemerkt, auf den Grundsätzen der Perspektive, wesshalb auch die durch dasselbe entworfenen Karten perspektivische Projectionen heissen. Diese Projectionen, welche nach der Lage des Augpunktes und der Bildebene verschieden benannt werden, gewähren im Vergleich zu den folgenden nur wenig Genauigkeit und lassen ohne umständliche Berechnung gar keine Vergleichung von Linien- und Winkelverhältnissen zu; dagegen aber sind sie geeignet, einen Ueberblick grosser Flächen zu gewähren,

und aus diesem Grunde wendet man sie auch bei Darstellung von Hälften der Erdkugel an.

Der andere Weg, Grad- oder Kartennetze zu entwerfen, ist nur für die Darstellung kleinerer Theile der Erdoberfläche, z. B. eines Staates, einer Provinz etc. anwendbar, da er darauf beruht, den betreffenden Theil der Kugelfläche durch eine Kegel- oder Cylinderfläche zu ersetzen, welche sich der Kugel möglichst nahe anschliesst. Da sich die konischen und cylindrischen Flächen in eine Ebene abwickeln lassen, so kann man die auf ihnen gemachten Projectionen von Punkten und Linien der Erdkugel abwickelbare Projectionen nennen und sie nach der Form der abwickelbaren Fläche und der Art, die Meridiane und Parallelkreise darzustellen, unterscheiden.

Ausser den Kartennetzen erscheinen als weitere Hilfsmittel für die Abbildung von Theilen der Erdoberfläche die verschiedenen Zeichen, durch welche man entweder den Zweck und die Beschaffenheit der dargestellten räumlichen Gegenstände andeutet, oder die abgebildeten Gegenstände benennt und über gewisse, durch Figuren nicht darstellbare Verhältnisse Aufschluss gibt. Es sind also zwei Classen von Zeichen zu unterscheiden, wovon man die ersteren Kartenzeichen, und die zweiten Kartenschrift nennen kann. Auf den meisten Karten sind zwar die angewendeten Zeichen erklärt und die Schrift ist für sich verständlich; gleichwohl aber darf es in einer Theorie der Kartenzeichnung nicht unterlassen werden, Einiges über die Wahl der Zeichen und der Schrift zu bemerken.

A. Perspectivische Projectionen.

1) Stereographische Projectionen.

§. 391.

Mit diesem Namen bezeichnet man diejenigen perspectivischen Projectionen der Erdoberfläche, bei welchen der Augpunkt in endlicher Entfernung von der darzustellenden Fläche liegt. Gewöhnlich nimmt man diesen Punkt nur auf der Erdoberfläche oder im Mittelpunkte derselben an; selten oder fast gar nie ausserhalb der Erde oder ausserhalb ihres Mittelpunktes.

Liegt der Augpunkt in einem Pole der Erde, so dient der Aequator als Projections- oder Bildebene für die jenem Punkte gegenüberliegende Halbkugel der Erde. Diese Lage des Augpunktes

und der Bildebene charakterisirt die stereographische Polarprojection oder auch die stereographische Projection auf den Aequator.

Befindet sich der Augpunkt im Aequator, so geschieht die Projection der gegenüberstehenden Kugelfläche auf die Ebene desjenigen Erdmeridians, welcher auf dem durch den Augpunkt gezogenen Halbmesser senkrecht steht: Diese Art der Abbildung nennt man die stereographische Aequatorialprojection oder auch die stereographische Projection auf einen Meridian.

Wird der Augpunkt irgendwo auf der Erdoberfläche angenommen, so bildet man die ihm gegenüberliegende Kugelfläche auf der grössten Kreisebene ab, welche mit dem Halbmesser des Augpunktes einen rechten Winkel bildet. Da hier die Bildebene mit der scheinbaren Horizontalebene des Augpunktes parallel ist, so nennt man diese Darstellungsweise die stereographische Horizontalprojection oder auch die stereographische Projection auf den Horizont.

Wählt man endlich den Erdmittelpunkt zum Augpunkt und eine der Mitte der darzustellenden Kugelfläche angehörige scheinbare Horizontalebene zur Bildebene, so geschieht die Abbildung durch die Centralprojection.

§. 392.

Die stereographische Polarprojection ist die einfachste unter allen stereographischen Projectionen, weil sie alle Meridiane der Erde als Durchmesser des Aequators und alle Parallelkreise als concentrische Kreise erscheinen lässt (Fig. 458). Diese Behauptung bedarf wohl keines Beweises, da sie sich unmittelbar aus der geometrischen Anschauung des vorliegenden Falles ergibt. Ebenso wird man sich sofort überzeugen, dass die Polarprojection die abgebildeten Flächen in der Mitte am wenigsten, an den Rändern aber am meisten verzerrt, und dass daher die mittleren Partieen einer in dieser Projection gezeichneten Karte verhältnissmässig richtiger sind als die äusseren.

Will man den Halbmesser ϱ eines auf den Aequator zu projicirenden Parallelkreises GH bestimmen, dessen geographische Breite $GCE = \varphi$ gegeben ist, so kann dieses sehr leicht geschehen. Zunächst ist nämlich, wenn r den Erdhalbmesser bezeichnet, der

Halbmesser des abzubildenden Parallelkreises $= \frac{1}{2}$ GH $= r \cos \varphi$ und es beträgt dessen Abstand vom Erdmittelpunkte $r \sin \varphi$ und vom Augpunkte P im Pole $r + r \sin \varphi = r(1 + \sin \varphi)$. Es findet somit wegen der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke GHP und ghP die Proportion statt:

$$1 + \sin \varphi : \cos \varphi = r : \varrho,$$

woraus mit Rücksicht auf eine trigonometrische Umformung folgt:

$$\varrho = r \operatorname{tg} (45^0 - \tfrac{1}{2} \varphi) . \quad (453)$$

Aus der Figur folgt übrigens auch sehr einfach $\sphericalangle$ GPC $= 45^0 - \frac{1}{2} \varphi$, und aus dem rechtwinkeligen Dreiecke gCP der vorstehende Werth von ϱ.

Fig. 458.

Mit Hilfe des berechneten und im Massstab der Karte ausgedrückten Werths von ϱ lässt sich somit der Parallelkreis zeichnen, auf dem ein gegebener Punkt von der Breite φ liegt; kennt man nun noch dessen geographische Länge λ, so kann der Meridian angegeben werden, welcher zu dieser Länge gehört und dessen Schnitt mit dem Parallelkreis die Projection des Punktes φ, λ auf der Karte bestimmt. Wie man umgekehrt aus einem auf der Karte gegebenen Punkte dessen Breite und Länge (φ und λ) finden kann, wenn der Kartenmassstab bekannt ist, bedarf wohl keiner Erläuterung.

Soll in der stereographischen Polarprojection einer Halbkugel ein grösster Kreis angegeben werden, welcher eine beliebige Neigung φ gegen die Aequatorebene hat, so kann dieses leicht geschehen; denn erstens ist die Projection des genannten Kreises nach §. 393 auch ein Kreis; zweitens schneidet dieser Kreis und seine Projection den Aequator und dessen Projection in zwei leicht zu bestimmenden Punkten; und drittens lässt sich der Durchmesser der Projection ohne Schwierigkeit construiren und berechnen. Stellt nämlich in Fig. 459

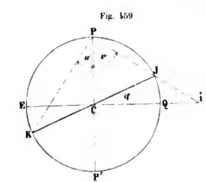


Fig. 459

der Punkt P den Pol, EQ den Aequator, KJ den zu projieirenden grössten Kreis und PKP'Q einen Meridian vor, der auf der Schnittlinie von EQ und JK senkrecht steht: so ist klar, dass die von P aus gezogenen Gesichtslinien PK und PJ die Projectionen k und i von K und J ergeben, und dass demnaeh der Durchmesser KJ des zu projicirenden grössten Kreises sich in der Länge $ki = kC + Ci = \delta$ abbildet. Um δ zu berechnen hat man nach der Figur:

$$kC = PC \cdot tg\, u = r\, tg\,(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi)$$
$$iC = PC \cdot tg\, v = r\, tg\,(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi)$$

und mit Rücksicht darauf, dass $tg\,(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi) = cot(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi)$,

$$\delta = kC + iC = r\, tg\,(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi) + cot\,(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi) = 2r \sec\varphi \quad (454)$$

Der Halbmesser des Kreises ki hat somit die Länge $r \sec\varphi$.[1]

In Fig. 458 stellt die Linie xyz die stereographisehe Polarprojeetion eines grössten Kreises, dessen Ebene mit dem Aequator einen Winkel von 50° bildet, vor: denkt man sich an die Erdkugel eine Tangentialebene gelegt, welche diesem grössten Kreise parallel ist, so hat der Berührungspunkt eine geographisehe Breite von 50° und die Tangentialebene schneidet am Sternenhimmel den seheinbaren Horizont dieses Punktes ab. Umgekehrt ist also XYZ die Projeetion des grössten Kreises, dessen Ebene dem seheinbaren Horizonte eines Ortes von 50° Breite parallel läuft, und welehe in ihrer unendliehen Erweiterung die Himmelskugel nach dem wahren astronomisehen Horizonte sehneidet. Da nun der Halbmesser der Himmelskugel im Verhältniss zu dem der Erdkugel unendlich gross ist, so fällt der wahre astronomisehe Horizont mit dem scheinbaren zusammen, und desshalb kann man die Linie XYZ auch die Projection des astronomischen Horizontes eines Orts von 50° geographischer Breite nennen. Welchem Orte von 50° Breite dieser Horizont angehört, wird durch

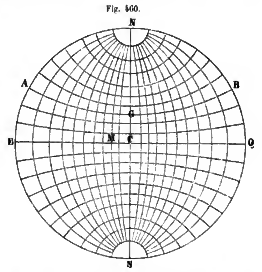
[1] Salneuve findet in seinem Cours de topographie etc. Nr. 413 den Halbmesser $= r\, cosec\,\varphi$, was davon herrührt, dass er in seiner Entwickelung $\frac{1}{\sin 2x} = \sec 2x$ setzt, was unrichtig ist.

die geographische Länge des Punktes Z oder des Meridians PZ bestimmt. Betrüge diese Länge z. B. 32° östlich, so würde XYZ nahezu der Horizont von Prag seyn.

§. 393.

Die **stereographische Aequatorialprojection** liefert ein Netz von Linien, welches aus lauter Kreisbögen besteht, mit Ausnahme des Aequators und des durch den Augpunkt gehenden Meridians, welche beide als gerade Linien erscheinen. In Fig. 460, welche eine vollständige Projection dieser Art darstellt, ist C der Augpunkt, EQ der Aequator, SCN der Meridian des Augpunktes und ANQS der Meridian, welcher als Bildebene dient.

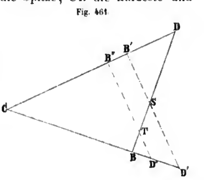
Fig. 460.



Dass die Projectionen der Meridiane und Parallelen wirklich Kreisbögen sind, lässt sich sowohl auf analytischem als geometrischem Wege leicht beweisen. Der letztere Weg ist der anschaulichere und desshalb hier vorzuziehen. Er fordert jedoch eine kurze Vorbereitung.

Stellt in Fig. 461 der Punkt C die Spitze, CB die kürzeste und CD die längste Erzeugende eines schiefen Kegels von **kreisförmiger** Basis vor; macht man CB′ = CB, CD′ = CD, und denkt sich durch B′D′ eine zu CBD senkrechte Ebene gelegt: so schneidet diese den schiefen Kegel CBD nach einem Kreise. Denn da die Basen BD, B′D′ eine Sehne S gemeinschaftlich haben, und, wenn man

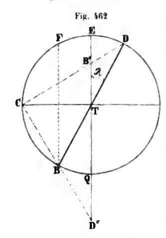
Fig. 461.



die Ebene B′D′ um die Sehne S so dreht, dass B′ auf B und D′ auf D trifft, der Kegelschnitt B′D′ mit dem Kreis BD im Ganzen vier Punkte gemeinsam hat: so ist klar, dass der Kegelschnitt B′D′ ebenfalls nur ein Kreis seyn kann. Folglich ist auch jeder mit B′D′ parallele Schnitt B″D″ ein Kreis. Die Linien B′D′ und B″D″ sind, jede für sich, zu BD **antiparallel**, weil sie mit den CB und CD Winkel bilden, welche BD beziehungsweise mit CD und CB einschliesst, oder weil sie mit BD erst parallel werden, wenn man die Ebenen CB′D′ und CB″D″ um 180° so dreht, dass der Schenkel CB′ auf CB und CD′ auf CD fällt.

Die von dem Augpunkte ausgehenden und die Meridiane und Parallelkreise berührenden Gesichtsstrahlen bilden mit diesen lauter schiefe Kegel von kreisförmiger Basis, welche alle ihre Spitze in dem Augpunkte haben und von der als Bildebene dienenden Hauptmeridianebene geschnitten werden. Es lässt sich also auf sie der vorhergehende Satz anwenden, so bald man sich überzeugt hat, dass die schneidende Bildebene gegen den Kegelkreis so liegt, wie es Fig. 461 verlangt. Dieses ist aber der Fall; denn stellt C (Fig. 462) den Augpunkt, EQ den Schnitt der Bildebene mit der darauf senkrechtstehenden Aequatorebene, CEDQ und BD den Schnitt dieser Ebene mit einem beliebigen Meridiane vor: so ist CBD der vorhin besprochene schiefe Kegel mit kreisförmiger Basis und CB″D″ der durch die Bildebene erzeugte antiparallele Kegel, weil hier, wie in Fig. 461, das Dreieck B″DT dem Dreiecke BTD″ ähnlich ist.

Fig. 462

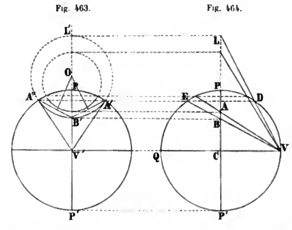


Aus Fig. 462 folgt auch sofort, dass alle projicirten Meridiane zwei Punkte, die Erdpole (N, S, Fig. 460), gemein haben, und dass folglich ihre Mittelpunkte auf der Linie liegen müssen, nach welcher sich die Bildebene und der Aequator schneiden (EQ, Fig. 462). Da zwei Punkte dieser Kreise gegeben sind, so lassen sie sich zeichnen, sobald man ihre Halbmesser kennt; diese sind aber nach Fig. 462 und Gleichung (454) gleich

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\,(B''D'') = r \sec \lambda, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (455)$$

wenn λ den geographischen Längenuntersehied zwischen dem Meridiane, dessen Projection gesucht wird, und dem, der die Bildebene ist, bezeichnet.

Die Projectionen der Parallelen von denen schon bekannt ist, dass sie unter einer gewissen Bedingung Kreise sind, werden in ähnlicher Weise gefunden. Stellt nämlich (Fig. 464) V den Gesichts-



punkt, VQ den Aequator, VPQ einen durch V gelegten Meridian, PP' die Spur der Bildebene und DE die irgend eines Parallels vor: so bestimmt sich der projieirende Kegel durch die Strahlen VD und VE, welche die Bildebene in den Punkten L und B schneiden. Der von der Bildebene erzeugte Kegelschnitt ist aber ein Kreis, sobald der Kegel VLB dem Kegel VDE, oder auch sobald die Basis LB der Basis DE antiparallel, d. h. das Dreieck ALD dem Dreiecke ABE ähnlich ist. Dieses ist aber der Fall; denn man überzeugt sich leicht, dass ausser den Scheitelwinkeln bei A auch die Winkel bei E und L gleich sind. In Fig. 463, welche die Bildebene vorstellt, ist L'A''B'A'' der projieirte Parallelkreiss DE; in der Projection erscheint jedoch nur das ausgezogene Stück A''BA'. So wie dieses sind alle Parallelenprojectionen gegen den Aequator V'Q in Fig. 463 und EQ in Fig. 460 convex. Der Mittelpunkt des Kreises L'A''B'A' ist durch Construction leicht zu finden, weil er in der Mitte von B'L', und, wenn man L' nicht hätte, auf den Normalen liegen muss, welche in der Mitte der Sehnen A'B', A''B' errichtet werden können.

Will man den Halbmesser B'O des Parallels A'B'A" berechnen, so kann dieses geschehen, indem man die Länge $LB = \delta'$ sucht und halbirt. Es ist aber nach Fig. 464:

$$AB = AE \cdot tg\,(DEV) = AE \cdot tg\,\varepsilon$$
$$AL = AD \cdot cot\,(ALD) = AD \cdot cot\,\varepsilon$$

und da $AD = AE = r \cos \varphi$, wenn φ die Breite des Parallels vorstellt:

$$\delta' = AB + AL = r \cos \varphi\,(tg\,\varepsilon + cot\,\varepsilon) = \frac{2\,r \cos \varphi}{\sin 2\,\varepsilon}.$$

Denkt man sich in Fig. 464 die Linie CD gezogen, so stehen die Centriwinkel φ und der Peripheriewinkel $DEV = E$ auf einerlei Bogen DV; daher ist $\varepsilon = \frac{1}{2}\varphi$ und $\sin 2\,\varepsilon = \sin \varphi$, mithin auch

$$\delta' = LB = 2\,r \cot \varphi \quad \ldots\ldots \quad (456)$$

und somit der Halbmesser des Parallels $A'B''A'' = r \cot \varphi$.

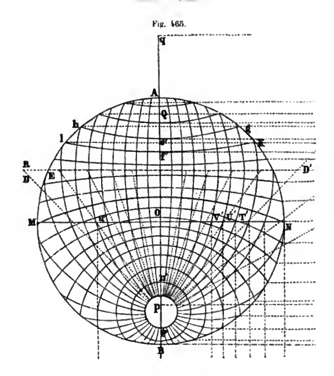
Die stereographische Aequatorialprojection wird zur Darstellung der östlichen und westlichen Halbkugel der Erde benützt; ihre Abweichungen von der wahren Gestalt der abgebildeten Theile sind im Gegensatze zur stereographischen Polarprojection in der Mitte (bei C) am grössten und werden gegen die Ränder hin verhältnissmässig kleiner; überdiess bringt sie durch die Excentricität der Parallelkreise das Unbequeme mit sich, dass selbst Orte von gleicher Breite nicht mit einem und demselben Masse bestimmt werden können: strenge genommen wird jeder Punkt nur aus seinem Meridian und Parallelkreise, also mit Hilfe der Gleichungen (455) und (456) gefunden.

§. 394.

Die stereographische Horizontalprojection ist zusammengesetzter als jede der vorhergehenden; doch erscheinen auch hier die Projectionen der Meridiane und Parallelen als Kreise, deren Halbmesser und Mittelpunkte leicht bestimmt werden können, was die Construction des Netzes erleichtert. Wir werden uns zunächst mit den Projectionen der Meridiane befassen.

In den Figuren 465 und 466 stellen O, O' die Augpunkte, P, P' und Q, Q' die Erdpole, PQ, P'Q' die Erdaxe und AB, A'B' den Durchmesser des grössten Kreises vor, welcher als Bildebene dient und nach §. 390 von dem Augpunkte um 90° absteht. Die Bildebene ist in Fig. 465 durch den Kreis MANB begrenzt und in Fig. 466 stellt A'B' ihren Schnitt mit einem Meridiane O'Q'P' vor, welcher durch den Augpunkt geht.

Fig. 465.

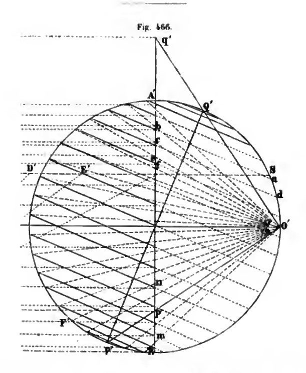


Zieht man von der Kegelspitze O' aus die Erzeugenden $O'P', O'Q'$, so treffen diese die Bildebene in p', q' (Fig. 466) und p, q (Fig. 465). Da alle Erdmeridiane durch die Pole gehen, so müssen offenbar auch die Projectionen der Meridiane durch die projicirten Pole p, q gehen. Beweist man nun noch, dass die Meridianprojectionen Kreise sind, so liegen offenbar ihre Mittelpunkte auf der Linie RS, welche pq halbirt und senkrecht darauf steht.

Dass aber die Meridianprojectionen Kreise seyn müssen, folgt aus dem leicht zu erweisenden Umstande, dass die Basis $P'Q'$ des Kegels $O'P'Q'$, welche allen Meridianen zukommt, dem Schnitte $p'q'$ durch die Bildebene $A'B'$ antiparallel ist (§. 392). Stellt nun $p'q' = pq$ eine Sehne eines jeden projicirten Meridians vor, so ist klar, dass die Senkrechte auf ihrer Mitte (RS) der geometrische Ort der Mittelpunkte aller jener Meridianprojectionen ist.

Denkt man sich diese Projectionen wie in Fig. 465 gezogen, in dem Pole p Tangenten pD, pE... an sie gelegt und darauf Senkrechte pD', pE'... errichtet: so stellen die Punkte D', E'... offenbar

Fig. 466.



die Mittelpunkte der von p ausgehenden Kreise vor, welche von den Tangenten pD, pE... berührt werden.

Will man nun den Mittelpunkt der Projection pu' eines bestimmten Meridians finden, so muss man den Winkel $Dpq = \lambda'$ kennen, den diese Projection oder ihre Tangente pD mit der Projection des Hauptmeridians AB einschliesst. Trägt man alsdann diesen Winkel bei p an pq gleich qpD an und zieht pD' senkrecht auf pD, so ist D' der gesuchte Mittelpunkt, aus dem der Meridian pu'q mit dem Halbmesser $\rho = D'p$ beschrieben wird.

Der Winkel λ' ist aber merkwürdigerweise dem Längenunterschiede λ zwischem einem beliebigen Meridian und dem durch den Augpunkt gehenden Hauptmeridian AOB gleich.[1] Denn stellt in Fig. 467 der Punkt C den Mittelpunkt und P' den Pol der Erde vor;

[1] Wenn Salneuve in seinem Cours de topographie (Nr. 419) behauptet, zwischen λ', λ und β (der geographischen Breite des Augpunktes) bestehe die Relation. $\operatorname{tg}\lambda' = \operatorname{tg}\lambda \,.\, \sin\beta$, so irrt er darin, dass er den Scheitel P des Winkels λ nach dem Mittelpunkte C der Erde und nicht nach dem perspectivischen Bildpunkte p' (Fig. 466) projicirt.

ist ferner JCK ein Theil der Bildebene, welche mit der Erdaxe P'C den Winkel β einschliesst; bezeichnet weiter JP' den Hauptmeridian und P'K einen anderen um den Winkel λ von ersterem abliegenden Meridian; und ist endlich P'O' die Gesichtslinie des Punktes P', also p' das Bild von P': so wird die Bildebene durch die Ebene JP'O, nach Jp' und durch die Ebene KP'O nach Kp' geschnitten, so dass $\angle$ Jp'K $= \lambda'$ die perspektivische Projection von λ ist. Erwägt man nun, dass der Winkel $CP'O' = P'O'C = 45^0 - \frac{1}{2}\beta$ und $P'p'J = p'CP' + CP'O' = 45^0 + \frac{1}{2}\beta$; ferner dass $CP'J = 90^0$, also $p'P'J = 90^0 - CP'O' = 45^0 + \frac{1}{2}\beta = P'p'J$: so ist das Dreieck JP'p' gleichschenkelig, also $JP' = Jp'$. Da nun vermöge der Construction die beiden Dreiecke JKP' und JKp' bei J rechtwinkelig sind und die gleichen Seiten JK und JP', Jp' haben; so sind dieselben congruent, und folglich ist der Winkel $\lambda' = \lambda$, was zu beweisen war.

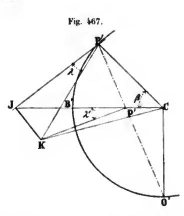


Fig. 467.

Soll die Länge des Krümmungshalbmessers $\varrho = D'p$ berechnet werden, so hat man dazu fürs Erste den mit Hilfe der Fig. 465 leicht zu bildenden Ausdruck:

$$2\,\varrho \sin \lambda' = p'q' = pq,$$

und hiernächst nach Fig. 466 die Länge $p'q' = pq = p'C + Cq'$. Da aber

$$p'C = r \operatorname{tg}(CO'p') = r \operatorname{tg}(45^0 - \tfrac{1}{2}\beta)$$
$$q'C = r \operatorname{tg}(CO'q') = r \cot(45^0 - \tfrac{1}{2}\beta),$$

so erhält man durch Addition und einfache Reduction:

$$p'q' = \frac{2\,r}{\sin(90^0 - \beta)} = \frac{2\,r}{\cos\beta} = 2\,r \sec\beta;$$

mithin auch durch Substitution dieses Werthes von p'q' in die Grundgleichung:

$$\varrho = \frac{r}{\cos\beta \sin\lambda'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (457)$$

Für $\beta = o$, d. h. wenn der Augpunkt im Aequator liegt, geht die stereographische Horizontalprojection in die stereographische Aequatorialprojection über und man erhält

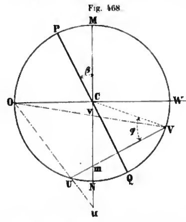
$$\varrho = \frac{r}{\sin \lambda'}.$$

Vergleicht man aber diesen Ausdruck mit dem in Nr. 455 für ϱ gefundenen, so existirt in so ferne eine Verschiedenheit als dort

$$\varrho = r \sec \lambda = \frac{r}{\cos \lambda}$$

steht. Dieser Unterschied verschwindet aber, wenn man bedenkt, dass das λ des letzteren Ausdrucks das Complement von λ' im ersteren ist; dass somit $\lambda' = 90^0 - \lambda$ und folglich $\sin \lambda' = \cos \lambda$ ist. Es geht also, wie es seyn muss, für $\beta = o$ die Horizontalprojection bezüglich der Meridiane in die Aequatorialprojection über.

Fig. 468



Dass auch die Projectionen der Parallelen Kreise sind, lässt sich wie folgt beweisen. Stellt O in Fig. 468 den Gesichtspunkt, OMN einen durch O gelegten und auf der Bildebene MN senkrecht stehenden grössten Kreis, PQ die Erdaxe und UV den Schnitt eines Parallels vor: so geben offenbar die Gesichtslinien OV, OU die Bilder v, u der Endpunkte des Parallelendurchmessers VU, und es wird der Perspektivkegel VOU von der Bildebene MN antiparallel geschnitten, weil das Dreieck vmV dem Dreiecke umU wegen der gleichen Winkel bei m und jener bei V und u ähnlich ist. Liegt aber vu antiparallel zu VU, so sind auch die Schnitte der Bildebene mit dem Kegel OVU nach §. 392 Kreise.

Nach dieser Vorbereitung ist die Zeichnung der perspektivischen Parallele nicht schwierig. Denn handelt es sich z. B. um das Parallel B'F' (Fig. 466), so sind n, m die Bilder der Endpunkte des Durchmessers B'F': halbirt man nun mn und projicirt den Mittelpunkt auf die Linie AB der Fig. 465, so hat man den Mittelpunkt des Perspektivparallels Bn', welches mit dem Halbmesser $\frac{1}{2}$ (mn) beschrieben wird. Von dem Parallel ab (Fig. 466) kann der Schnittpunkt des Strahls O'a mit der Bildebene A'B' nicht erhalten werden, man muss sich desshalb begnügen, die ihm entsprechende Projection

Fig. 465.

Fig. 466.

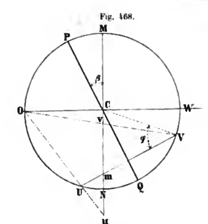


Fig. 468.

$h c' g$ (Fig. 465) aus den drei Punkten c', h, g zu zeichnen. Der Punkt c' ergibt sich als das eine Ende des Durchmessers von a b wie bisher; h und g aber entsprechen dem Schnitte b der Ebene des Parallels a b mit der Axe $A'B'$ und erscheinen auf der Bildebene offenbar am Kreise A N B M. Dass alle parallelen Mittelpunkte auf der Linie A B liegen müssen, ist wohl für sich klar.

Zur Berechnung des Halbmessers ϱ' der projicirten Parallelkreise kann man sich der Fig. 468 bedienen. Der Durchmesser $2\varrho'$ ist offenbar $= vu = Cu - Cv$, und da nach der Figur:

$$Cu = r \operatorname{tg} (COu) = r \operatorname{tg} (90^0 - \tfrac{1}{2}[\varphi + \beta]) = r \cot \tfrac{1}{2} (\varphi + \beta),$$

$$Cv = r \operatorname{tg} (COv) = r \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (V C W) \quad = r \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\varphi - \beta),$$

so folgt

$$\varrho' = \frac{r \cos \varphi}{2 \sin \tfrac{1}{2} (\varphi + \beta) \cos \tfrac{1}{2} (\varphi - \beta)} = \frac{r \cos \varphi}{\sin \varphi + \sin \beta} \quad (458)$$

Ist $\beta = o$, so wird $\varrho' = r \cot \varphi$, was mit der Gleichung (456) übereinstimmt und übereinstimmen muss, da die stereographische Aequatorialprojection nur ein besonderer Fall der stereographischen Horizontalprojection ist. Dasselbe gilt von der stereographischen Polarprojection; denn setzt man in den Gleichungen (457) und (458) $\beta = 90^0$, so wird, den Entwicklungen des §. 391 entsprechend:

$$\varrho = \infty \text{ und } \varrho' = r \operatorname{tg} (45^0 - \tfrac{1}{2} \varphi).$$

§. 395.

Die **Centralprojection** liefert Netze, in welchen die Meridiane als gerade Linien erscheinen, die sich im Pole der Erde schneiden, während die Parallelen je nach der Lage der Bildebene als Theile von Kreisen, Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln erscheinen. Als Kreise stellen sich die Parallele, wie man leicht einsieht, nur dann dar, wenn die Bildebene den Pol berührt. In diesem Falle, und wenn gleichzeitig nur ein mässiges Stück der Erdoberfläche in der Umgebung eines Pols abzubilden wäre, liesse sich die Central-

projection mit Vortheil anwenden; in jedem anderen Falle bietet sie viele Unbequemlichkeit wegen der Zeichnung der Parallelen und grosse Unvollkommenheit an den Rändern der Karte. Desshalb wendet man sie fast gar nicht an, und darum findet sie auch hier keine weitere Beachtung.

2) Orthographische Projectionen.

§. 396.

Wenn man den Gesichtspunkt in unendlicher Entfernung auf der Normalen zur Bildebene annimmt, so sind alle projicirenden Linien unter sich parallel und senkrecht zur Bildebene; die hierdurch entstehenden Kartennetze nennt man orthographische Projectionen, und man unterscheidet nach der Lage des Augpunktes: Polar-, Aequatorial- und Horizontalprojectionen, oder Projectionen auf den Aequator, auf einen Meridian, oder auf einen grössten Kreis, welcher der Horizontalebene des in der Mitte der Karte gelegenen Orts parallel und folglich der wahre astronomische Horizont dieses Orts ist.

Im Allgemeinen sind die orthographischen Projectionen noch unvollkommener als die stereographischen, wesshalb sie nur wenig Anwendung finden, den Fall ausgenommen, wo es sich nicht um die Abbildung einer Halbkugel, sondern nur eines kleinen Theils der Erdoberfläche handelt; denn in diesem Falle würde die Bildebene theilweise mit der Kugelfläche zusammenfallen und nur an den Rändern abstehen, woselbst kleine Verzerrungen der Bilder stattfänden.

§. 397.

Die orthographische Polarprojection ist in den Figuren 469 und 470 dargestellt und man macht sich sofort aus dem Anblick klar, dass die Meridiane als Durchmesser (AQ, ER) der durch den Aequator (EARQE'R') vorgestellten Bildebene, und die Parallele als concentrische Kreise erscheinen, deren Mittelpunkte das Bild des Erdpols ist. Die abgebildeten Meridiane haben gegen einander dieselbe Neigung (λ) wie die wirklichen, und die Halbmesser der Parallelkreise (z. B. BD, B'D') sind $r \cos \varphi$, wenn φ die geographische Breite des Parallels bezeichnet.

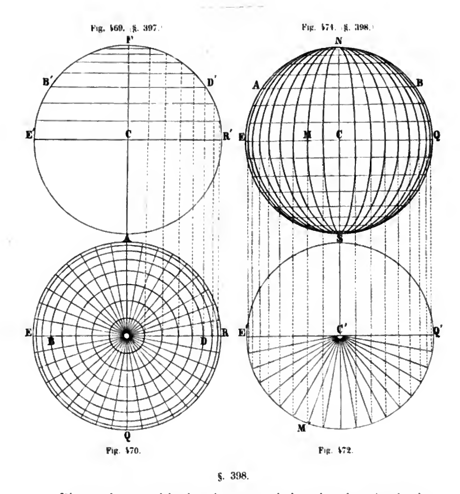


Fig. 470.
Fig. 472.

§. 398.

Die **orthographische Aequatorialprojection** ist in den Figuren 471 und 472 dargestellt. Da der Augpunkt in unendlicher Entfernung auf der Aequatorebene liegt, so laufen alle Gesichtslinien dieser Ebene parallel und folglich erscheinen die Parallele (AB) wie der Aequator (EQ) als gerade Linien. Die Meridiane bilden mit den auf der Bildebene senkrecht stehenden Gesichtslinien schiefe Cylinderflächen von kreisförmiger Basis: die Schnitte dieser Cylinder durch die Bildebene sind folglich Ellipsen, welche alle durch die Pole gehen und daher die Erdaxe SN zur grossen Axe haben; die kleine Axe ergibt sich, wenn man den auf der Erdaxe senkrecht stehenden Durchmesser des Meridians auf die Bildebene projicirt. In den

nebenstehenden Figuren ist für den Meridian $M'C'$ die zugehörige kleine Halbaxe = MC. Mit Hilfe der beiden Axen können die Ellipsen in bekannter Weise aufgetragen werden; genauer aber erhält man sie aus ihren Coordinaten. Sieht man nämlich die grosse Axe SN (Fig. 471) als Abscissenaxe an, so stellen die Projectionen der Parallele (AB, EQ) die Richtungen der Ordinaten vor. Handelt es sich nun um irgend einen Meridian ($M'C'$), dessen Längenunterschied gegen die Bildebene = λ' ist, so sind die beiden Halbaxen der Ellipse, welche ihn vorstellt, r und $r \cos \lambda$, und mithin findet, wenn C den Mittelpunkt der Ellipse und den Anfang der Coordinaten vorstellt, für die Ellipse SMNS die Gleichung statt:

$$y^2 + x^2 \cos^2 \lambda = r^2 \cos^2 \lambda.$$

Berücksichtigt man jedoch, dass $x = r \sin \varphi$, wenn φ die Breite eines Parallels (hier einer Ordinate), so geht vorstehende Gleichung über in

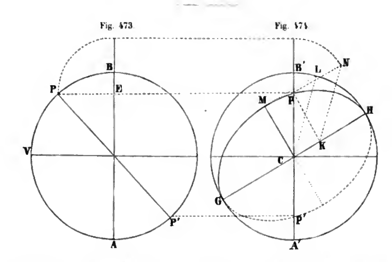
$$y = r \cos \lambda \cos \varphi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (458)$$

woraus man also auf sehr einfache Weise die Lage eines Punktes findet, dessen geographische Länge λ gegen die Bildebene und dessen Breite φ bekannt sind.

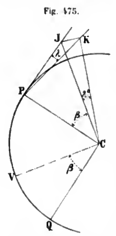
§. 399.

Die orthographische Horizontalprojection setzt als Augpunkt einen unendlich weit entfernten Punkt des Erdhalbmessers, welcher durch die Mitte des abzubildenden Landes geht, und als Bildebene den grössten Kreis, der auf diesem Halbmesser senkrecht steht, voraus.

Um die Projectionen der Meridiane zu finden, denke man sich in Fig. 473 durch einen beliebigen Punkt V, der den Mittelpunkt des abzubildenden Landes vorstellen kann, einen Meridian VPBP′A gelegt und darauf eine senkrechte Ebene AB errichtet, welche der Horizont von V ist. Die Linie PP′ stelle die Erdaxe, also die Linie vor, welche mit dem Punkte V den Meridian VPP′ bestimmt. Bezeichnet Fig. 474 die auf diesem Meridiane nach AB senkrecht stehende Bildebene, so sind auf ihr p, p′ die Projectionen der Erdpole P, P′, durch welche nothwendig alle Meridiane gehen müssen. Da die Projectionen dieser Meridiane aus schiefen Schnitten von Cylinderflächen entstehen, so sind dieselben Ellipsen, von denen man jetzt bereits zwei Punkte p und p′ kennt; und da alle Meridiane durch



die Linie PP' (Fig. 473) gehen und durch die Bildebene AB geschnitten werden, so ist klar, dass der Schnitt dieser Ebene mit jedem Meridian nur ein Durchmesser desselben und zugleich auch nur die grosse Axe seiner elliptischen Projectionen seyn kann. Diese Axe findet man aber wie folgt durch Construction.



Sieht man den durch V gelegten Meridian VPP' als den Hauptmeridian an und bezeichnet λ den geographischen Längenunterschied zwischen diesem und dem Meridian, dessen Projection GMpHp' gesucht wird; ist ferner β die geographische Breite des Punktes V und λ^0 die Projection des Winkels λ auf die Bildebene: so besteht die Relation

$$\operatorname{tg} \lambda^0 = \operatorname{tg} \lambda \sin \beta; \quad . \quad . \quad . \quad (459)$$

denn nach Fig. 475 ist, wenn PJ, PK die Tangenten an die vorhin genannten Meridiane im Pole P und JC, KC ihre Projectionen auf der durch AB gehenden, senkrecht zu VPP' stehenden Bildebene, also JPK, JCK die Winkel λ, λ^0 sind: aus dem bei J rechtwinkeligen Dreiecke PKJ:

$$JK = PJ \,.\, \operatorname{tg} \lambda,$$

und aus dem Dreiecke JKC, welches ebenfalls bei J einen rechten Winkel hat:

$$JK = JC \,.\, \operatorname{tg} \lambda^0.$$

Erwägt man nun, dass $PCJ = \beta$ und folglich $PJ = JC \cdot \sin\beta$ ist, so folgt aus den vorstehenden zwei Gleichungen die mit (459) bezeichnete, deren Richtigkeit somit feststeht.

Da der Durchmesser $A'B'$ in Fig. 474 die Projection des ersten Meridans VPP' ist, so braucht man, um den Schnitt des Meridians λ mit der Bildebene zu erhalten, nur den aus Gleichung (459) berechneten Winkel λ^0 an $A'B'$ in C anzutragen und einen Durchmesser zu ziehen, so ist dieser die grosse Axe des projicirten Meridians. Angenommen nun, es sey $B'CH = \lambda^0$, so ist GH die gesuchte grosse Axe und die Senkrechte CM die Richtung der kleinen Axe. Die Länge CM derselben ergibt sich, wenn man auf die in der Figur durch punktirte Linien angedeutete Weise $pKN = \lambda$ macht, CL parallel zu KN zieht und den Schnittpunkt L nach M projicirt.

Will man, nachdem die Richtung der grossen Axe (GH) der Projection eines Meridians mit Hilfe des aus der Gleichung (459) gesuchten Winkels λ^0 bestimmt ist, die Gleichung jener Projection ($GMpHp'$) in Bezug auf ihre Axen ($CH = r$ und $CM = r\cos\lambda$) aufstellen, so hat man ganz einfach:

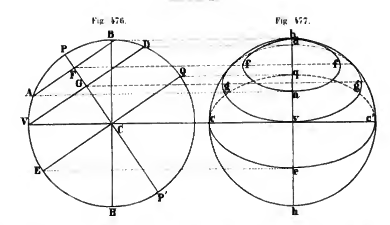
$$y = \cos\lambda \sqrt{r^2 - x^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (460)$$

Werden hieraus für gegebene oder angenommene Werthe von x die zugehörigen y berechnet, so lassen sich alle beliebigen Punkte einer Meridianprojection genau auftragen.

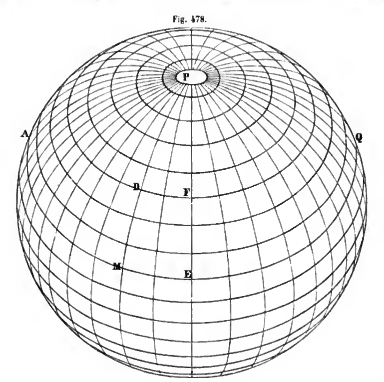
Läge es in der Absicht des Verfertigers eines Netzes nach der orthographischen Horizontalprojection, alle Meridianpunkte nur auf ein Axensystem, nämlich auf die zu einander senkrechten Durchmesser $A'B'$ und $V'C$ (wovon der erste den Hauptmeridian vorstellt) zu beziehen, so könnte dieses geschehen, indem man die neuen auf CV' gezählten Abscissen mit x' und die auf CB' genommenen Ordinaten mit y' bezeichnet und, da Winkel $MCB' = 90^0 - \lambda^0$, nach bekannten Formeln der analytischen Geometrie setzt:

$$x = x'\sin\lambda^0 - y'\cos\lambda^0,$$
$$y = x'\cos\lambda^0 + y'\sin\lambda^0.$$

Was schliesslich die Projectionen der Parallele betrifft, so werden diese aus demselben Grunde wie die der Meridiane auch Ellipsen; es kann sich also hier nur noch um die nähere Bestimmung derselben handeln. Stellt in Fig. 476 der Kreis VPP' einen durch den Pol V der Bildebene BH gelegten und zu dieser Ebene senkrecht stehenden grössten Kreis, PP' die Erdaxe und AB den Schnitt der



Ebene eines Parallels mit der des Meridians VPP vor: so ist klar, dass der mit der Bildebene BH parallele Durchmesser des Parallels, dessen Projection in Fig. 476 der Punkt F ist, in der Projection auf die Bildebene (Fig. 477) in wahrer Grösse erscheint, und dass also



wenn man ff = AB macht, ff die grosse Axe der Ellipse ist, nach welcher sich das Parallel AB projicirt. Die kleine Axe ad erhält man durch Projection des Durchmessers AB auf BH oder bh. Das Parallel VD, welches durch den Pol der Bildbene geht, erscheint in seiner Projection als die Ellipse gvg'd und der Aequator EQ als die Ellipse cec'q.

Ein vollständiges Bild einer in orthographischer Horizontalprojection dargestellten Halbkugel liefert Fig. 478, in welcher P den Pol, PE den Hauptmeridian, PM einen anderen um 20° entfernten Meridian, AEQ den Aequator und DF ein Parallel von 30° geographischer Breite bezeichnet.

B. Abwickelbare Projectionen.

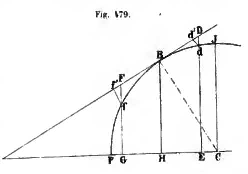
1) Conische Projectionen.

§. 400.

Allen conischen Projectionen liegt die Idee zu Grunde, die Meridiane und Parallelkreise zuerst auf einem Kegel darzustellen, welcher den abzubildenden Theil der Kugelfläche nach dem mittleren Parallelkreis berührt, und alsdann diesen Kegel mit seinem Liniensysteme abzuwickeln. Da jedoch diese Methode, Kartennetze zu entwerfen, eben so wenig als irgend eine andere fehlerfrei ist, so hat man sie nach Beschaffenheit der Fehler, welche vermieden und jener, welche geduldet werden sollten, verschieden abgeändert, wie aus den folgenden Paragraphen zur Genüge hervorgeht.

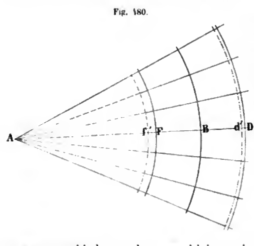
Um die Grundidee näher zu erläutern, sey PBJ in Fig. 479 ein Viertel eines Meridians und BH der Schnitt des mittleren Parallels mit der Meridianebene; DE und FG seyen die äussersten, von BH gleich weit entfernten Parallele des darzustellenden Stücks der Erdoberfläche. Zieht man an den Punkt B eine Tangente, welche der Erdaxe in dem Punkte A begegnet, so ist AD die Erzeugende des Kegels, auf dessen Mantelfläche

Fig. 479.



(und zwar zwischen den Ebenen DE und FG) das Kartennetz gezeichnet werden soll. Auf diesem Kegel werden die Meridiane als Erzeugende, die Parallelkreise aber als senkrechte Querschnitte erscheinen und die Abwickelung wird sich auf die in Fig. 480 angedeutete und leicht zu erklärende Weise darstellen.

Fig. 480.



Aus der Vergleichung dieser beiden Figuren entnimmt man sofort, dass zwar die Netzvierecke wie auf der Kugel rechtwinkelig sind und die Punkte von einerlei geographischer Breite auf dem Bilde dieselben relativen Entfernungen wie auf der Erdoberfläche haben; dass aber die Längen (BD, BF....) dieser Vierecke für gleiche Breitendifferenzen verschieden und um so kleiner sind, je näher sie am Pole liegen, während sie gegen den Aequator hin immer länger werden. Auch findet man leicht, dass — mit Ausnahme des mittleren Parallels — auf allen Parallelen des Netzes die Längendifferenzen grösser sind als auf den gleichnamigen Parallelen der Erdkugel.

Um diese beiden Fehler theilweise zu verbessern, trägt man in Fig. 479 von dem Punkte B aus die Längen der Bögen Bd = Bd' und Bf = Bf' ab und beschreibt in der Abwickelung die punktirten Bögen d' und f' mit den Halbmessern AD' und Af'. Dadurch erreicht man den Vortheil, dass die Längen Bd', Bf'.... der Netzvierecke denen auf der Kugel gleich und die Abweichungen in den geographischen Längen kleiner werden als vorhin.

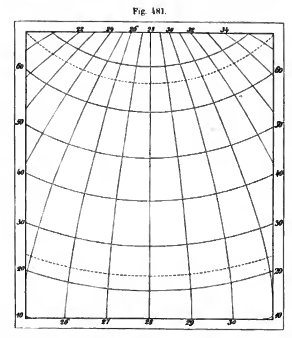
§. 401.

Projection von Bonne.

Wenn man die geographischen Längenunterschiede des Netzes mit den wirklich stattfindenden übereinstimmen lassen will, so muss man (Fig. 481) auf jedem der construirten Parallelkreise (20, 30, 40....)

von dem mittleren Meridiane (28) aus die wahren Grössen der geographischen Längengrade (28 — 27, 28 — 29....) abtragen und die einem Meridiane (27, 29....) angehörigen Punkte durch eine stetige Curve verbinden, welche dann dessen Projection darstellt. Zwar sind

Fig. 481.



diese Meridiane keine Kegelelemente mehr, aber sie gewähren ausser dem eben bezeichneten Vortheile auch noch den, dass die Flächeninhalte der Netzvierecke auf der Karte den gleichnamigen auf der Kugel genau proportional sind. Von kleinen Fehlern ist selbstverständlich auch dieses Netz nicht frei, und es sind hier vor allen die Abweichungen der Winkel der Vierecke von 90° zu erwähnen; diese Abweichungen betragen jedoch so wenig, dass man sie bei nicht übermässiger Ausdehnung der Karte übersehen und die Entfernung zweier Punkte ohne erhebliche Differenz nach einem gemeinschaftlichen Meilenmassstabe bestimmen kann. Dieser Umstand ist der in Rede stehenden Projection sehr günstig, und man kann wohl behaupten, dass keine andere so häufig gebraucht wird als diese, welche man die Bonne'sche oder modificirte Flammsteed'sche Projection nennt. In §. 310 ist auch bereits eine Anwendung

von ihr gemacht, da sie der dortselbst besprochenen topographischen Karte von Thüringen, und ebenso der von Bayern, Preussen, Frankreich und anderen Ländern zu Grunde liegt. Wegen ihrer Wichtigkeit soll sie etwas ausführlicher als die übrigen conischen Projectionen behandelt und dabei auch die sphäroidische Gestalt der Erde berücksichtigt werden.

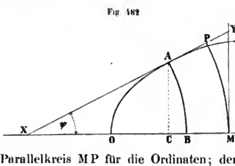


Fig. 482

Bestimmen wir zunächst die Coordinaten eines seiner geographischen Lage nach gegebenen Punkts in Bezug auf zwei rechtwinkelige Axen. Diese Axen seyen nach Fig. 482 der mittlere Meridian M X für die Abscissen und der mittlere Parallelkreis M P für die Ordinaten; der Ursprung der Coordinaten liegt somit im Mittelpunkte der Karte, und es sey

β die geographische Breite dieses Punktes M,
φ die geographische Breite irgend eines anderen Punktes A, und
λ der geographische Längenunterschied zwischen den Punkten A und M im Bogenmass.

Unsere Aufgabe ist, aus diesen Stücken und den bekannten Erddimensionen die Coordinaten des Punktes A ($MC = x$ und $AC = y$) zu finden.

In Fig. 483 sey O der Pol der Erde, M B O der mittlere Meridian, P A O der Meridian des Orts A, so dass also die elliptischen Bögen

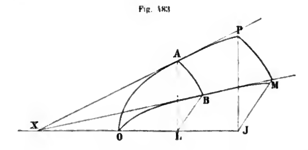


Fig. 483

M O und A O zu den Complementen der Breiten β und φ gehören und $ALB = \lambda$ ist; ferner sey M X Tangente des mittleren Meridians

in dem Punkte M und folglich zugleich der Halbmesser des mittleren Parallels MP auf der Karte (Fig. 482). Bezeichnet nun weiter

- a die halbe grosse Axe der die Erdoberfläche erzeugenden Ellipse, also den Halbmesser des Aequators,
- e die Excentricität dieser Ellipse,
- ϱ den Halbmesser MX des Kartenparallels MP von der Breite β,
- ϱ' den Halbmesser des Kartenparallels AB von der Breite φ,
- δ die Differenz $\varphi - \beta$ der geographischen Breiten von A und M,
- α die Länge des Meridianbogens MB, und endlich
- ψ den Winkel AXB, welcher durch den Bogen AB $= \varepsilon$ gemessen wird:

so ist als bekannt anzunehmen, dass die Länge der Tangente MX $= \varrho$ an die bezeichnete Ellipse ausgedrückt wird durch

$$\varrho = \frac{a \cot \beta}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \beta)}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (461)$$

und dass die Länge des Meridianbogens MB zwischen den geographischen Breiten φ und β gleich ist

$$\alpha = a(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{16} A^2)\,\delta - \tfrac{3}{2} a A \cos\gamma \sin\delta + \tfrac{15}{32} a A^2 \cos 2\gamma \sin 2\delta,$$

wobei A die Abplattung und γ die Winkelsumme $\varphi + \beta$ oder $2\beta + \delta$ bedeutet. Den Bogen α braucht man übrigens nicht erst zu berechnen, da es Tafeln gibt, welche die Länge des Meridianbogens vom Aequator bis zu einem beliebigen Parallel darstellen, aus denen also durch Subtraction der Bogenlängen der Werth von α gefunden werden kann. Die Tafel Nr. I des Anhangs enthält diese Längen von 30 zu 30 Minuten; in dem Berliner astronomischen Jahrbuche für 1852 sind sie aber von 10 zu 10 Minuten aufgeführt, und für zwischenliegende Breiten können die zugehörigen Werthe leicht eingeschaltet werden. Wir sehen daher α als eine gegebene Grösse an und erhalten somit den Halbmesser ϱ' des Kartenparallels AB, welcher um die Länge α kleiner ist als ϱ, aus der Gleichung:

$$\varrho' = \varrho - \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (462)$$

Nach der Bonne'schen Projection ist der Kartenparallelbogen AB dem wirklichen Bogen AB auf dem Sphäroïde (Fig. 483) gleich; demnach auch arc AB = arc ε = BL λ, oder, wenn man den aus der höheren Geometrie ebenfalls bekannten Werth des Halbmessers BL setzt:

$$\varepsilon = \frac{a \lambda \cos \beta}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \beta)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (463)$$

Mit Hilfe dieses Werthes erhält man die Grösse des Winkels A X B = ψ im Bogenmass (d. i. für den Halbmesser 1) auf bekannte Weise gleich

$$\psi = \frac{a \lambda \cos \beta}{\varrho' \sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \beta)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (464)$$

Damit aber ergeben sich sofort aus Fig. 482 die Coordinaten des Punktes A, nämlich

$$x = MC = \varrho - \varrho' \cos \psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (465)$$

$$y = AC = \varrho' \sin \psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (466)$$

Hat der Punkt M eine geographische Breite β von 50° 36′ und der Punkt A eine Breite $\varphi = 51°$; ist ferner der geographische Längenunterschied zwischen M und A = 1° 20′, log a = 6,5148235 und log e = 8,9122052; und bedenkt man, dass die Gleichung (464) den Winkel ψ auch im Gradmass liefert, sobald statt des Bogens λ der ihm entsprechende Winkel von 1° 20′ gesetzt wird: so erhält man nach den vorstehenden Formeln und der Tafel Nr. I:

ϱ = 2 693 095,19 Toisen.
α = 22 828,02 „
ϱ' = 2 670 267,17 „
ψ = 1° 2′ 20′
x = 23 231,79 „
y = 48 427,67 „

Hätte man die Erde als Kugel vom Halbmesser r = 3 266 608 t (log r = 6,514 0964) angenommen, so würde man nahezu dieselben Werthe gefunden haben: die Unterschiede sind also unbedeutend, und man kann desshalb, so lange es sich nicht um Karten in grossen Massstäben handelt, recht wohl bei der Annahme, dass die Erde eine Kugel sey, verharren.

Die oben aufgestellte Behauptung, dass die Flächen der Netzvierecke den gleichnamigen auf der Kugel proportional seyen, lässt sich wie folgt beweisen. Denkt man sich auf der im natürlichen Massstabe gezeichneten Karte (Fig. 482) einen (im Holzschnitt leider weggebliebenen) Bogen DE unendlich nahe an AB gezogen, so kann man mit Vernachlässigung einer unendlich kleinen Grösse zweiter Ordnung, das Flächenelement ABDE eines Netzvierecks gleich

$$dF = AB \,.\, BD = \varepsilon \,.\, d\alpha$$

setzen. Auf dem Erdellipsoide (Fig. 483) ist (wenn man sich wie vorhin den Bogen CD unendlich nahe an AB gezogen denkt) das Flächenelement des Netzvierecks ebenfalls durch ABCD vorgestellt,

und es ist nach bekannten Annahmen der Differentialrechnung, wenn dieses Element mit dF' und der Halbmesser des Parallels AB mit ϱ'' bezeichnet wird:

$$dF' = AB.\ BD = \lambda\varrho''.\ d\alpha = \varepsilon \partial\alpha;$$

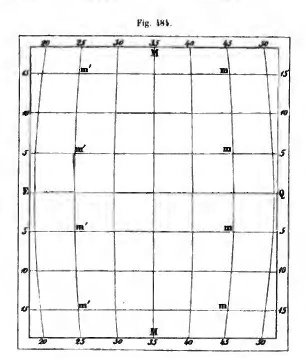
es ist folglich auch für eine Karte im natürlichen Massstabe, wenn dF und dF' zwischen gleichen Grenzen integrirt werden, $F = F'$ und für eine im m^{ten} Theile der natürlichen Grösse gezeichnete Karte $m^2F = F'$, d. h. die Kartenvierecke sind den gleichnamigen auf dem Erdsphäroïde proportional, was zu beweisen war.

§. 402.

Projection von Flamsteed.

Nachdem im vorigen Paragraph bereits von der „modificirten" Flamsteed'schen Projection die Rede war, ist hier noch Einiges über die ursprüngliche Projection von Flamsteed zu bemerken. Dieselbe besteht darin, dass man auf dem mittleren Meridiane die Längen der Meridiangrade abträgt; in den Theilungspunkten Senkrechte

Fig. 484.



errichtet, welche die Parallele vorstellen; auf diesen die entsprechenden Längen der Parallelgrade vom mittleren Meridian aus abmisst und durch die zusammengehörigen Theilpunkte krumme Linien zieht, welche die Meridiane bezeichnen.

Dieses Kartennetz weicht für Länder, die in der Nähe des Aequators liegen, nur wenig von der Wirklichkeit ab; die Abweichungen wachsen aber rasch mit dem Vorrücken des Landes gegen den Pol; darum wendet man es auch nur für Tropengegenden (z. B. für Karten von Afrika) an, wie auch die beigedruckte Fig. 484 zeigt, in welcher MM der mittlere Meridian, EQ der Aequator, mni ein Parallel und mm, m'm' je ein Meridian ist.

Dass für diese Zonen die Abweichungen nicht bedeutend seyn können, geht aus Gl (461) hervor, welche für $\beta = 0$ den Halbmesser des Aequators auf der Karte $\varrho = \infty$ liefert; also wird der Aequator auch bei der vorigen Projection eine Gerade; für $\beta = 10^0$ erhält man $\varrho = 18\,525\,826,00$ und für $\beta = 20^0$ den Halbmesser $\varrho = 8\,974\,918,20$ Toisen; die Krümmungen der zu diesen Breiten gehörigen Parallele sind also auch nach der verbesserten Flamsteed'schen Projection nur schwach, folglich können auch bei geraden Parallelen die Fehler nicht gross seyn. Genauere Bestimmungen dieser Fehler übergehen wir wegen der seltenen Anwendung der Flamsteed'schen Projection.

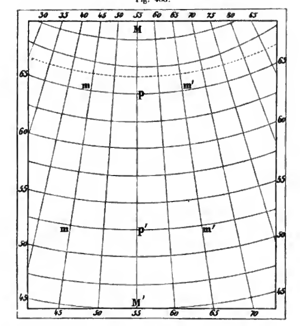
§. 403.

Projection von De l'Isle.

Das Verfahren von De l'Isle, ein konisches Kartennetz anzufertigen, besteht darin, dass man von dem mittleren Meridiane aus die Parallelkreise in derselben Weise wie nach Bonne (§ 400) beschreibt, dann aber auf den zwei Parallelkreisen pp, p'p' (Fig. 485), welche die äusseren Viertel Mp, M'p' der Karte von der mittleren Hälfte abtrennen, die wahren Längen der Parallelgrade aufträgt und durch je zwei zusammengehörige Theilpunkte (mm, m'm', ...) gerade Linien zieht, welche die Meridiane vorstellen.

Diese Projection unterscheidet sich von der in Fig. 480 angedeuteten Kegelprojection namentlich darin, dass die Meridiane nicht in dem Mittelpunkte A aller Parallele zusammenlaufen, sondern in verschiedenen Entfernungen sich schneiden, wenn man sie weit genug verlängert. Sie wurde der Herstellung einer Generalkarte von Russland

Fig. 485.



zu Grunde gelegt und bei dieser Gelegenheit von Euler theoretisch untersucht und namentlich desshalb empfohlen, weil in Folge des Umstandes, dass die Meridiane gerade Linien sind, sich auch alle übrigen grössten Kreise nahezu als gerade Linien darstellen und folglich bei nicht zu grossen Ausdehnungen der Karte alle Entfernungen mit einem geradlinigen Meilenmassstabe annähernd richtig gemessen werden können.

2) Cylindrische Projectionen.

§. 404.

Diese Projectionen bestehen darin, dass man sich die Erdkugel von einem Cylinder umhüllt denkt, welcher dieselbe nach dem Aequator berührt und dessen Erzeugende die Meridiane vorstellen, während seine Schnitte durch die Ebenen der Parallelkreise diese Kreise selbst bezeichnen. Wickelt man einen solchen Cylinder ab, so ist klar, dass sich die abgewickelten Meridiane und Parallelen rechtwinkelig schneiden, und dass die letzteren um so näher an einander liegen, je weiter sie vom Aequator abstehen.

Man sieht sofort ein, dass, wenn man dieses Princip für beliebig

grosse und beliebig gelegene Theile der Erdoberfläche strenge durchführen wollte, Karten entstünden, welche zu den unrichtigsten von allen gehörten; man begreift aber auch, dass es mit geringer Abänderung zur Darstellung von solchen Ländern, welche am Aequator liegen, recht wohl geeignet ist. Und in der That wird es auch für die heissen Zonen am meisten angewendet.

Eine andere wichtige Anwendung finden die cylindrischen Projectionen bei der Anfertigung von Seekarten. Hiezu eignen sich dieselben desshalb besonders, weil sich diejenige krumme Linie, welche ein Schiff beschreibt, das alle Meridiane der Erde unter einem constanten Winkel schneidet (die Loxodrome) in der Abwickelung der Cylinderfläche, also auf der Karte, als eine Gerade darstellt. Diese Eigenschaft ist offenbar für die Zeichnung von Schiffscursen auf den Seekarten sehr bequem und daher zu benutzen.

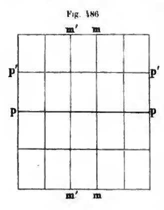
Gewöhnlich unterscheidet man nur zwei Arten von cylindrischen Projectionen, welche unter dem Namen „Plattkarten" und „reducirte Karten" bekannt sind; wir sehen jedoch die Projection von Cassini als eine besondere Art der cylindrischen Projectionen an und unterscheiden daher 3 Arten derselben.

§. 405.

Plattkarten.

Die einfachste Art des Netzes einer Plattkarte besteht aus lauter Quadraten von gleicher Grösse, wovon die in der Richtung von Süd nach Nord liegenden Seiten die Meridiane und die von Ost nach West laufenden die Parallelkreise vorstellen. Dass das auf einem solchen Netze dargestellte Bild eines Theils der Erdoberfläche sehr verzerrt ist, bedarf keines Beweises; sein einziger Vorzug ist, dass man geographische Länge und Breite eines Punktes sehr leicht eintragen und umgekehrt aus der Karte abnehmen kann.

Fig. 486



Ein weniger mangelhaftes Bild liefert dasjenige Netz (Fig. 486), bei welchem die Meridiane und Parallelkreise durch Rechtecke in der Art vorgestellt sind, dass die Entfernungen der Meridiane (m m,

$m'm'$) nach der Grösse der Grade des mittleren Parallelkreises pp und die der Parallelen (pp, $p'p'$) nach der Grösse eines Meridiangrades bestimmt werden. Will man demnach ein Land darstellen, dessen mittlere geographische Breite $= \varphi$ ist, so ist der Halbmesser des zugehörigen Breitenkreises $= r\cos\varphi$, der Umfang dieses Kreises $= 2r\pi\cos\varphi$ und die Länge eines Grades des Parallels:

$$\lambda = \frac{r\,\pi\cos\varphi}{180} = m\,m' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (467)$$

Sollen nun die Meridiane von Grad zu Grad aufgetragen werden, und ist $1 : m$ die Verjüngung der Karte, so beträgt der Abstand der Meridiane auf dem Netze den m^{ten} Theil von λ. Da ferner die Länge eines Meridiangrades

$$\beta = \frac{r\,\pi}{180} = p\,p' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (468)$$

ist, so beträgt der Abstand der Parallelen von Grad zu Grad $\frac{1}{m}\beta$, und es verhält sich folglich

$$\beta : \lambda = 1 : \cos\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (469)$$

Es versteht sich von selbst, dass die Genauigkeit dieser Karten von der Mitte gegen die südlichen und nördlichen Grenzen sehr abnimmt, und dass man, um die geographischen Längen und Breiten eines Orts im Gradmasse auszudrücken, zwei Massstäbe anwenden muss, welche sich beziehlich wie $\lambda : \beta$ oder wie $\cos\varphi : 1$ verhalten.

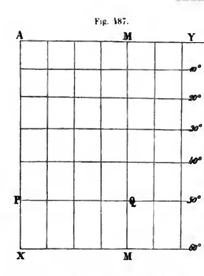
§. 406.

Reducirte Karten.

Will man das cylindrische Kartennetz so einrichten, dass durch dasselbe überall das richtige Verhältniss der Längen der Meridiangrade und der Grade der Parallelkreise dargestellt wird, so kann dieses dadurch geschehen, dass man die Meridiane gleichweit, die Parallelkreise aber um so weiter von einander abstehen lässt, je mehr sie sich den Polen nähern. Die Zunahme des Abstandes der Parallelen ergibt sich aus der nachstehenden Rechnung.

Bezeichnet nämlich β die Länge des Meridianbogens, der zu einem sehr kleinen Winkel α gehört, so hat nach der Gleichung (469) der zu demselben Winkel α gehörige Bogen eines Parallelkreises von der Breite φ die Länge $\lambda = \beta\cos\varphi$; beide Bögen

Fig. 487.



verhalten sich folglich wie $1 : \cos\varphi$ und beispielsweise für $\varphi = 60^0$ wie $2 : 1$. Es müsste also an dieser Stelle der dem Winkel α zukommende Meridianbogen doppelt so gross seyn als der zu α gehörige Bogen des Parallelkreises.

Nimmt man nun, um die Rechnung allgemeiner zu machen, den abgewickelten Aequator AY (Fig. 487) als die Ordinaten- und den abgewickelten ersten Meridian AX als die Abscissenaxe an, und bezeichnet man die Entfernung AP eines Parallels von der Breite φ mit x, so kann man nach den Principien der Differentialrechnung die der Breitenänderung $d\varphi$ entsprechende Aenderung von x mit dx bezeichnen. Drückt man die Aenderung des Breitenwinkels durch den Bogen vom Halbmesser r aus, so ist dieser unendlich kleine Bogen $= r\,d\varphi$, und es verhält sich folglich jetzt $dx : r\,d\varphi$ wie vorhin $\beta : \lambda$, d. i. wie $1 : \cos\varphi$. Es ist somit

$$dx = \frac{r\,d\varphi}{\cos\varphi}$$

und, wenn man integrirt und bei der Constantenbestimmung berücksichtigt, dass für $\varphi = o$ auch $x = o$ ist,

$$x = r \operatorname{logn} \operatorname{tg} (45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (470)$$

Führt man statt der natürlichen Logarithmen die gemeinen ein und drückt zugleich die vorstehende Gleichung logarithmisch aus, so wird, wenn man den Erdhalbmesser $r = 857{,}43$ geographischen Meilen setzt, die in solchen Meilen ausgedrückte Länge x aus der Gleichung gefunden:

$$\log x = 3{,}2954144 + \log\,(\log \operatorname{tg} (45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi)) \quad . \quad (471)$$

Soll die Entfernung AM des Meridians MM, welche zu einer in Graden gegebenen Länge ψ gehört, ausgedrückt werden, so dient dazu die Gleichung

$$y = AM = \frac{r\pi}{180}\,\psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (472)$$

oder, wenn man wieder $r = 857{,}43$ geographische Meilen setzt und den Logarithmus von y sucht:

$$\log y = 1{,}1750761 + \log \psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (473)$$

Mit Hilfe der Gleichungen 470 bis 473 kann man selbstverständlich jeden durch seine geographische Länge und Breite gegebenen Ort in das reducirte Kartennetz eintragen, und umgekehrt die geographische Länge und Breite eines eingetragenen Punktes berechnen.

§. 407.

Projection von Cassini.

Diese Projectionsmethode besteht darin, dass man den mittleren Meridian des darzustellenden Landes als die Leitlinie des umhüllenden Cylinders ansieht und diesen Cylinder durch Ebenen geschnitten denkt, welche der des mittleren Meridians parallel laufen. Der Cylinder und die Schnittebenen haben folglich gegen die gleichnamigen Flächen, welche den gewöhnlichen Cylinderprojectionen zu Grunde liegen, eine senkrechte Stellung. Wickelt man den hieher gehörigen Cylinder ab, so stellen dessen Elemente die grössten Kreise vor, welche durch sie und den Erdmittelpunkt bestimmt sind, während die Schnitte der dem Hauptmeridian parallel laufenden kleineren Kreise die Meridiane des Netzes bezeichnen.

Theilt man die von Ost nach West laufenden grössten Kreise vom Hauptmeridian aus in gleiche Theile, so ist klar, dass die diesem Meridiane parallel laufenden Schnittebenen immer näher zusammenrücken, und dass folglich die Vierecke des Netzes um so unrichtiger werden, je weiter sie vom mittleren Meridian abliegen. Diese Nachtheile treten jedoch nicht stark hervor, wenn man die Cassinische Cylinderprojection auf ein Land anwendet, das sich in der Richtung von Ost nach West nicht weit ausdehnt. Cassini legte seiner Karte von Frankreich die nach ihm benannte Projection wohl desshalb zu Grunde, weil dieses Land sich etwas mehr von Süden nach Norden, als von Westen nach Osten erstreckt. Ein Vortheil, den die in Rede stehende Projection gewährt, besteht darin, dass sich die nach §. 307 berechneten Coordinaten der Eckpunkte eines grossen Dreiecknetzes sehr leicht eintragen lassen, sowie man umgekehrt mit Hilfe der dortselbst entwickelten Formeln die Coordinaten eingetragener Punkte leicht berechnen kann.

C. Geographische und topographische Karten.

§. 408.

Man theilt die Landkarten gewöhnlich in geographische (erdbeschreibende) und in topographische (ortbeschreibende) ein, und versteht unter den ersteren Karten in sehr kleinem Massstabe (von 1 : 200000 bis 1 : 2000000 herab), welche ganze Länder, Welttheile und selbst Hälften der Erdoberfläche bildlich darstellen; unter den letzteren aber Karten in grösserem Massstabe (von 1 : 10000 bis 1 : 200000), welche die Einzelnheiten der dargestellten Orte und Gegenden mehr berücksichtigen, als dieses bei den Landkarten im gewöhnlichen Sinne gebräuchlich und möglich ist.

Der Unterschied zwischen geographischen und topographischen Karten entspringt somit lediglich aus dem Massstabe derselben. Eben desshalb liegt auch der Unterschied zwischen geographischen und topographischen Schrift- und Kartenzeichen bloss in der Grösse und nicht in der Form dieser Zeichen. Es wird daher genügen, wenn wir hier vorzugsweise die Zeichen für grössere Karten berücksichtigen, da dieselben mannichfaltiger sind als die der kleinen, nur wenig Detail enthaltenden, und da jene Zeichen leicht verkleinert werden können.

Auf einer Karte sind, wie schon bemerkt, nicht bloss räumliche, sondern auch politische und historische Verhältnisse darzustellen. Zu jenen gehören: die Wohnorte der Menschen, stehendes und fliessendes Wasser, und der Boden mit seinen natürlichen und künstlichen Bildungen; zu diesen: die Grenzen der Länder und ihrer Bestandtheile, die Fundorte wichtiger Mineralien, die Stätten grosser geschichtlicher Ereignisse, die Grösse der Bevölkerung u. s. w.

1) Kartenzeichen.

§. 409.

Bezeichnung der Berge.

Von der geometrischen Gestalt einer Gegend bekommt man erst dann einen richtigen Begriff, wenn man ausser ihrer horizontalen Projection auch die Erhöhungen und Vertiefungen oder die Unebenheiten derselben kennt. Zur graphischen Darstellung derselben auf Karten bedient man sich nach der Angabe des sächsischen Majors

Lehmann der Schraffirung der geneigten Flächen mittels Strichen, deren Dicke zu der Grösse der Neigung in einem bestimmten Verhältnisse steht. Die Lehre von der Bezeichnung geneigter Terrainflächen durch solche Striche (die Lehmann'sche Theorie der Bergzeichnung) ist namentlich für topographische Karten, die zu militärischen Zwecken benützt werden, sehr wichtig, und wir beginnen desshalb dieses Capitel mit einer kurzen Darstellung derselben.

Die Lehmann'sche Bergzeichnungstheorie beruht zum Theil auf dem Satze, dass die Helligkeit einer Fläche, welche von vertikalen Strahlen erleuchtet wird, unter übrigens gleichen Umständen dem Cosinus ihres Neigungswinkels gegen den Horizont proportional ist. Die horizontale Fläche erscheint hiernach am hellsten, die vertikale am dunkelsten. Wollte man nun jene ganz weiss, diese ganz schwarz und die dazwischen liegenden Abstufungen durch schwarze Striche mit weissen Zwischenräumen bezeichnen, so liesse sich leicht für jeden Neigungswinkel φ der beleuchteten Fläche angeben, wie breit die weissen Zwischenräume im Verhältniss zur Breite der schwarzen Striche seyn müssten. Für $\varphi = 60^0$ würden z. B. die Striche eben so breit seyn als die Zwischenräume, da $\cos \varphi = \cos 60^0 = 0{,}5$ ist.

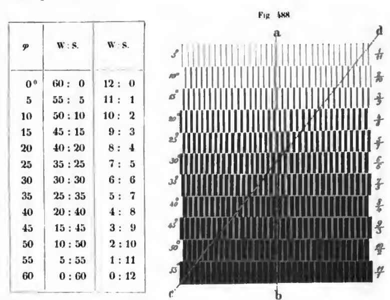
Die strenge Durchführung dieses Princips hat indessen zur Folge, dass die Abstufungen der Neigungen nicht so scharf ins Auge fallen, als es wünschenswerth ist. Daher, und weil die Erfahrung lehrt, dass in der Natur nur selten Erdböschungen von mehr als 45^0 Neigung vorkommen, bezeichnete Lehmann schon eine unter 45^0 gegen den Horizont geneigte Fläche ganz schwarz, während er für die übrigen das Verhältniss der weissen und schwarzen Streifen nach der Annahme bestimmte, dass sich die Breite der schwarzen Striche zur Breite der weissen Zwischenräume verhalten sollte wie der Neigungswinkel der Fläche gegen den Horizont zur Ergänzung dieses Winkels auf 45 Grade.

Diesen Vorschlag hat man fast auf allen topographischen Bureaux angenommen, nur mit dem Unterschiede, dass man den Grenzwinkel φ bald auf 45, bald auf 50, bald auf 60^0 setzte. In Bayern z. B. bezeichnet man erst die unter 60^0 geneigten Flächen ganz schwarz, und es ergibt sich nach dieser Annahme die Proportion

$$S : W = \varphi : 60^0 - \varphi,$$

wenn S die Breite der schwarzen Striche und W die der weissen

Zwischenräume bezeichnet. Aus dieser Proportion geht die nachstehende Tabelle hervor, welche zugleich durch die beigedruckte Fig. 488 so erläutert ist, dass jede weitere Bemerkung hierüber unnöthig erscheint.



φ	W : S.	W : S.
0°	60 : 0	12 : 0
5	55 : 5	11 : 1
10	50 : 10	10 : 2
15	45 : 15	9 : 3
20	40 : 20	8 : 4
25	35 : 25	7 : 5
30	30 : 30	6 : 6
35	25 : 35	5 : 7
40	20 : 40	4 : 8
45	15 : 45	3 : 9
50	10 : 50	2 : 10
55	5 : 55	1 : 11
60	0 : 60	0 : 12

Wenn eine topographische Karte genau nach diesem Schema gezeichnet ist, so kann man daraus die relative Höhenlage einzelner Punkte und beliebige Terrainprofile um so richtiger construiren, je genauer man das Verhältniss des Weissen zum Schwarzen zu schätzen im Stande ist.

Gesetzt, es handele sich um das Terrainprofil ab der Fig. 488, so hat man für die Länge der obersten Schichte das Verhältniss von W : S = 1 : 11, folglich eine Neigung von 5°; für die zweite Schichte das Verhältniss von W : S = 2 : 10, folglich eine Neigung von 10°; für die dritte Schichte W : S = 3 : 9, mithin eine Neigung von 15° u. s. w. Trägt man nun diese Neigungswinkel in der Länge der Schichten nach der Richtung ab an einander an, so entsteht die stärker geneigte untere Linie der Fig. 489, welche somit das gesuchte Profil ab vorstellt. In gleicher Weise findet man das Profil cd. Hier treten offenbar dieselben Neigungswinkel wie bei ab auf, aber ihre horizontalen Erstreckungen sind grösser und folglich ist

auch das Profil sanfter, wie die obere gebrochene Linie oc′ der beigedruckten Figur zeigt.

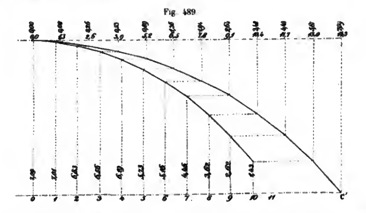
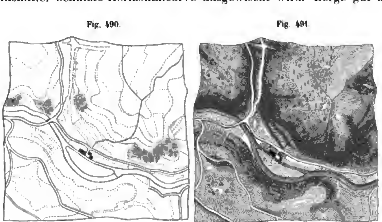


Fig. 489

Die Darstellung eines Berges durch Schraffirung setzt dessen Horizontalcurven als bekannt voraus. Sind diese nach §. 341 bis 345 aufgenommen und auf dem Plane in Blei gezeichnet, so zieht man zwischen denselben in der Richtung des kleinsten Abstandes und in der erforderlichen Breite die schwarzen Striche, welche übrigens nicht mathematisch gerade zu seyn brauchen, sondern etwas geschlängelt seyn dürfen. Erlaubt es die Fertigkeit der Hand nicht, die Striche sofort von einer Curve zur anderen auszuführen, so legt man Zwischencurven an und zieht zunächst die Striche bis an diese, worauf dann wie vorhin weiter fortgefahren und zuletzt jede als Hilfsmittel benützte Horizontalcurve ausgewischt wird. Berge gut zu


Fig. 490. Fig. 491.

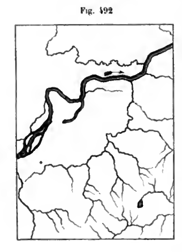
schraffiren, setzt viele Uebung voraus; unsere Absicht ist es aber nicht, das Zeichnen selbst, sondern das Verstehen der Kartenzeichnungen zu lehren. Darum wird es genügen, dass wir oben zwei von Nentze gezeichnete Figuren (490 und 491) mittheilten, wovon eine die in Arbeit begriffene Karte ohne Schraffur mit punktirten Horizontalcurven, die andere aber die fertige Karte mit Schraffur und ohne Horizontalcurven enthält. Bei einiger Mühe wird man sich leicht eine bildliche Vorstellung von der geometrischen Gestaltung der vorliegenden Gegend machen können.

§. 410.

Bezeichnung der Gewässer.

Beträgt der Massstab einer topographischen Karte 1 : 10000, so werden Bäche unter 10 Fuss Breite, bei 1 : 25000 Bäche unter 20 Fuss Breite, bei 1 : 100000 Flüsse unter 40 Fuss Breite, bei 1:200000 Flüsse unter 160 Fuss Breite als einfache Linie gezeichnet. Breitere Bäche oder Flüsse stellt man durch doppelte Uferlinien mit der bekannten Wasserschraffirung dar. Diese wird um so feiner, je kleiner der Massstab ist; die Ufer auf der Schattenseite werden mit etwas stärkeren Linien ausgezogen, als die auf der Lichtseite. Der Lauf des Wassers wird durch einen kleinen Pfeil angedeutet, der nach Massgabe des Raumes entweder in oder neben der Wasserfläche liegt. Wird der Massstab der Karte kleiner als 1 : 100000, so werden kleine Bäche, Gräben und Teiche ganz weg gelassen; dagegen sind die einfachen Linien, welche Flüsse darstellen, im Verhältnisse ihrer Länge und der Zuflüsse, welche sie erhalten, zu verstärken. Werden die topographischen Karten farbig gezeichnet, so ist das Wasser blau anzulegen und so zu laviren, dass es gegen die Ufer dunkler erscheint. Diese aber werden, wenn es natürliche sind, schwarz, und wenn sie aus Mauerwerk bestehen, roth ausgezogen. Fig. 492 zeigt die Darstellung der Gewässer in schwarzer Manier und im Massstabe von 1:100000.

Fig. 492



Es ist hier der Ort, auf die Veränderungen aufmerksam zu machen, denen die Ufer der Flüsse in Folge der Einwirkung des Wassers unterworfen sind. Diese Veränderungen treten auf einer Karte um so mehr hervor, je grösser deren Massstab ist und je mehr Zeit zwischen der Aufnahme und dem Gebrauche liegt. In diesen Fällen, und wenn es sich darum handelt, den Wasserlauf ziemlich genau zu kennen, ist es durchaus nöthig, die Lage der Ufer einer geometrischen Revision zu unterwerfen.

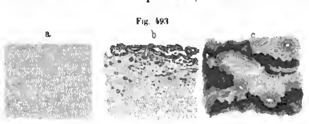
§. 411.

Bezeichnung des Bodens.

Der Boden kann fest oder weich, kahl oder bewachsen seyn und diese verschiedenen Beschaffenheiten desselben sind in der Karte entsprechend anzudeuten.

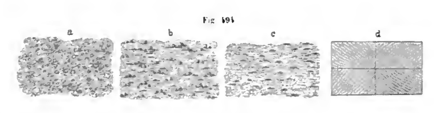
Beim kahlen Boden wird unterschieden, ob er an der Oberfläche aus Sand, Kies, Gerölle, Felsen oder beständig aus Eis besteht. Sand und Kies werden durch feinere und stärkere Punkte, Gerölle und Felsen durch eckige Figuren, Gletscher durch entsprechende Schraffirungen bezeichnet, wie aus der Fig. 493 zu entnehmen ist, in welcher a Sand und Kies, b Gerölle und Felsen, c Hochgebirg mit einem Gletscher vorstellt. In farbigen Karten wird der kahle Boden blassroth, das beständige Eis blassblau angelegt; Sand und Kies werden auch hier schwarz punktirt, Gletscher schraffirt.

Fig. 493



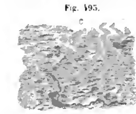
Der bewachsene Boden besteht entweder aus Wäldern, Feldern, Haiden, Wiesen oder Gärten. Die Wälder werden nach Fig. 494 Abtheilung a, die Haiden nach b, die Wiesen nach c, Wein- und Hopfengärten nach d, Felder aber gar nicht bezeichnet, d. h. weiss gelassen. Auf Plänen kann man Laub- und Nadelholz unterscheiden, auf Karten aber nicht. In Farben werden Wälder grau, Wiesen hellgrün, Haiden hellgelb, Weingärten rosenroth, Hopfengärten hellbraun bezeichnet.

Fig. 494.



Der **weiche Boden** ist entweder ein Moor oder ein Sumpf. Diese Unterabtheilungen unterscheidet man nach Fig. 495 durch

Fig. 495.



Punkte, welche das Gesträuche der Moore und durch horizontale Linien (c), welche das Wasser der Sümpfe andeuten. Auf farbigen Karten stellt man die Moore und Sümpfe wie Wiesen dar, und unterscheidet die ersteren durch braune, die letzteren durch blaue horizontale Streifen.

§. 412.

Bezeichnung von Wohnorten, Gebäuden etc.

Die auf topographischen Karten zu bezeichnenden Wohnorte sind: Städte, Marktflecken, Dörfer, Weiler, Schlösser, Einöden, Alpen; nicht bewohnte Gebäude: Kirchen, Kapellen, Ruinen etc. Ist der Kartenmassstab gross $\left(\frac{1}{10000} \text{ bis } \frac{1}{50000}\right)$, so deutet man die Hauptumrisse der Gebäude noch an, beträgt der Massstab aber weniger als 1 : 100000, so treten nur bestimmte Zeichen an die Stelle der Umrisse, wie aus den Zeichen der Fig. 496 zu entnehmen ist, von welchen a, b, c grosse, mittlere und kleine Städte, d, e, f Marktflecken und Dörfer, g einen Ort mit Schloss, h einen Weiler und i ein

Fig. 496.

a b c d e f g h i k l m

einzelnes Schloss, k eine Ruine, l einen befestigten Ort und m eine Einöde vorstellt.

In farbigen Karten sind die Gebäude mit rothem Carmin anzulegen, in schwarzen zu schraffiren.

§. 413.

Bezeichnung von Wegen und Grenzen.

Zu den Wegen gehören die Land- und Wasserstrassen jeglicher Art mit ihren feststehenden oder beweglichen Brücken; zu den auf topographischen Karten noch darzustellenden Grenzen lediglich die Landes-, Kreis-, Bezirks- und Gemeindegrenzen.

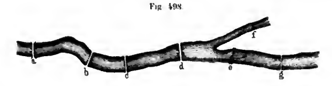
Hauptstrassen werden durch zwei Parallellinien, wovon die im Schatten liegende etwas stärker zu halten ist (Fig. 497, b), Nebenstrassen durch eine ausgezogene und eine punktirte Linie (c), Gemeindewege durch eine einfache Linie (d), Saumwege und Fusspfade durch gestrichelte und punktirte Linien (e) bezeichnet. Bei Eisenbahnen unterscheidet man, ob sie schon im Betrieb stehen oder im

Fig. 497.



Bau begriffen sind: die ersteren werden nach Art der Hauptstrassen durch ausgezogene und querabgetheilte Parallellinien (a), die letzteren wie diese, aber durch punktirte Linien vorgestellt. Schifffahrtscanäle werden wie Flüsse von gleicher Breite gezeichnet (k), und für Landes-, Kreis-, Bezirks- und Gemeindegrenzen gelten beziehungsweise stark abgesetzte Striche und gestrichelt-punktirte Linien (f, g, h, i). Für die Bezeichnung der Wege über Flüsse gebraucht man die Formen der Fig. 498, in welcher a eine steinerne Brücke, b eine hölzerne Brücke, c eine eiserne Brücke, d eine Schiffbrücke,

Fig. 498.



e eine fliegende Brücke, f einen Steg, g eine Furth bezeichnet. Wasserbauten von Bedeutung werden auf Karten selten angedeutet; wo man sie jedoch sichtbar machen will, wählt man ähnliche, jedoch kleinere Zeichen wie für die Pläne. (S. Fig. 530.)

2) Kartenschrift.

§. 414.

Gegenstände der Benennung.

Eine jede Karte bedarf zunächst eines **Titels**, welcher ihre Hauptbestimmung und ihren Umfang bezeichnet: z. B. „hydrographische Karte von Bayern," d. i. eine Karte, welche lediglich die Quellen, Bäche, Flüsse, Ströme und See'n Bayerns darstellt. Dem Titel sind ferner Notizen beizufügen, welche den Massstab, die topographischen Zeichen, die Zeit der Verfertigung und den Verfasser der Karte betreffen.

Die wichtigsten Bezeichnungen einer Karte sind ohne Zweifel die **Ortsnamen**; diese dürfen nirgends fehlen, und es müssen ihnen daher, wenn der Raum für minder wichtige Bezeichnungen zu klein wird, diese letzteren weichen. Jedes Gebäude, das in der Karte ein besonderes Zeichen hat, erhält seinen Namen.

Nächst den Orten erscheinen die **Gewässer** als wichtige geographische Objecte, deren Benennung in einer Karte ebenfalls nicht fehlen darf, und die sich bei langen Flüssen mehrmals wiederholen muss, um das Ablesen der Karte zu erleichtern.

Ausserdem ist das **Terrain** in einer der Beziehungen zu benennen, welche durch die Zeichnung nicht ausgedrückt werden können; z. B. das Donaumoos, das Wendelsteingebirge, der Schwarzwald u. s. w. Ferner sind, wo es nothwendig erscheint oder der Raum erlaubt, die Namen wichtiger Verkehrsanstalten anzuführen; z. B. der Hauptstrassen zwischen grossen Städten, die auf der Karte selbst nicht liegen; der Eisenbahnen, welche besondere Namen haben; der Dampfschiffwege auf dem Meere u. dgl. Endlich ist es unerlässlich, das **Kartennetz**, d. i. die Meridiane und Parallelen nach ihrer Länge und Breite richtig zu bezeichnen, so dass man aus der leicht zu erkennenden Projectionsart des Netzes sofort die geographische Lage jedes Orts bestimmen kann.

§. 415.

Schriftzeichen.

Bei der Wahl der Schriftzeichen kommt sowohl deren Form als Grösse in Betracht, um auch hiedurch Wichtigeres von

Unwichtigerem zu trennen mit einem Worte die Uebersicht zu erleichtern.

Was die Form der Schrift betrifft, so sind folgende Schriftgattungen im Gebrauch:

1. Die grosse römische stehende und liegende Schrift, auch stehende und liegende Kapitalschrift genannt (Fig. 499): für Titel, Namen der Landesbezirke und Benennungen geographisch wichtiger Gegenstände.

Fig. 499.

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z.

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z.

2. Die kleine römische stehende und liegende Schrift, auch stehende und liegende Rotond genannt (Fig. 500): für die geographischen und topographischen Einzelnheiten der Karte, und zwar für die grösseren Objecte.

Fig. 500.

a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v w x y z.

a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v w x y z.

3. Die topographische Cursivschrift (Fig. 501) für die kleineren und kleinsten Objecte einer Karte.

Fig. 501.

a b c d e f g h i k l m n o p q r s t u v w x y z.

4. Die stehenden und liegenden römischen und arabischen Ziffern (Fig. 502 und 503) zur Bezeichnung von Netzabtheilungen, Einwohnerzahlen, Berghöhen u. dgl. Gewöhnlich finden jedoch nur die arabischen Ziffern Anwendung.

Fig. 502.

I II III IV V VI VII VIII IX X.
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10.

Fig. 503.

I II III IV V VI VII VIII IX X.
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10.

Hinsichtlich der Grösse der Schrift ist zu bemerken, dass dieselbe zu dem Kartenmassstabe und den Kartenzeichen in einem passenden Verhältnisse stehen soll: wichtigere Gegenstände werden durch

grössere, minder wichtige durch kleinere Schrift bezeichnet, die grösste Schrift wird auf die Bezeichnung des Hauptzwecks der Karte und deren grösste Abtheilungen verwendet; bei Ortschaften richtet sich die Grösse der Schrift nach ihrer Classe oder Einwohnerzahl; bei Flüssen nach deren Länge und Bedeutung; bei See'n und Landobjecten nach deren Flächenraum. Die im Anhange unter Nr. XV mitgetheilte und aus Pfeiffer's „Anleitung zum Plan- und Kartenzeichnen" entnommene „Tabelle über die Gattungen und Grössen der Plan- und Kartenschriften" gibt hierüber weitere Aufschlüsse. Es ist jedoch zu bemerken, dass die angegebenen Formen und Masse nicht in aller Strenge eingehalten zu werden brauchen.

§. 416.

Stellung der Schrift.

Durch entsprechende Stellung der Schrift kann nicht nur mancher Zweifel über den bezeichneten Gegenstand gehoben, sondern auch die Uebersicht und das Ablesen der Karten sehr erleichtert werden: dieselbe ist also nicht so unwichtig, als es auf den ersten Augenblick scheinen mag.

Von der allgemeinen Regel, die Schriftzeilen dem oberen oder unteren Kartenrande parallel zu ziehen, werden nur wenige Ausnahmen gemacht. Zu diesen gehören die Bezeichnungen der Flüsse, welche nach deren Längenausdehnung entweder in die Wasserfläche selbst oder an deren Ufer zu stellen sind. Ferner gehören hieher die Hauptstrassen. Endlich grosse Terrainflächen, die sich längs eines Flusses oder Gebirgs hinziehen, und deren Bezeichnung in mässiger Krümmung ungefähr der Mitte der Flächenfigur folgt.

Für Ortsbenennungen gilt als Regel, die Namen dicht oberhalb des Ortszeichens zu setzen. Bei beschränktem Raume darf man sich jedoch erlauben, die Benennung neben das Zeichen zu setzen, aber nie soll sie unter demselben stehen.

Kommt es vor, dass die Bezeichnung eines Terrainbezirks wegen dessen grosser Fläche gedehnt werden muss, so sieht man die doppelte Buchstabenhöhe als Grenze des Abstandes der einzelnen Buchstaben an. Reicht eine solche Dehnung nicht aus, so unterlässt man dieselbe und bezeichnet dafür den fraglichen Bezirk zweimal, um jeden Zweifel über dessen Namen zu beseitigen.

Zweiter Abschnitt.

Planzeichnung.

§. 417.

Zur Kartenzeichnung sind Netze erforderlich, welche die Meridiane und Parallelkreise des abzubildenden Theils der Erdoberfläche darstellen, und in welche die einzelnen Objecte nach ihrer geographischen Lage mit mehr oder weniger Genauigkeit eingetragen werden. Die Zeichnung von Horizontalplänen gründet sich auch auf Netze, aber diese bestehen meist aus den Polygonen oder Dreieckverbindungen, welche behufs der Aufnahme der Pläne auf dem Felde ausgesteckt und gemessen wurden. An diese Netze schliesst sich die Zeichnung des Details um so besser an, je sorgfältiger jene gemessen und aufgetragen sind; es muss also hierauf alle Sorgfalt verwendet werden. Das Auftragen eines gut gemessenen Polygons oder Dreiecknetzes in einem bestimmten Massstabe kann aber für denjenigen, der das geometrische Zeichnen versteht, durchaus keine Schwierigkeit haben, da es sich bloss darum handelt, ähnliche Figuren zu zeichnen; wir werden desshalb hievon eben so wenig, als von der ebenfalls bekannten Construction verjüngter Massstäbe handeln. Ueber die Zeichnung der Vertikalpläne oder der Nivellemente von Linien und Flächen, von welcher in diesem Abschnitte zu handeln ist, geben theilweise schon die Betrachtungen über das Nivelliren Aufschluss; es braucht also hier nur das Fehlende nachgeholt zu werden. Und was die Grubenpläne betrifft, die sich aus Horizontal- und Vertikalprojectionen zusammensetzen, so werden auch über diese nur kurze Bemerkungen genügen, da sie entweder nach den vorausgesetzten Plänen oder nach den Regeln der darstellenden Geometrie behandelt werden, deren Handhabung wir dem Leser eben so wie die Fertigkeit im Zeichnen zumuthen.

A. Horizontal- oder Situationspläne.

1) Bezeichnung der darzustellenden Gegenstände.

§. 418.

Die geometrische Aufnahme erstreckt sich nur auf die Horizontalprojection der natürlichen oder künstlichen Grenzen von Eigenthum,

Bodencultur und Verkehrsanstalten; die Vertikalprojection des Terrains wird nur in bestimmten Fällen aufgenommen und auf Horizontalplänen in Form von Schichtenlinien, worüber bereits in den §§. 338 bis 345 gehandelt wurde, dargestellt. Die in dem §. 408 beschriebene Bergzeichnung wendet man in der Regel auf Karten, selten auf Plänen an, da sie erstens nicht so genau wie Schichtenlinien die Höhenverhältnisse des Bodens darstellt, zweitens mühsam herzustellen ist, und drittens bei stark geneigtem Terrain die Pläne so schwarz macht, dass Bau- und Culturprojecte in dieselben nicht deutlich mehr eingezeichnet werden können. Es bleibt uns also hier nur übrig, die Bezeichnungen für die erst genannten Objecte vorzuführen und zu erläutern. Die mitzutheilenden Figuren passen leider bloss für schwarze und nicht für farbige Pläne; wer aber jemals eine Anleitung zum Zeichnen farbiger Pläne angesehen hat, wird durch die nachfolgenden Bemerkungen über die Colorirung der Horizontalpläne an die conventionelle Darstellung eines beliebigen Objects in Farbe wieder erinnert werden.

§. 419.

Bezeichnung natürlicher Gebilde.

Die auf Plänen darzustellenden natürlichen Gebilde umfassen alles Land und Wasser der Erde; der Boden kann dabei kahl oder bewachsen, weich oder fest, nass oder trocken seyn.

Fig. 504.

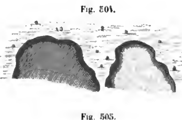
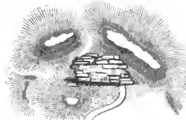




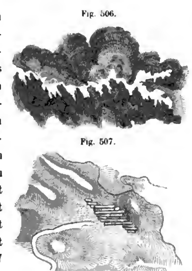
Fig. 505.



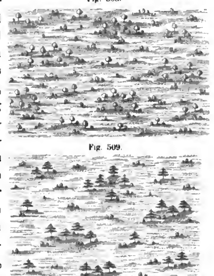
Der kahle Boden stellt sich als Sand-, Kies-, Geröll-, Lehm- oder Felsboden, oder als ewiges Eis dar. Die Bezeichnungen für diese verschiedenen Arten des kahlen Bodens stimmen mit denen des §. 410 im Allgemeinen überein, nur sind sie hier, weil grösser, bestimmter.

Wir fügen desshalb den früher gegebenen Bezeichnungen noch folgende bei: in Fig. 504 die Zeichen von Lehm- und Sandgruben, in

Fig. 505 die von Steinbrüchen, in Fig. 506 die von Felsen im Hochgebirge, in Fig. 507 die von Kohlenflötzen, und bemerken hiezu, dass in farbigen Plänen die Sandgruben einen röthlichen Ton mit eingezeichneten schwarzen Punkten und Strichen (wie in Fig. 503) erhalten; die Lehmgruben aber mit Terra di Sienna in zwei oder drei verschiedenen Tönen angelegt und mit Sepia gestrichelt werden; ferner dass Steinbrüche mit hellbrauner und Kohlenflötze mit dunkelbrauner Farbe (Sepia) angelegt und wie in den Figuren 505 bis 507 schwarz bezeichnet werden.


Fig. 506.
Fig. 507.

Der bewachsene Boden umfasst die von Wäldern, Gesträuchen, Feldern, Gärten, Wiesen, Haiden, Mooren und Sümpfen eingenommenen Flächen. Bei der Darstellung von Wäldern und Gebüschen ist das Laub- und Nadelholz zu unterscheiden. In schwarzen Plänen geschieht es nach den Figuren 508 und 509, in farbigen aber durch Anwendung eines lichtgrauen Tons für Nadelholz und eines blaugrauen für Laubholz. Grosse Waldflächen werden in schwarzen Plänen gewöhnlich nicht vollständig, sondern nur theilweise mit den betreffenden Charakteren bezeichnet; dagegen setzt man zweckmässig die Buchstaben P. W. (Privatwaldung), ST. W. (Staatswaldung), C. W. (Communalwaldung) bei, um sogleich auch die Kategorie der Besitzer zu bezeichnen (Fig. 510.)


Fig. 508.
Fig. 509.

Die Felder bleiben sowohl in schwarzen als farbigen Plänen

Fig. 510.

P.W.

ST.W.

C.W.

in der Regel weiss, wie das Papier; sind sie aber mit Bäumen besetzt, so deutet man dieses auf die aus Fig. 511 ersichtliche Weise an.

Bei **Gärten** ist zu unterscheiden, für welche Gewächse sie vorzugsweise bestimmt sind: Baumgärten werden in schwarzen Plänen

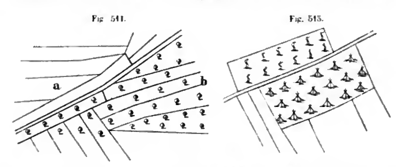


Fig. 511. Fig. 515.

nach Fig. 512 bezeichnet; in farbigen Plänen erhält der Boden die für ihn bestimmte Farbe. Zier- oder Blumengärten deutet man in schwarzen Plänen nach Fig. 513, Gemüsegärten nach Fig. 514 an. In farbigen Plänen werden Zier- und Gemüsegärten durch grün punktirte parallele

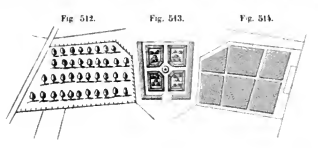
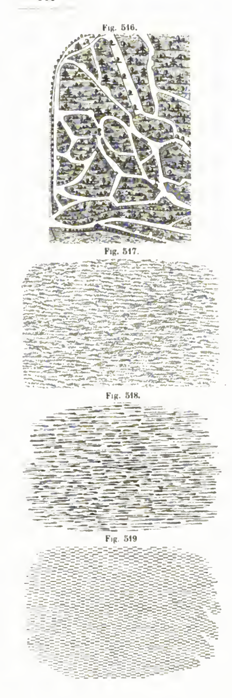


Fig. 512. Fig. 513. Fig. 514.

Linien bezeichnet. Weinberge und Hopfengärten erhalten in schwarzen Plänen die aus Fig. 515 ersichtlichen Zeichen; in farbigen werden die ersteren blassroth mit Carmin, die letzteren rothbraun mit Terra di Sienna angelegt. Englische Anlagen werden in schwarzen Plänen nach Fig. 516, in farbigen wie eine Zusammensetzung von Wiesen, Gebüsch, Wald und Wegen behandelt.


Fig. 516.
Fig. 517.
Fig. 518.
Fig. 519

Für Wiesen gilt die in Fig. 517 dargestellte Bezeichnung; in farbigen Plänen werden sie hellgrün angelegt, wobei die Mischung der Farbe aus Grünspanauflösung und Gummigutt besteht. Oedungen und Haiden deutet man in schwarzen Plänen bald nach Fig. 518, bald nach Fig. 519, in farbigen Plänen aber blassgelb (aus Gummigutt) an.

Moore werden, wenn sie kein Krummholz tragen, nach Fig. 520, wenn sie aber damit bewachsen sind, in welchem Falle sie Filze heissen, nach Fig. 521 dargestellt. In farbigen Plänen werden



Fig. 520

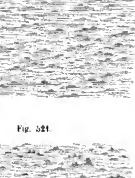
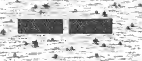


Fig. 521

Fig. 522.



Fig. 523.



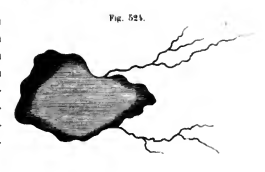
die Moore wie nasse Wiesen behandelt, erhalten aber lichtbraune und blaue Streifen und in die Filze wird noch überdiess Gebüsch eingezeichnet. Da sich die **Sümpfe** von den Mooren nur dadurch unterscheiden, dass sie mehr Wasser enthalten als diese, so werden sie auch in schwarzen und farbigen Plänen als wasserreiche Moore behandelt, d. h. man bringt in der Zeichnung (Fig. 522) mehr Wasserstriche als bei einem gewöhnlichen Moore an und lässt dafür einen Theil der in Fig. 520 enthaltenen Punkte weg.

Wenn in einem Moore **Torfstiche** vorkommen, so werden dieselben nach Fig. 523 bezeichnet, und in farbigen Plänen ausserdem noch braun angelegt.

Das **Wasser** wird in Plänen ebenso wie auf Karten dargestellt, wesshalb wir uns hier auf §. 409 beziehen. Ist der Massstab des Plans = 1 : 5000, so zeichnet man die Bäche unter 5′ und bei 1 : 2000 Gräben von weniger als 2′ Breite als einfache Linien, welche

aber selbst in schwarzen Plänen blau auszuziehen sind. Grosse Wasserflächen (Teiche, See'n etc.) kann man nach Fig. 524 behandeln, um das mühsame Schraffiren mit geschlängelten Linien zu ersparen.

Fig. 524.



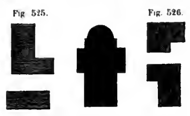
§. 420.

Bezeichnung künstlicher Gebilde.

Zu den künstlichen Gebilden, welche in Plänen anzuzeigen sind, gehören: Gebäude, Strassen, Brücken, Wasserbauten, Befestigungen, Begrenzungen, Signale, Monumente etc.

Die Gebäude werden nach ihrer Lage und ihren äusseren Umrissen dargestellt. Durch entsprechende Schraffirung unterscheidet man, ob sie aus Stein oder Holz bestehen, ob sie Privat- oder öffentliche Gebäude oder Ruinen sind. Massive Gebäude werden nach Fig. 526 unter einem Winkel von 45° gegen ihre Grundlinien schraffirt und es ist bei öffentlichen Gebäuden die Schraffirung dunkler zu halten als bei Privatgebäuden. Hölzerne Gebäude schraffirt man parallel zu ihren Grundlinien, wie die beiden Gebäude in Fig. 525. Kirchen kann man noch durch ein Kreuz und den Standpunkt des Thurms durch einen Ring mit Mittelpunkt kenntlich machen. Ruinen werden nur an den Rändern schraffirt, um gleichsam anzudeuten, dass ein Theil des Mauerwerks fehlt. Bei Mühlen und anderen Wasserwerken sind nebenbei kleine Sternchen anzubringen, welche Wasserräder bedeuten. Kirchhöfe werden wie Wiesen behandelt und erhalten zum Unterschiede von diesen kleine Kreuze. In farbigen Plänen legt man die massiven Gebäude roth (mit Carmin), die hölzernen gelb (mit Gummigutt) an. Oeffentliche Gebäude werden in beiden Fällen zweimal angelegt.

Fig. 525. Fig. 526.



Die Strassen werden nach ihrer Grösse und Bedeutung verschieden bezeichnet. Fig. 527:

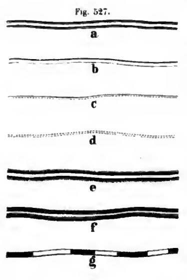


Fig. 527.

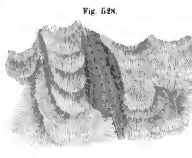
Lit a. Eine Hauptstrasse (Staats- und Kreisstrasse, Strasse 1. und 2. Classe). Befinden sich an derselben Alleebäume, so werden dieselben angedeutet. In farbigen Plänen zieht man die inneren Begrenzungslinien roth aus und legt die Oberfläche blassroth an.

Lit. b. Eine Nebenstrasse (Bezirksstrasse, Gemeindeweg, Strasse 3. und 4. Classe). Hinsichtlich der Alleebäume und Colorirung derselben gelten die vorhergehenden Bemerkungen.

Lit. c. Ein Feld- oder Waldweg. Es soll immer die obere Linie ausgezogen und die untere punktirt werden. In farbigen Plänen legt man den Zwischenraum lichtbraun an.

Lit d. Ein Fussweg. Statt dieser Bezeichnung wird häufig auch nur eine aus Strichen und Punkten zusammengesetzte Linie angewendet.

Lit. e. Ein Damm (Erdschüttung, Auftrag). In farbigen Plänen wird die Dammkrone blassroth angelegt und jede Böschung mit Carmin verwaschen.


Fig. 528.

Lit. f. Ein Hohlweg (Trockengraben, Einschnitt). In farbigen Plänen legt man die Sohle lichtbraun und die Böschungen gelb an, letztere verwaschen.

Lit. g. Ein Knüppelweg. Die Querstriche bezeichnen die Knüppel. Die lichten Stellen macht man in farbigen Plänen, je nach der Bedeutung des Wegs, blassroth oder lichtbraun.

Lit h. Eine Eisenbahn. Nebenbei werden grosse Aufdämmungen nach Fig. e und bedeutende Einschnitte nach Fig. f angedeutet. In farbigen Plänen kann man die beiden Grenzlinien der Bahnkrone blau ausziehen.

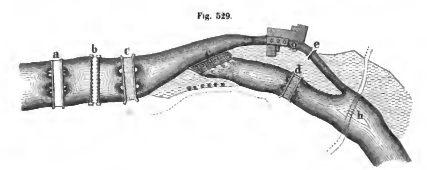
Zu den Wegen kann man auch noch die Holzrisse oder

Rutschbahnen (Fig. 528) rechnen, welche im Gebirge angelegt werden, um gefälltes Holz von den Bergen herabzuschaffen.

Von den Brücken gibt man die Hauptlinien der horizontalen Projection an; in farbigen Plänen werden die steinernen roth, die hölzernen gelb, die eisernen graublau angelegt.

In Fig. 529 bezeichnet: a eine Schiffbrücke, bei welcher je zwei Schiffe (Pontons) ein Joch bilden; b eine eiserne und insbesondere

Fig. 529.

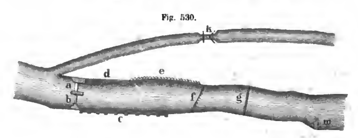


eine Kettenbrücke; c eine steinerne, d eine hölzerne Brücke, e einen Steg. An seichten Stellen der Flüsse werden die Brücken bisweilen durch Furthen (h) ersetzt. Kommen in colorirten Zeichnungen Brücken vor, so bleibt die Form dieselbe wie in schwarzen Plänen, aber das vorherrschende Baumateriale wird, je nachdem es Stein, Holz oder Eisen ist, durch rothe, gelbe oder blaue Farbe angedeutet.

Die Wasserbauten werden in schwarzen und farbigen Plänen nach ihren Grundformen und ihrer Grösse dargestellt und man unterscheidet dabei, ob sie aus Stein oder Holz, oder aus beiden zugleich bestehen. In Fig. 530 bedeutet a eine steinerne und b eine hölzerne Schleuse; erstere wird in farbigen Plänen carminroth, letztere aber hellgelb (Gummigutt) angelegt.

Lit. c stellt ein steinernes und d ein hölzernes Beschlächt vor;

Fig. 530.

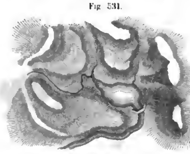


in colorirten Plänen legt man jenes carminroth, dieses unter Weglassung der Schraffirung hellgelb an. Lit. e ist ein Flechtwerk, welches auch in farbigen Plänen in ähnlicher Weise wie hier behandelt wird. Dasselbe gilt von dem in f dargestellten Holzrechen und den mit g bezeichneten Ueberfällen. Ein grösseres Ueberfallwehr ist in Fig. 529 durch den Buchstaben f angedeutet.

Lit. k stellt eine Kammerschleuse vor: aus Steinen gebaut, wird sie in farbigen Plänen wie Mauerwerk, aus Holz wie Zimmerwerk behandelt.

Lit. m ist eine Schiffsmühle: das vorne angebrachte Sternchen bezeichnet hier (ähnlich wie bei den feststehenden Mühlen) den Ort des Wasserrades. In farbigen Plänen lässt man die Schraffur ganz weg und behandelt die Figur mit einem blassgelben Farbton. Eine Landmühle ist in Fig. 529 mit g bezeichnet.

Fig. 531.



Zu den Wasserbauten sind auch die Triftklausen (F. 531) oder jene ganz oder halb massiven Schleusenwehre zu rechnen, welche in grossen Wäldern quer durch Schluchten gebaut werden, um Quellen und kleine Bäche so weit aufzustauen, dass sie nach Oeffnung der Schleusenthore im Stande sind, das in dem Klausenhof angesammelte Holz den Berg hinab zu triften.

Befestigungen werden ebenfalls nach ihren Grundformen und der Verjüngung des Plans entsprechend horizontal projicirt. Böschungen werden nach dem Grade ihrer Neigung heller oder dunkler schraffirt; die Sohle trockener Gräben ist in schwarzen Plänen zu punktiren, in farbigen aber lichtbraun anzulegen; nasse Gräben werden dagegen in schwarzen und farbigen Plänen wie Flüsse behandelt. Für Mauer-, Holz- und Eisenwerk gelten die schon bekannten Unterscheidungszeichen.

Für Signale, Monumente und die übrigen künstlichen Gebilde, welche unter den vorhergehenden nicht begriffen und auch keine Grenzen sind, bedient man sich der in Fig. 532ª und 532ᵇ enthaltenen, gleichmässig für schwarze und farbige Pläne geltenden Bezeichnungen. Die Fig. 532ª enthält vorzugsweise solche Zeichen,

welche bei Netzlegungen für Landesvermessungen und daher in Plänen von starker Verjüngung gebraucht werden. In derselben bedeutet: a einen Normalpunkt (§. 305), b ein massives Signal für eine Basis, c ein Gerüst-Signal, d ein dergleichen mit Dach, e ein Stocksignal,

Fig. 532 a.

a b c d e f g h i k l m n o p q r s t u

f einen Kirchthurm, g eine Capelle, h ein bewohnbares Schloss, i eine Schlossruine, k einen Blitzableiter, l einen Kamin, m einen Dachgiebel, n ein Baumsignal (Laubholz), o ein dergleichen von Nadelholz, p ein Feldkreuz, q einen Wegweiser, r eine Ortstafel, s eine Martersäule, t einen Markstein, u einen untergeordneten

Fig. 532 b

a b c d e f g h i k

Netzpunkt. In Fig. 532[b] bezeichnet: a einen Bildstock, b einen massiven Meilenzeiger, c ein Monument, d einen Wegweiser, e ein Feldkreuz, f einen Schlagbaum, g eine Orts- und Warnungstafel, h eine Kohlstätte (Meiler), i einen Kalkofen, k eine Windmühle.

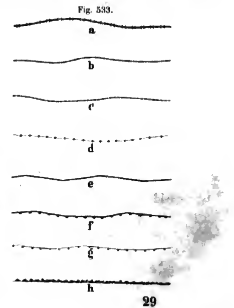


Fig. 533.

Für Begrenzungen sind folgende Bezeichnungen im Gebrauche (F. 533): a Landesgrenzen, b Kreisgrenzen, c Bezirks- oder Landgerichtsgrenzen, d Gemeinde- und Flurgrenzen, e einfache Umfassungsmauern, f Umfassungsmauern mit Strebepfeilern, g Bretterwände, h lebendige Zäune.

2) Herstellung der Horizontalpläne.

§. 421.

Messtisch-Aufnahmen auszufertigen.

Die Horizontalpläne werden entweder mit oder ohne Messtisch aufgenommen. In dem ersteren Falle werden die Umrisse des Plans schon bei seiner Aufnahme gezeichnet, und er bedarf nur noch der Vollendung oder Ausfertigung; in dem letzteren Falle aber ist der Plan aus den Messungs- und Rechnungsergebnissen erst herzustellen; und es geschieht folglich seine Anfertigung ausschliesslich im Arbeitszimmer des Geometers.

Die Ausfertigung der mit dem Messtische aufgenommeneu Pläne geschieht entweder mit oder ohne Farbe. In Bezug auf die schwarzen Pläne ist zu bemerken, dass sie grösstentheils schon während der Aufnahme mit guter schwarzer Tusche ausgezogen werden, so dass nach der Aufnahme die dargestellten Objecte nur noch mit den in den §§. 419 und 420 abgebildeten üblichen Zeichen zu versehen, der Massstab der Aufnahme beizufügen und die Schrift auszuführen ist, welche zum Verständniss des Plans erfordert wird. Sollen in den Horizontalplan Schichtenlinien eingezeichnet werden, um zugleich die Erhöhungen und Vertiefungen des Bodens anschaulich zu machen, so ist zu rathen, dass man diese Linien selbst in einem schwarzen Plane mit farbiger Tusche ausziehe, um jede Veranlassung zu Zweifeln über die Grenze der dargestellten Objecte abzuschneiden. Am natürlichsten erscheint es, diese Curven braun und nur jede fünfte oder zehnte vor den übrigen durch eine besondere Farbe (etwa grün) auszuzeichnen, um hierdurch den Ueberblick der Figurirung des Terrains zu erleichtern. Farbige Pläne werden der Hauptsache nach zunächst wie schwarze Pläne behandelt, nur dass bei der Auszeichnung mit Tusche in den Planzeichen die Schraffirungen und Punktirungen wegbleiben, welche durch die Farbe selbst ersetzt werden, und worüber die beiden vorhergehenden Paragraphe Aufschluss geben. Die Behandlung der Farben wird als bekannt vorausgesetzt und bezüglich der Horizontalcurven, des Massstabs und der Schrift gelten die für schwarze Pläne gemachten Bemerkungen.

§. 422.

Pläne nach Coordinatenmessungen anzufertigen.

Die ersten Arbeiten zur Herstellung dieser Pläne bestehen darin, dass man das aufgespannte Papier mit einem genau construirten Quadratnetz überzieht, dessen Seiten den für die Berechnung der Aufnahme gewählten Coordinatenaxen parallel laufen. Die Massstäbe des Netzes macht man für die Massstäbe 1 : 5000, 1 : 2500, 1 : 1200 beziehlich $^1/_2$, 1, 2 Decimalzoll lang, so dass jede Seite in der Natur eine Länge von 250 Fuss hat; und wenn 1 : 4000, 1 : 2000, 1 : 1000 die Verjüngungen sind, so macht man auf den Plänen die Quadratseiten abermals beziehlich $^1/_2$, 1, 2 Decimalzoll lang, so dass jede Seite einer natürlichen Länge von 200 Fuss entspricht. Wählt man von den Netzpunkten einen entsprechenden als Anfangspunkt der Coordinaten der Stationen, so ergeben sich damit auch die Axen des Blattes und es wird keiner Schwierigkeit unterliegen, unter Berücksichtigung des in §. 311 auseinander gesetzten Verfahrens, diese Stationspunkte selbst richtig in das Plannetz einzutragen. Hat man diese Punkte, so sind damit wiederum untergeordnete Abscissenaxen für die Aufnahme von Grenzen oder anderen Linien etc. gegeben, welche sich also auch leicht in den Plan eintragen lassen. Um die übrigen Punkte zu erhalten, ahmt man die zu ihrer Aufnahme auf dem Felde angewendeten Constructionen auf dem Papiere nach. Geschieht es dabei, dass ein Punkt als der Schnitt zweier Linien bestimmt wird, welche durch Stationspunkte gehen, die ausserhalb des Planrandes liegen, so sind jedesmal nach den bekannten einfachen Sätzen der Trigonometrie oder analytischen Geometrie die Coordinaten des Schnittpunktes zu berechnen und darnach aufzutragen; denn es würde zu unsicher und zeitraubend seyn, wenn man die ausser dem Plane liegenden Stationspunkte erst construiren wollte, um durch eine entsprechende Verbindung derselben den gesuchten Punkt sofort direct zu erhalten. Findet man die gerade Verbindungslinie zweier Punkte, welche für die Aufnahme von Details mit der Kette als Abscissenaxe dient, grösser oder kleiner als sie der wirklichen Messung nach seyn soll, und ist die Differenz keinem groben Versehen beim Messen oder Auftragen zuzuschreiben: so müssen entweder die gemessenen Abscissen auf die im Plane gegebene Länge der Abscissenaxe, oder es muss diese auf die gemessenen Abscissen

reducirt werden. Das erstere Verfahren ist für sich klar; zur Erläuterung des zweiten, welches von intelligenten Praktikern vorgezogen wird, dürfte ein einfaches Beispiel genügen.

Hat nämlich die Kettenmessung für eine Linie 784,'2 und der Plan nur 781,2 ergeben, so verlängert man die Linie auf dem Plane um 800 — 784,2 = 15,'8, so dass deren Gesammtlänge jetzt = 781,'2 — 15,'8 = 797' ist, und nimmt diese Länge für 800' an. Theilt man diese Länge in 8 gleiche Theile, so wird jeder 99,'7 statt 100' lang. Die Differenz von 0,'3 ist bei Massstäben, welche kleiner als 1 : 2000 sind, kaum mehr sichtbar und darf daher wohl vernachlässigt werden. Ist der Massstab grösser als 1 : 2000 oder die Differenz grösser als hier, so braucht man nur die Anzahl der Theile, in welche man die reducirte Linie zerlegt, zu vergrössern, um die Theildifferenzen so klein zu erhalten, dass sie vernachlässigt werden dürfen.

Man begreift, dass sich das in vorstehendem Beispiele versinnlichte Verfahren auch anwenden lässt, um eine geneigte Abscissenlinie, die nicht horizontal, sondern dem stetig steigenden oder fallenden Boden entlang gemessen worden ist, auf den Horizont zu reduciren. Ist man so weit gekommen, dass alle Punkte und Linien aufgetragen und alle Umrisse mit Tusche ausgezogen sind, so wird die Ausfertigung des Plans nach §. 421 vollzogen.

B. Vertikal- oder Nivellementspläne.

1) Längenprofile

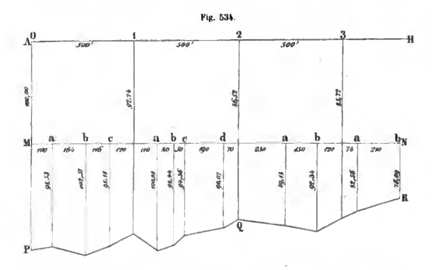
§. 423.

Die Zeichnung eines Längenprofils der Erdoberfläche besteht der Hauptsache nach in dem Auftragen der gemessenen und berechneten Abscissen und Ordinaten aller Brechungs- und Abtheilungspunkte der nivellirten Linie. Da dergleichen Profile oft sehr lang sind, so kommt es darauf an, die Zeichnung möglichst übersichtlich zu machen. Zu dem Ende ist es Gebrauch

1. die Horizontalprojection der Linie, nach welcher das Terrainprofil genommen wird, auf dem Felde schon in gleiche Abschnitte von einer in runder Zahl auszudrückenden Länge (z. B. 100 Meter, 100 Klafter, 100 Ruthen, 500 Fuss, 1000 Fuss etc.) zu theilen und diese Abtheilungspunkte von 0 angefangen fortlaufend zu numeriren.

Diese Numerirung gibt sofort die Länge der Abscisse an; denn beträgt eine Abtheilung 100 Ruthen à 10 Fuss, so gibt die Abtheilungs- oder Profilnummer 37 an, dass der damit bezeichnete Punkt 3700 Ruthen oder 37000 Fuss vom Anfangspunkte der Linie entfernt sey. Diese Hauptabtheilungen werden in der Zeichnung auf die Weise hervorgehoben, wie Fig. 534 zu erkennen gibt, in der die

Fig. 534.



Linie AJC den Horizont bezeichnet, auf die sich die Abstände der Terrainpunkte beziehen. Es ist ferner Gebrauch

2. die zwischen den Hauptpunkten liegenden Brechungspunkte des Terrains auf dem Felde und in der Zeichnung durch Buchstaben zu benennen, wie dieses abermals aus der vorstehenden Figur zu entnehmen ist. Würde man die Buchstaben a, b, c.... auch über die Linie AH setzen, so liessen sich die Ziffern 1, 2, 3... nicht mehr so gut übersehen, als dieses der Fall ist, wenn man in einer Entfernung von etwa 2 Zollen eine Parallele MN zu AH zieht und über diese Parallelen den Namen der Zwischenpunkte setzt. Wenn auch in der Zeichnung die Ordinaten dieser Punkte nur bis an die Linie MN ausgezogen sind, so beziehen sich die beigeschriebenen Vertikalabstände doch auf die durch AH angedeutete gemeinsame Horizontalebene. Weiter ist es gebräuchlich

3. die horizontalen Entfernungen der einzelnen Profilpunkte unter sich in den Plan einzuschreiben, wie die mehrgenannte Figur zeigt;

und zwar stehen die Längen der Hauptabtheilungen unmittelbar unter der oberen, die der Zwischenabtheilungen aber unmittelbar unter der unteren Horizontalen. Für die Hauptabtheilungen wäre das Einschreiben der Länge unnöthig, wenn es nicht manchmal vorkäme, dass eine Abtheilung grösser oder kleiner werden muss als das bestimmte Mass; z. B. bei Flüssen, Gebäuden etc. In solchen Fällen ergänzen sich aber immer zwei Nachbarabtheilungen; denn kann z. B. die eine nur 920′ lang gemacht werden, so erhält die folgende eine Länge von 1080′, so dass beide Abtheilungen zusammen doch wieder 2000′ lang sind. Eben so ist es eingeführt

4. die Abscissen und Ordinaten nach verschiedenen Massstäben aufzutragen und zwar die Ordinaten in einem grösseren Massstab als die Abscissen. Der Höhenmassstab ist nach Erforderniss 5, 10, 20, 100mal grösser als jener der Längen. Durch diese Verschiedenheit der Massstäbe erhält man zwar ein verzerrtes Bild des Terrainprofils, aber man übersieht dessen Steigungen und Gefälle besser. Es hindert jedoch nichts, Längen und Höhen nach einerlei Massstab aufzutragen, wenn man dazu Lust oder sonst wie Veranlassung hat. Endlich ist es ein allgemeines Uebereinkommen,

5. alle Linien, Zahlen und Worte, welche sich auf das natürliche Terrain beziehen, schwarz; jene aber, welche sich auf ein herzustellendes Bauwerk, z. B. eine Strasse, Eisenbahn, einen Canal, Durchstich etc. beziehen, roth zu zeichnen und zu schreiben, um durch diese Farben das Bestehende von dem Werdenden oder den auf dem Terrain vorzunehmenden Veränderungen anzuzeigen.

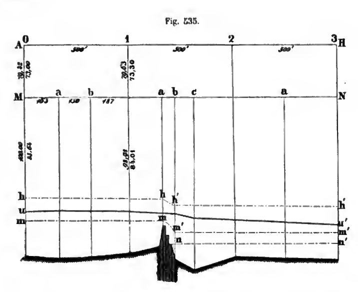
Näher hierauf einzugehen, liegt ausser dem Zwecke dieses Buches und gehort in das Bereich des Ingenieurwesens; wen es jedoch interessirt, die gebräuchliche Anlage und Ausstattung von Nivellementsplänen für Erdbauwerke näher kennen zu lernen, findet dergleichen in des Verfassers „Vorlegeblättern zur Strassen- und Eisenbahnbaukunde mit erläuterndem Texte,“ welche (zum Theil in Farbendruck) im Jahre 1856 in der literarisch-artistischen Anstalt der J. G. Cotta'schen Buchhandlung zu München erschienen.

§. 424.

Das Längenprofil eines Flusses unterscheidet sich von dem einer trockenen Terrainstrecke nur insoferne, als es ausser dem Nivellement der Stromrinne oder des Thalwegs, welches gerade wie ein

Terrain-Längenprofil dargestellt wird, noch die Wasserspiegel des Flusses bei verschiedenen Wasserständen und in der Regel auch ein Ufer desselben bildlich darstellt. Nehmen wir an, dass das Nivellement des Flusses nach §. 385 aufgenommen und das des Thalwegs nach §. 423 aufgetragen sey, so ist hinsichtlich des Einzeichnens der Wasserspiegel und des Flussufers unter Bezugnahme auf Fig. 535, welche ein Stück eines Flussnivellements vorstellt, noch Folgendes zu bemerken:

Fig. 535.



1. Die Linien und Zahlen, welche sich auf die Wasserstände beziehen, werden blau gezeichnet und geschrieben. Da wir aber diese Farbe in Fig. 535 nicht anwenden konnten, so haben wir die Wasserspiegel durch gestrichelt-punktirte Linien (—·—·—) und die sich auf sie beziehenden Zahlen durch stehende Schrift angedeutet. Die übrigen an den Ordinaten 0 und 1 sich befindenden Zahlen beziehen sich auf den Thalweg und das Flussufer, und gehen denen für die Wasserstände jederzeit voraus.

2. Ob die blauen Zahlen dem Hochwasser (h, h′), oder dem Mittelwasser (m, m′), oder dem Niederwasser (n, n′) angehören, ergibt die Ansicht der Zeichnung ohne Weiteres. Ebenso versteht es sich von selbst, welche schwarze Zahl dem Thalweg und welche dem Ufer angehört. Die Uferlinie wird ebenfalls schwarz ausgezogen.

3. Für den Gebrauch des Längenprofils eines Flusses ist es bequemer, dasselbe so abzustecken und abzubilden, dass die fortlaufenden Nummern der Hauptabtheilungen und die Schrift, welche auf den Plan gehört, in der Richtung des Flussbetts stehen. Man kann zwar ein Nivellement, welches in der entgegengesetzten Richtung aufgenommen und gezeichnet ist, ebenso gut wie das vorige gebrauchen; aber es tritt dem, der an die erstere Darstellungsweise gewöhnt ist — und das ist wohl der grössere Theil der Ingenieure — einigermassen störend entgegen.

4. Die Befolgung der hier gegebenen Regeln setzt keineswegs, wie oft behauptet wird,[1] voraus, dass die Aufnahme auf dem linken Flussufer geschehen müsse: sie kann unbeschadet der Darstellung ebenso gut auf dem rechten Ufer vorgenommen werden, da es offenbar gleichgültig ist, ob die sichtbare Uferlinie (u, u′) diesseits oder jenseits des Wasserprofils (m m′) liegt.

2) Querprofile.

§. 425.

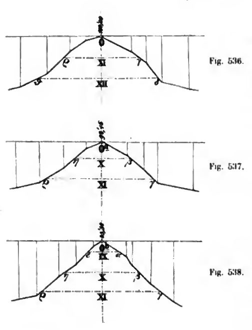


Fig. 536.

Fig. 537.

Fig. 538.

Für die bildliche Darstellung der Querprofile sowohl des festen Bodens als der Flüsse gelten im Allgemeinen die in den beiden vorhergehenden Paragraphen mitgetheilten Regeln; im Besondern ist aber noch folgendes zu bemerken.

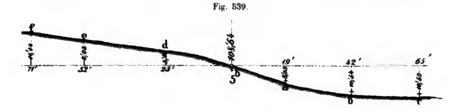
1. Benützt man die aufgenommenen Querprofile zur Darstellung der Bodenoberfläche durch Horizontalcurven, so trägt man dieselben (nach den Figuren 536 bis 538) in verschiedenen Massstäben auf und nimmt die der

[1] Z. B. In Bachmann's „Theorie und Praxis des Nivellirens“, Weimar 1838, S. 185.

Abscissen gleich dem Massstabe des Horizontalplans, worauf die genannten Curven verzeichnet werden sollen, den der Ordinaten aber 5 oder 10mal grösser.

2. Gebraucht man die Querprofile zur Berechnung von Erdmassen oder zu Constructionen für Erdbauwerke, so werden die Abscissen und Ordinaten, wie in Fig. 539, in gleichem Massstabe

Fig. 539.



aufgetragen, und dieser selbst wird so gross genommen, dass man die Dimensionen der zu berechnenden Flächentheile des Profils noch mit der Genauigkeit abgreifen kann, welche die Rechnung oder die Construction erfordert. Der gebräuchlichste Massstab ist 1 : 100; weniger oft wird 1 : 200 oder 1 : 50 angewendet.

3. Die Querprofile der Flüsse werden entweder nach Fig. 531 oder nach Fig. 532 gezeichnet, je nachdem sie bloss zur Darstellung der Beschaffenheit eines Flusses oder zu Erdberechnungen und Constructionen verwendet werden; ausserdem werden in sie mit blauer Farbe die Wasserstände eingetragen, wie solche an der betreffenden Stelle des Längenprofils enthalten sind.

4. Schliesslich wiederholen wir die schon früher gemachte Bemerkung, dass bei der Zeichnung der Querprofile die rechte und linke Seite derselben nicht verwechselt werden darf, wenn man nicht Gefahr laufen will, die Construction oder Rechnung, wofür man solche Profile braucht, ganz zu entstellen und folglich unbrauchbar zu machen.

3) Horizontalcurven.

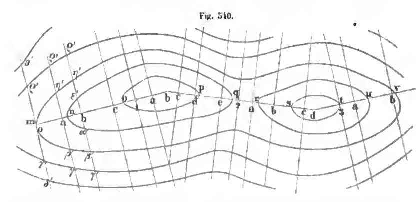
§. 426.

Wie die Horizontalcurven aus gegebenen Terrainaufnahmen construirt werden, ist schon in den §§. 342 bis 345 gezeigt worden, da sich die Aufnahme derselben vollständiger erklären lässt, wenn man zugleich die verschiedenen Methoden, die Curven daraus zu

finden, kennt. Eben so haben wir früher schon daran erinnert, dass es zweckmässig erscheine, selbst auf schwarzen Horizontalplänen die Schichtenlinien farbig (etwa braun) auszuziehen und bei sehr durchschnittenem Terrain jede fünfte oder zehnte Curve durch eine besondere Farbe (etwa grün) vor den übrigen auszuzeichnen, weil sich dadurch deren Gang und hiemit die Gestaltung des Terrains leichter erkennen lasse. In Fig. 412 S. 309 ist eine solche Curve (X) gestrichelt, während die übrigen ausgezeichnet sind; und in unseren „Vorlegeblättern zur Strassen- und Eisenbahnbaukunde" ist ein farbiger Situationsplan mit Horizontalcurven enthalten.

Ist eine Terrainfläche durch Horizontalcurven dargestellt, so lässt sich aus denselben nach jeder beliebigen Richtung ein Profil construiren. Denn angenommen, Fig. 540 stelle das Nivellement einer

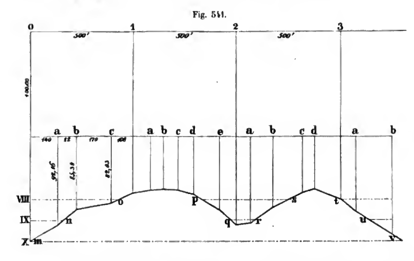
Fig. 540.



Fläche vor und der Abstand der Curve m vom allgemeinen Horizonte sey = 100 Fuss, so wird man das Längenprofil nach der Richtung m b d v erhalten, wenn man zuerst diese Richtungen in Hauptabtheilungen (0, 1, 2, 3 ....) von etwa 500 Fuss Länge und passenden Zwischenabtheilungen (a, b, c ....) zerlegt und die Vertikalabstände dieser Punkte bestimmt. Für m = o ist dieser Abstand = 100′; für 0ª findet man ihn folgendermassen. Denkt man sich in der Richtung m b das Terrain durch eine Vertikalebene geschnitten und in a und n Senkrechte zur Horizontalprojection m b errichtet, bis sie die Terrainlinie m o b in a′ und n′ schneiden: so hat man zwei ähnliche Dreiecke m n n′ und m a a′, in welchen drei Stücke bekannt sind, nämlich: n n′ = 10′ = dem Abstand der Horizontalebenen, m n = 178,′6 und m a = 140′ = den Längen, welche der

im Massstabe von 1 : 5000 angefertigte Horizontalplan liefert; man findet desshalb aus der Proportion
mn : ma = nn' : aa' oder aus 178,'6 : 140' = 10' : aa' aa' = 7,'84 und es ist folglich der Abstand des in a projicirten Punktes a' oder o^a, da er 7,'84 über m, das den Abstand 100' hat, gleich 100 — 7,'84 = 92,'16. So fortfahrend erhält man die Abstände und Entfernungen der Punkte 0^b, 0^c, 1, 1^a, 1^b .... n, o, p, q .... und kann damit folglich den gesuchten und in Fig. 541 dargestellten Längendurchschnitt zeichnen.

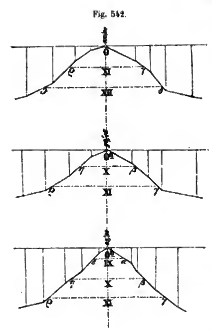
Fig. 541.



In gleicher Weise kann man in Bezug auf das Längenprofil mnopq.... Querprofile aus den Horizontalcurven construiren. Will man z. B. in dem Punkte m oder o der Fig. 540 ein zu mb senkrecht stehendes und folglich in der Richtung $\varrho' m \delta'$ zu nehmendes Querprofil zeichnen, so hat man zunächst für den Punkt m oder o den Abstand = 100'; für die Punkte γ' und ϱ' die Ordinaten = 110' die Abscissen beziehlich = $m\gamma'$ und = $m\varrho'$; für δ' und ϑ' die Ordinaten = 120', die Abscissen = $m\delta'$ und $m\vartheta'$. Damit ist das erste Querprofil 0 in Fig. 542 bestimmt. Durch ein gleiches Verfahren findet man auch die Querprofile 0^a, 0^b u. s. w.

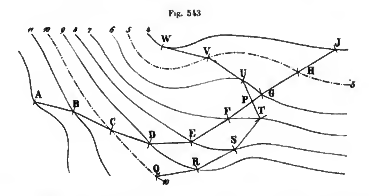
Für die Ingenieure werden die Horizontalcurven namentlich dadurch von besonderer Wichtigkeit, dass sie gestatten, auf sehr einfache Weise eine Linie von bestimmter Neigung aufzusuchen, welche von einem gegebenen Punkte ausgeht und in einem anderen gegebenen

Fig. 542.



Punkte ankommt. Soll z. B. eine solche Linie von 5 % Steigung zwischen den Punkten A und W der Fig. 543 gesucht werden und ist der Abstand der Horizontalebenen = 10 Fuss, der Massstab des Horizontalplanes = 1 : 5000 gegeben, so verfährt man folgendermassen. Man berechnet zuerst die Länge der Horizontalprojection einer Linie, deren oberer Endpunkt gerade um 10′ höher liegt als der untere (diese Länge beträgt hier 200′); alsdann schneidet man mit dieser auf den Massstab des Planes reducirten Länge (hier mit einer Zirkelöffnung von 0,′04) von dem Punkte A aus die Punkte B, C, D, E ...., und von W aus die Punkte V, U, T, S .... ab. Die Linien ABCDE .... und WVUT .... schneiden sich im Punkte P; da nun die Stücke FP (von GF) und PU (von TU) ebenfalls 5 %

Fig. 543



Steigung haben, so erfüllt die stärker ausgezogene Linie ABCDE PUVW die gegebenen Bedingungen, und es ist dieselbe folglich eine der möglichen Lösungen der gestellten Aufgabe. Die Richtigkeit des Verfahrens bedarf wohl keines besonderen Beweises; und

dass viele Lösungen möglich sind, erkennt man sofort an dem Umstande, dass von jedem Punkte A, B, C ... W, V, U ... aus im Allgemeinen zwei Schnittpunkte auf der nächst höheren oder tieferen Curve erhalten werden, von welchen aus wieder zwei Schnitte möglich sind. Zu entscheiden, welche von den aufgefundenen Linien einem ausgesprochenen Zwecke am besten genügt, gehört nicht mehr hieher.

C. Berg- oder Grubenpläne.

§. 427.

Die Berg- oder Grubenpläne bestehen, wie die geometrischen Pläne, aus Horizontal- und Vertikalprojectionen oder aus „Grundrissen" und „Seigerrissen."

Die Grundrisse stellen entweder einen Theil der Erdoberfläche oder einen wagrechten Durchschnitt eines Grubenwerks vor; in dem ersteren Falle unterscheiden sie sich der Form nach durch nichts von einem geometrischen Situationsplane, und im letzteren Falle stimmen sie formell mit dem wagrechten Durchschnitte eines Gebäudes überein. Besondere allgemein übliche Zeichen für die Horizontalprojectionen von Gegenständen, die ausschliesslich dem Bergbaue und beziehungsweise der Markscheidekunst angehören, gibt es nur wenige. Die gebräuchlichsten sind in Fig. 544 zusammengestellt und nachstehend erklärt: a bedeutet einen Schacht, b ein Stollenmundloch ohne Rösche und c mit einer offenen Rösche, d einen

Fig. 544.

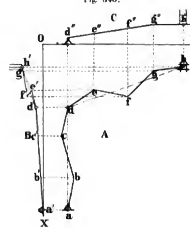
a b c d e f g h i k l m n o p q

Bohrpunkt, e ein Schurfzeichen, f einen Mark- oder Lochstein. Die Mineralgattung, welche in einem Bergwerke gewonnen oder anderswo gefunden wird, bezeichnet man sowohl in topographischen Karten als in Situationsplänen und Grundrissen meist mit den in der Astronomie gebräuchlichen Zeichen der Himmelskörper, nämlich mit dem Zeichen der Sonne (g) das Gold, mit dem Zeichen des Mondes (h) das Silber, mit dem des Merkurs (i) das Quecksilber, mit dem der Venus (k) das Kupfer, mit dem des Mars (l) das Eisen, mit dem der Erde (m) das Blei, mit dem des Jupiters (n) das Zinn.

Für Schwefel gebraucht man das Zeichen o, für Kochsalz das Zeichen p und für Alaun das Zeichen q.

Die Seigerrisse der Markscheider stimmen im Allgemeinen mit den Längen- und Querprofilen der Ingenieure und Geometer überein; in einzelnen Fällen aber unterscheiden sie sich dadurch von den geometrischen Profilen, dass sie wirkliche Vertikalprojectionen sind, während die genannten Längen- und Querprofile stets als Abwickelungen lothrecht stehender Prismen- oder Cylinderflächen erscheinen. In solchen Fällen sind dann auch gewöhnlich drei Projectionen eines Grubengebäudes vereinigt, nämlich die horizontale (söhlige Projection, Grundriss) und zwei auf einander senkrecht stehende (erste und zweite vertikale Projection, Aufriss und Kreuzriss); es werden also die aufgenommenen Linien und Winkel auf drei senkrechte Coordinatenebenen nach den Regeln der analytischen und darstellenden Geometrie projicirt. Die Wahl der Projectionsaxen und beziehungsweise der Projectionsebenen ist im Wesentlichen unbeschränkt; man wird jedoch gut thun, bei Darstellungen von Stollen, Strecken, Querzuschlägen u. dgl. eine der Axen in das allgemeine Streichen dieser Grubenbaue zu legen, damit wenigstens eine vertikale Projection nahezu unverkürzt ist. Ferner erscheint es zweckmässig, die horizontale Projectionsebene bei Stollenbauen durch den tiefsten Punkt der Stollensohle und bei Tiefbauen in die höchste Stelle des Schachtes, d. i. in seinen Tagkranz zu legen; endlich kann man auch, wenn es die bildliche Darstellung übersichtlicher oder verständlicher macht, die beiden vertikalen Projectionsebenen auch unter einem spitzen oder stumpfen Winkel sich schneiden lassen.

Fig. 545.



In Fig. 545 ist die Axe OX dem allgemeinen Streichen ad des Stollens parallel, die Axe OY aber senkrecht auf OX gestellt; A ist der Grundriss, B der Aufriss, C der Kreuzriss des Stollens ad und seines Querschlags dh. Dass dieses Auftragen nur auf Grund eines vollständig berechneten Markscheidezugs, wozu die §§. 367

bis 370 Anleitung geben, geschehen kann, versteht sich von selbst, und dass auch hier die Höhen in der Regel nach einem anderen Massstabe aufgetragen werden als die Längen, bedarf wohl kaum der Erinnerung.

Für das Ueberschreiben und Copiren der Grubenpläne gelten die für geometrische Pläne mitgetheilten Regeln; und was das Coloriren der Zeichnungen betrifft, so gibt man den oberirdischen Gegenständen dieselben Farben, welche sie in topographischen Karten und Plänen erhalten, während die Bezeichnung der unterirdischen Objecte mit Farben ziemlich willkührlich ist. Empfehlenswerthe colorirte Grubenpläne findet man in Hanstadt's „Anleitung zur Markscheidekunst," Pesth 1835, und in Weisbach's „neuer Markscheidekunst," Braunschweig 1851, auf die wir hier mit dem Wunsche verweisen, dass sich die bildlichen Darstellungen der Markscheider denen der Geometer und Ingenieure eben so nähern mögen, wie dieses bei den Messungsmethoden schon der Fall ist.

Dritter Abschnitt.

Abzeichnung der Karten und Pläne.

§. 428.

Wenn auch in neuerer Zeit die in den meisten europäischen Staaten hergestellten topographischen Karten und Katasterpläne durch Lithographien und Kupferstiche vervielfältigt werden und besondere Copien derselben desshalb unnöthig erscheinen, so ist doch diese Art des Copirens der Originalzeichnungen wegen ihrer Kostspieligkeit nicht auf alle geometrischen Aufnahmen, die man in mehreren Exemplaren zu besitzen wünscht, anwendbar, und es gibt also gleichwohl noch Fälle genug, in denen Karten und Pläne jeder Art in gleicher oder verjüngter Grösse abzuzeichnen sind. Darum dürfen hier auch einige Erörterungen über das Copiren und Reduciren von Originalzeichnungen nicht fehlen.

Es gibt drei Methoden eine Zeichnung zu copiren, nämlich das Durchzeichnen, das Abzeichnen mittels quadratischer Netze, und das

Abzeichnen mit Hilfe des Pantographen oder Storchschnabels. Die beiden letzteren Methoden sind zugleich geeignet, das Original in einem beliebigen Verhältnisse zu verkleinern oder zu vergrössern. Das Vergrössern einer Karte oder eines Planes ist jedoch aus demselben Grunde nicht zu empfehlen, aus dem man bei der geometrischen Aufnahme immer nur vom Grossen in's Kleine und nicht umgekehrt vom Kleinen in's Grosse arbeitet: nämlich wegen der Anhäufung der Fehler, die dadurch unvermeidlich entsteht. Desshalb ist hier auch nur von dem Verkleinern oder Reduciren der Karten und Pläne die Rede.

A. Das Durchzeichnen.

§. 429.

Man kann drei Arten des Durchzeichnens unterscheiden, nämlich: das Durchzeichnen mittels Strohpapiers oder Pauschleinwand (das Pauschen), das Durchzeichnen mittels des Copirpultes, und das Durchzeichnen mittels der Pikirnadel (das Pikiren).

Das Pauschen setzt ein durchscheinendes Gewebe, auf dem weder Tusch noch Farbe fliessen, voraus. Bisher hat man immer das bekannte sogenannte Strohpapier dazu verwendet; in neuerer Zeit bedient man sich aber namentlich zu Pauschen, welche längere Dauer haben sollen, der Pauschleinwand, welche in vorzüglicher Qualität von Winckler in Chemnitz u. A. geliefert wird.[1] Diese Leinwand (oder das Strohpapier) breitet man über die zu pauschende Zeichnung glatt aus und befestigt sie daran mit etwas Wachs oder kleinen Zwingen; hierauf zieht man (unter Benützung eines Dreiecks für die geraden Linien) die Grenzen der Figuren mit Tusch so genau als möglich aus, und bringt schliesslich die topographischen Zeichen, Schrift und Farben am rechten Ort und in der rechten Weise an. Zum Gebrauch spannt man dergleichen Pauschen, mögen sie auf Strohpapier oder Pauschleinwand gemacht seyn, auf weisses Papier, wobei zu rathen ist, nicht bloss die Ränder der Pausche, sondern deren ganze Fläche festzukleben.

Das Copirpult, dessen man zur zweiten Art des Durchzeichnens bedarf, besteht aus einer hinreichend grossen ebenen Glastafel,

[1] Von der 40 Zoll breiten Leinwand kostet die sächsische Elle ungefähr 40 Kreuzer rhl., also 1 Quadratfuss 6 Kreuzer.

welche von einem Holzrahmen umschlossen ist und mit diesem um ein Scharnier wie eine Pultplatte gedreht werden kann. Zwei Spreizen dienen dazu, der Glastafel die Neigung zu geben, welche zum Zeichnen gewünscht wird.

Mit diesem Apparate copirt man eine Zeichnurg dadurch, dass man sie erst mit dem Zeichenpapiere überspannt und dann beide auf der Glastafel des Pultes befestigt. Dieses wird gegen das Fenster gerückt und so lange gehoben oder gesenkt, bis man die Conturen gut durchscheinen sieht; wobei zu bemerken ist, dass man durch das Herablassen einer Rolette bis auf den oberen Holzrand des Pultes die Deutlichkeit der durchscheinenden Linien noch um etwas vermehren kann. Nach dieser Vorbereitung wird wie beim Pauschen verfahren.

Das **Pikiren** einer Karte oder eines Planes besteht darin, dass man alle Eck- und Krümmungspunkte der Originalzeichnung mittels einer feinen, in Holz befestigten Nadel durchsticht und auf diese Weise in das unverrückbar darunter liegende Zeichenpapier überträgt. Nachdem dieses geschehen ist, verbindet man die zusammengehörigen Punkte durch gerade oder krumme Linie und vollendet die Zeichnung, wie früher angegeben. Dass diese Art des Durchzeichnens das Original verdirbt, bedarf wohl keiner weiteren Erinnerung.

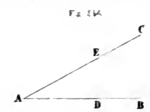
B. Das Abzeichnen durch Quadratnetze.

§. 430.

Soll die Copie die Grösse des Originals erhalten, so wird erfordert, dass man sowohl dieses als das Zeichenpapier der Copie mit feinen Bleilinien in Quadrate von gleicher Grösse eintheilt und in jedes Quadrat der Copie genau das einträgt, was das entsprechende Quadrat des Originals enthält. Das Einzeichnen in die Quadrate von 3 bis 6 Linien Seitenlänge geschieht im Allgemeinen nach dem Augenmasse; es hindert jedoch nichts, einzelne Punkte mit dem Zirkel auf den Quadratseiten abzumessen oder in der Quadratfläche durch Kreisbögen zu bestimmen. Quadrate, welche sehr viel Detail enthalten, theilt man noch durch ihre Diagonalen, um weitere Anhaltspunkte für das Uebertragen nach dem Augenmasse zu erhalten.

Ist für die Copie ein kleinerer Massstab vorgeschrieben und verhält sich dieser zu dem Massstabe des Originals wie c : o, so müssen

sich die Quadratseiten der Copie ebenfalls wie $c : o$ verhalten. Wäre $o = {}^1/_{200}$ und $c = {}^1/_{500}$, so hätte man $c : o = 2 : 5 = 0.4 : 1$, d. h. die Quadratseiten der Copie dürften nur 0.4 der Länge der Seiten der Originalquadrate haben. Das Uebertragen des Details in die Copiequadrate geschieht wiederum nach dem Augenmasse; will man aber auch einzelne Entfernungen abmessen, so kann dieses entweder mit Hilfe eines Proportionalzirkels, dessen Einrichtung und Gebrauch als bekannt vorausgesetzt wird, oder mittels eines Reductions-Dreiecks geschehen. Von diesem Dreiecke verhalten sich zwei Seiten AB, BC (Fig. 546) zu einander wie $o : c$ und machen bei B einen beliebigen (also z. B. einen rechten) Winkel. Ist nun AD die zu reducirende Länge, so gibt die zu BC parallele Gerade DE den im Verhältnisse von $o : c$ verjüngten und in die Copie überzutragenden Abstand.



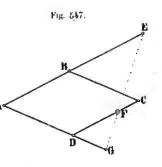
Wenn man eine Zeichnung zu copiren hat, deren Kostbarkeit nicht gestattet, sie mit einem Netze von Bleilinien zu überziehen, so zeichnet man dieses Netz mit Tusche auf Pauschleinwand und befestigt diese auf dem Rande der Originalzeichnung so lange, bis die Copie gemacht ist. Netze von Seidenfäden, die man über die zu copirenden Karten und Pläne spannt, und ebenso Netze, die auf Glastafeln geritzt sind, verursachen viel mehr Umstände und Kosten als die auf Pauschleinwand, wesshalb diese nicht bloss in dem bezeichneten Falle vorzuziehen, sondern überhaupt zu empfehlen sind, da man sich damit die Mühe ersparen kann, für jede Copie ein Quadratnetz auf das Original zu zeichnen.

C. Das Abzeichnen mit dem Pantographen.

§. 431.

Theorie und Beschreibung des Pantographen.

Der Pantograph besteht aus einem verschiebbaren Parallelogramm ABCD (Fig. 547), dessen Seiten an den Enden durch Gewinde verbunden sind, und aus zwei auf den Seiten AB, AD befestigten Stiften E und G, welche mit einer auf der dritten Seite CD angebrachten Axe F in einer vertikalen Ebene liegen. Bei dem Gebrauche dreht sich das Instrument um die Axe F, welche ihren



Ort nicht ändert; der Stift E wird auf dem Original herumgeführt und der Stift G dient zum Nachzeichnen.

Von einer solchen Vorrichtung lässt sich leicht beweisen: erstens, dass der Stift G eine Figur beschreibt, welche der vom Stifte E durchlaufenen ähnlich ist, und zweitens, dass sich die homologen Seiten beider Figuren wie die Abstände der Axe F von den Stiften E und G verhalten.

Denn es verhält sich in den ähnlichen Dreiecken AEG und DFG:

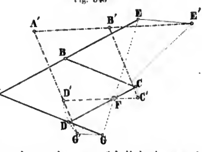
$$AE : DF = EG : FG = AG : DG;$$

und wenn man die erste Figur in die zweite Lage (Fig. 548) versetzt, in den ähnlichen Dreiecken A'E'G' und D'FG':

$$A'E' : D'F = E'G' : FG' = A'G' : D'G'.$$

Weil nun vermöge der Construction $D'F = DF$ und $A'E' = AE$, so folgt

$$EG : FG = E'G' : FG' \text{ oder } EF : FG = E'F : FG',$$



d. h. das Dreieck FGG' ist dem Dreieck FEE ähnlich und der vom Stifte G durchlaufene Weg GG' verhält sich zu dem Wege EE' des Stifts E wie FG zu FE. Was aber von diesen zwei Dreiecken gilt, ist von allen wahr, in die sich die von den Stiften E und G beschriebenen Figuren von dem Punkte F aus zerlegen lassen; folglich ist auch bewiesen was behauptet wurde.

Nennt man die constanten Längen AD und AE beziehlich p und q, die veränderlichen Grössen DG und DF beziehlich x und y, und setzt das Verhältniss der Abstände $FG : FE = u : v$, so hat man wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke AEG und DFG (Fig. 547):

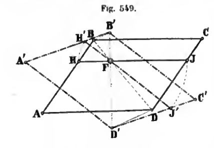
$$x = \frac{u}{v}\, p \text{ und } y = \frac{u}{u + v}\, q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (473).$$

Ertheilt man den Grössen p und q die Werthe, welche einem bestimmten Instrumente entsprechen, und nimmt man das Verhältniss von u : v ebenfalls als gegeben an, so kann man die Werthe von x

und y berechnen, welche dazu dienen, auf dem Arme A D den Stift G (durch Abzählung von $x = DG$) und auf dem Arme C D die Axe F (durch Abmessung von $y = DF$) so festzustellen, dass die mit dem Stifte E umfahrene Figur von F in dem Verhältnisse von $v : u$ verkleinert wird. Von der genauen Berechnung und Abmessung der Werthe von x und y kann man überzeugt seyn, sobald die Punkte E, F und G in einer Geraden liegen.

Eine Abänderung des in seinen mathematischen Beziehungen eben dargestellten Pantographen besteht darin, dass man die Stifte E und G in die Eckpunkte B und D des Parallelogramms A B C D (Fig. 547) und die Axe F in die Diagonale B D verlegt, wie die beigedruckte Fig. 549 zeigt, in der die accentuirten Buchstaben die aus der Drehung um die Axe F entstandene zweite Lage des Parallelogramms A B C D bezeichnen. Soll diese Vorrichtung wie die vorige wirken, so ist nachzuweisen, dass $\triangle DD'F$ dem $\triangle BB'F$ ähnlich ist, wenn alle Seiten des Parallelogramms und die Parallele H J gleiche und unveränderliche Längen haben und der Punkt F fortwährend in der Diagonale B D liegt. Man findet aber aus der Aehnlichkeit der Dreiecke A B D und H B F, so wie der Dreiecke $A'B'D'$ und $H'B'F$, und aus dem Umstande, dass $FH' = FH$ und $B'H' = BH$ ist, sehr einfach die Proportion

Fig. 549.



$BD : BF = B'D' : B'F$, und hieraus $DF : BF = D'F : B'F$;
und damit ist bewiesen, was zu beweisen war.

Setzt man $DJ = y'$, $DF = x'$, $HB = u$, $BF = v$ und $AB = AD = p$, so hat man zur Berechnung der Werthe, welche die Lage der Axe F bestimmen, wenn p, u, v gegeben sind, die Gleichungen:

$$HB : DJ = BF : DF \text{ oder } p - y' : y' = v : u$$

oder endlich

$$y' = \frac{u}{u + v}\, p \quad \ldots\ldots\ldots \quad (474)$$

Da ferner nach der Fig. 549 die Proportion stattfindet:

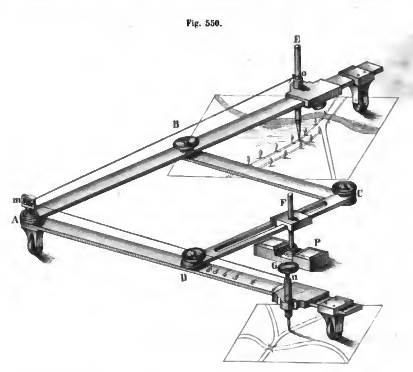
$$DJ : JC = DF : BF = u : v, \quad \ldots\ldots \quad (475)$$

so ist es hier gleichgültig, ob man sagt: der Stift D verkleinert im

Verhältnisse der Abstände der Stifte von der Axe E, oder im Verhältnisse des Abstandes der Linie HJ von den parallelen Seiten AD und BC.

Die Fig. 550 stellt einen Storchschnabel vor, dem die in Fig. 547 angedeutete ältere Anordnung zu Grunde liegt. Das verschiebbare Parallelogramm ist auch hier mit ABCD, der auf der Originalzeichnung herumzuführende Fahrstift mit E, der Zeichenstift mit G, und endlich die vertikale Axe, um welche sich das Instrument während

Fig. 550.



der Arbeit dreht, mit F bezeichnet. Die zwei Lineale AB, AD bewegen sich an ihren Enden auf Rollen von Bein, während das dritte CD geschlitzt ist und dadurch gestattet, die Axe F mittels eines Schubers so zu verstellen, dass sie in die durch die Stifte E und F bestimmte Gerade kommt. Mit ihrem unteren Theile ist die Axe F in ein eben bearbeitetes Stück Blei P, das in Folge seines Gewichtes und dreier sehr feiner kurzen Spitzen während der Arbeit auf dem Zeichentische unverrückt liegen bleibt, eingelassen.

Die Stifte E und F lassen sich, wie man sieht, auf den Linealen AB und AD ebenfalls mittels Schubern verstellen: wenn sie die richtige Lage haben, so werden sie wie der Schuber für F mittels Druckschrauben an den Linealen festgehalten. Um die in den Gleichungen (473) dargestellten Werthe von x und y von D aus auf den Linealen AD und CD abmessen zu können, sind auf denselben entsprechende Theilungen angebracht, deren Einrichtung durch die beigefügten Zahlen von selbst klar ist. Durch die Linien mn, mo ist ein Faden angedeutet, der sich bei n um die Röhre, welche den Zeichenstift trägt, schlingt, bei m durch den Kopf des Zapfens A geht und bei o von dem Zeichner gehalten wird. Dieser Faden hat den Zweck, durch Anziehen den Zeichenstift G dann zu heben, wenn der Fahrstift E beim Versetzen von einem Punkte zum anderen eine Linie beschreibt, die nicht nachgezeichnet werden soll.

§. 432.

Gebrauch des Pantographen.

Der Gebrauch des Pantographen ist im Wesentlichen schon in seiner Theorie und Beschreibung enthalten; zur vollständigen Erläuterung desselben fügen wir aber noch einige Bemerkungen bei. Zum Nachzeichnen ist ein Tisch mit ganz ebener Platte oder ein Reissbrett nöthig, worauf Original und Copie hinreichend Raum finden. Um dem Papiere der letzteren gegen das bereits festgelegte Original die richtige Lage zu geben, ist es gut, dieses mit einem Rechtecke zu umgeben, dessen homologe Seiten in dem Verhältnisse der Massstäbe der Copie und des Originals stehen. Verrückt man nun dieses zweite Rechteck so lange, bis nacheinander drei Eckpunkte desselben vom Zeichenstifte berührt werden, wenn der Fahrstift auf den gleichnamigen Eckpunkten des Originalrechtecks steht, so wird die Nachzeichnung den gewünschten Platz auf dem Papiere einnehmen. Ist diese Lage gefunden, so befestigt man Original und Copie auf dem Zeichentische, so dass während der Abzeichnung nicht die mindeste Verrückung desselben stattfindet. Der Zeichenstift muss genau centrisch gespitzt seyn, wenn er richtig zeichnen soll. Ob er es ist, erfährt man durch Drehung der Röhre, welche ihn hält: deckt hiebei die Spitze stets einen und denselben Punkt, so ist die Spitze centrisch. Während des Abzeichnens sieht man manchmal nach, ob sich die Lage des Originals und der Copie gegen die Axe des

Instruments nicht geändert haben: es hat keine Aenderung stattgefunden, wenn, wie beim Anfange der Arbeit, die beiden Stifte je zwei gleichnamige Eckpunkte der auf dem Originale und der Copie befindlichen Hilfsrechtecke gleichzeitig decken. Ist das Original so gross, dass es nicht auf einmal copirt werden kann, so geschieht dieses in Abtheilungen, wobei aber sehr darauf zu achten ist, dass die Copie bei jeder Abtheilung richtig verschoben wird. Am zweckmässigsten ist es wohl, diese Verschiebung nach Richtungslinien vorzunehmen, welche man vor Anfang des Copirens in das Original- und Zeichenblatt, unter Berücksichtigung des Reductionsverhältnisses, aufs Genaueste eingezeichnet hat.

TAFELN

ÜBER VERSCHIEDENE GEGENSTÄNDE DER

PRAKTISCHEN GEOMETRIE.

ANHANG

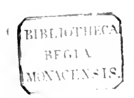
DER

ELEMENTE DER VERMESSUNGSKUNDE

VON

C. M. BAUERNFEIND.

MÜNCHEN.
LITERARISCH-ARTISTISCHE ANSTALT
DER J. G. COTTA'SCHEN BUCHHANDLUNG.
1858.



Buchdruckerei der J. G. Cotta'schen Buchhandlung in Stuttgart und Augsburg

Einrichtung und Gebrauch der Tafeln.

Tafel Nr. I

gibt verschiedene oft gebrauchte Grössen der Erdgestalt. Sie ist nach den in dem Berliner astronomischen Jahrbuch für 1852 enthaltenen „Tafeln für die Gestalt der Erde nach Bessel's Bestimmungen," welche viel ausführlicher sind, zusammengestellt, und bedarf hinsichtlich ihrer Einrichtung und ihres Gebrauches wohl nur der Bemerkung, dass, wenn man die Grösse des Halbmessers eines Parallelkreises aus der in der Tafel enthaltenen Länge eines Grades in Toisen finden will, diese Länge lediglich zu multipliciren ist mit der Zahl

$$\frac{180}{\pi} = 57{,}2957795, \text{ deren } \log = 1{,}7581226.$$

Indem wir wegen der Entwickelung der Formeln zur Berechnung der I. Tafel auf das genannte Jahrbuch (S. 318—342) verweisen, fügen wir noch einige dortselbst enthaltene Zahlen bei, welche theils als Grundlage, theils als Ergänzung dieser Tafel anzusehen sind.

Bezeichnet a die halbe grosse, b die halbe kleine Axe und e die Excentricität eines elliptischen Erdmeridians, so ist

$$a = 3\,272\,077{,}1399\,; \quad \log a = 6{,}5148235\,;$$
$$b = 3\,261\,139{,}3284\,; \quad \log b = 6{,}5133693\,;$$
$$a\,e = \sqrt{(a^2 - b^2)}\,; \quad \log e = 8{,}9122052.$$

Nach diesen Bestimmungen ist die Länge einer geographischen Meile, wovon 15 auf einen Grad des Aequators gehen, = 3807,23463 Toisen = 1970,25 preussischen Ruthen; ferner die Oberfläche der ganzen Erde = 9 261 238,3 geographischen Quadratmeilen, und der Rauminhalt des ganzen Erdkörpers = 2 650 184 445 geographischen Kubikmeilen.

Tafel Nr. II

dient zur Reduction der mit dem Reichenbach'schen Distanzmesser gemessenen schiefen Längen auf den Horizont. Die Theorie zur Berechnung derselben ist im §. 176 (Bd. I. S. 340—343) enthalten, und die zu Grunde gelegten Constanten beziehen sich auf die Reichenbach'schen Distanzmesser, welche Ertel und Sohn in München für Messtisch-Aufnahmen liefern. Für andere Fernrohre und Latten würden sich die Constanten und damit auch die Reductionsgrössen ändern.

Da es nach §. 176 nicht gleichgültig ist, ob die zu reducirende Linie über oder unter dem Horizont des Instruments liegt, so zerfällt die Tafel in zwei Abtheilungen, wovon die erste, mit „Erhebung des Rohrs“ bezeichnete, die Reductionen für beobachtete Höhen- oder Elevationswinkel, die zweite aber mit der Ueberschrift „Senkung des Rohrs“ die Reductionen für Tiefen- oder Depressionswinkel liefert. Bei dem Gebrauche der entsprechenden Abtheilung der Tafel sucht man die abgelesene schiefe Länge oder eine ihr nahestehende Länge in der obersten Horizontalreihe, den Neigungswinkel aber oder seinen Nachbarwerth in der ersten Vertikalreihe auf und zieht von beiden Reihen aus beziehungsweise ab- und seitwärts senkrechte Linien, bis sie sich begegnen: an dieser Stelle steht die Länge, welche von der Ablesung abzuziehen ist.

Ist z. B. bei einem Höhenwinkel von 14° 36′ eine Ablesung von 438′,5 gemacht worden, so benützt man in der Abtheilung 1 die Vertikalreihe 14° 30′ und die Horizontalreihe 450′: beide zusammen geben die Reductionsgrösse 12,′8 und somit beträgt die reducirte Länge 438 5 — 12,8 = 425,7 Fuss. Würde dieselbe Ablesung auf der Latte bei einem Tiefenwinkel von 14° 36′ gemacht worden seyn, so lieferte die Abtheilung 2 als Reductionsgrösse 16′,1 und die reducirte Länge wäre = 438,5 — 16,1 = 422,4 Fuss.

Die Tafel Nr. II ist für jedes bestimmte Fussmass zu benützen, wenn das Distanzfernrohr und die Distanzlatte dafür eingerichtet sind. Diese Einrichtung erfordert nur, dass die in §. 176 mit c, d, l bezeichneten Constanten ihre Werthe auch in dem neuen Masse behalten, und wird von der Ertel'schen Werkstätte auf Verlangen besorgt.

Tafel Nr. III

giebt die Reductionen für den Ertel'schen und jeden Reichenbach'schen Distanzmesser, welchem die in §. 180 (Bd. I. S. 355) besprochenen Constanten zukommen. Einrichtung und Gebrauch stimmen ganz und gar mit denen der vorhergehenden Tafel überein, sowie auch die für jene Tafel gemachte Schlussbemerkung hier gültig ist.

Tafel Nr. IV

gehört wie die beiden nächsten zum Gebrauche des zum Distanzmessen eingerichteten Nivellirinstruments von Stampfer und Starke. Nach der in §. 184 (Bd. I. S. 363—366) enthaltenen Theorie, worauf die Berechnung beruht, liefert diese der „Anleitung zum Nivelliren" von Stampfer entnommene Tafel den Werth des ersten Gliedes in dem Ausdrucke Nr. 164 für die Horizontalprojection der gemessenen schiefen Länge, nämlich den Werth von

$$\frac{324}{o-u} \text{ von } \frac{1}{100} \text{ zu } \frac{1}{100} \text{ Schraubengang.}$$

Sind die Schraubengänge bis auf $\frac{1}{1000}$ abgelesen worden, so findet man den Werth des genannten ersten Gliedes mit Hilfe der „Proportionaltheile," welche hinter der „Distanz" stehen. Diese Proportionaltheile sind so gestellt, dass sie mit den Endziffern der ersten Spalte ($o-u$) korrespondiren. So steht z. B. der Proportionaltheil für 0,003 in jener Zeile, worin der genäherte Werth von $o-u$ die Endziffer 3 hat, und beträgt, wenn $o-u = 1{,}03$ ist, 0,88; wenn $o-u = 1{,}13$ ist, 0,74 u. s. w. Diese Proportionaltheile müssen stets von der in der zweiten Spalte aufgesuchten Distanz abgezogen werden, da die Entfernung abnimmt, wenn die Differenz $o-u$ wächst.

Wenn $o-u = 2{,}784$ gefunden worden; was ist der Werth von $324:(o-u)$?

Zunächst ist für 2,78 die Distanz = 116,55
Alsdann für 0,004 der Prop.Theil = 0,17
Daher der gesuchte Werth . . = 116,38.

Mit dieser Zahl ist die in der Formel (164) enthaltene Grösse d zu multipliciren, wenn die Entfernung e in Ruthen, Klaftern, Fussen u. s. w. ausgedrückt werden soll. Stehen die beiden Scheiben

der Distanzlatte genau 1 Klafter von einander ab, so ist d = 1 Klafter und daher in dem vorstehenden Falle e = 116,38 Klafter. Betrüge der Abstand der Scheiben 10 preuss. Fuss oder 1 preuss. Ruthe, so wäre d = 1 Ruthe und daher e = 116,38 preuss. Ruthen. Hätte man aber die Scheiben 7 Fuss bayerisch auseinander gestellt, so wäre d = 7′ bayer. und e = 7 × 116,38 = 814,66 bayer. Fuss.

Die Werthe 1 und 10 für o — u, welche in der Tafel enthalten sind, werden zwar selten überschritten werden; sollte aber o — u kleiner als 1 werden, so suche man die Distanz für den zehnfach grössern Werth von o — u und nehme dieselbe zehnmal grösser; wird o — u grösser als 10, so verfahre man entgegengesetzt. Ist z. B. o — u = 0,943, so findet man für 9,43 die Distanz = 34,36; es entspricht also 0,943 der Werth 343,6. Wäre o — u = 12,34, so hätte man für 1,234 die Distanz = 262,59 und daher für 12,34 die Entfernung = 26,259.

Tafel Nr. V

enthält die Verbesserung der Distanz, welche wegen des veränderlichen Werths der Schraubengänge oder desshalb nöthig wird, weil die Grösse k von dem Mittelwerthe 324, nach welchem die Tafel Nr. IV berechnet ist, mehr oder weniger abweicht. In Gl. (164) ist die genannte Verbesserung durch den Ausdruck

$$\frac{0{,}0356\ (o + u - 2m)}{o - u}$$

gegeben, wobei m nach Gl. (165) bestimmt wird; in der Tafel kommen die Glieder (o — u) und (o + u — 2m) ebenfalls vor.

Will man nun für einen gegebenen Werth von (o — u) den Werth des obigen Ausdrucks in Tafel Nr. V finden, so berechnet man erst (o + u — 2m), sucht diesen Werth in der obersten Horizontalreihe und (o — u) in der ersten Vertikalreihe auf und fährt ab- und seitwärts bis zum Schnittpunkte der Zeilen, wo sich die gesuchte Correction findet, welche mit (o + u — 2m) zugleich positiv oder negativ ist. Wenn sich der berechnete Werth von (o + u — 2m) oder der gegebene von (o — u) nicht genau in der Tafel findet, was häufig der Fall seyn wird, so genügt es die nächstliegenden Werthe der Tafel dafür zu nehmen. Und sollte (o — u) kleiner als 1 oder grösser als 10 seyn, so verfährt man nach dem Schlusse der zu Tafel Nr. IV gegebenen Anweisung.

Tafel Nr. VI

gibt die Reduction der nach beiden vorhergehenden Tafeln bestimmten Entfernung auf den Horizont oder das letzte Glied

$$-\frac{0{,}0031\ (h-u)^2}{o-u}$$

der Formel Nr. 164. Sie wird in derselben Weise wie Tafel Nr. V gebraucht. Die gefundene Reduction ist stets abzuziehen; in den meisten Fällen ist sie aber so gering, dass sie vernachlässigt werden kann. Sollte $(h-u)$ grösser als 22 seyn, so suche man zu $\frac{1}{2}(h-u)$ die Reduction, multiplicire diese mit 4 und sehe das Product als die zu $(h-u)$ gehörige Reduction an.

Beispiel. Wenn $d = 1$ Klafter, $m = 28{,}1$ gegeben und $h = 23{,}937$ $\quad 0 = 18{,}200$ $\quad n = 16{,}757$ beobachtet worden; wie gross ist die horizontale Entfernung der Latte vom Instrumente?

Mit $o - u = 1{,}523$ liefert Tafel Nr. IV: 212,76
mit $o + u - 2m = -21{,}2$ Tafel Nr. V: — 0,50
und mit $h - u = 7{,}2$ gibt Tafel Nr. VI: — 0,10
Daher die gesuchte Entfernung = 212,16 Klafter.

Tafel Nr. VII

enthält die Werthe von $\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$ und log $\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$, deren man bedarf, um aus den am Stromquadranten beobachteten Ablenkungswinkeln α die Geschwindigkeit des Wassers nach der in §. 221 entwickelten Formel $v = k\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$ zu berechnen. Da k für jedes Instrument einen andern Werth hat, der nach §. 222 (Bd. I. S. 431) bestimmt wird, so konnte hier nicht mehr als der Factor $\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$ und dessen Logarithme gegeben werden; dieser Factor ist also, um v zu finden, immer noch mit k zu multiplicieren.

Tafel Nr. VIII

dient zur Berechnung der Geschwindigkeiten der Flüsse, wenn mit dem Reichenbach'schen Strommesser die Grösse h' beobachtet und für das Instrument die Constante k bekannt ist. Letztere findet man nach §. 224 aus der Formel Nr. 176 (Bd. I. S. 435); erstere (h') ergibt sich aus den Ablesungen der beiden Glasröhren. Nimmt man aus der Tafel den Werth von $\sqrt{h'}$ und multiplicirt ihn mit k, so ist

die zu h′ gehörige Geschwindigkeit gefunden. Wir haben die Tabelle nur bis zu Erhebungen von 1 Fuss fortgesetzt, weil diese schon Geschwindigkeiten von mehr als 8 Fuss entsprechen, der Reichenbach'sche Strommesser aber zur Messung grosser Geschwindigkeiten wenig geeignet ist.

Tafel Nr. IX

dient zur Absteckung von Kreisbögen und enthält die Ordinaten für gegebene Abscissen. Sie ist nach der Gleichung Nr. 206 (Bd. II. S. 40) berechnet. Für Kreise bis zu 450′ Halbmesser wachsen die auf den Tangenten von den Berührungspunkten aus gezählten Abscissen von 10 zu 10, für Kreise zwischen 500 und 950′ Halbmesser von 25 zu 25, und für Kreise von 1000 bis 10000′ Halbmesser von 50 zu 50 Fuss. Der Gebrauch dieser Tafel ist wohl für sich klar.

Tafel Nr. X

setzt abgesteckte Kreisbögen, deren Längen entweder 50 oder 100 Fuss betragen, voraus, und dient alsdann zur Absteckung von Zwischenpunkten dieser Bögen. Soll in der Mitte der Sehne eine senkrechte Ordinate abgesteckt werden, so findet man deren Werth in der Spalte, welche mit „Ordinate zu $\frac{1}{2}$ b“ überschrieben ist; und braucht man die Ordinate im ersten oder dritten Viertel der Sehne, so liefert die Spalte „Ordinate zu $\frac{1}{4}$ b“ die gesuchte Ordinate. Die Längeneinheit der Bögen, Sehnen, Halbmesser und Ordinaten kann selbstverständlich jede beliebige seyn.

Tafel Nr. XI

ist nach der in den „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie“ von Gauss befindlichen Tafel zusammengestellt und enthält die einander entsprechenden geographischen Breiten auf dem Erdellipsoïde und der dafür substituirten Kugelfläche. Da es häufiger vorkommt, dass die Breite auf der Kugel gegeben und die für das Sphäroïd gesucht wird, als umgekehrt, so bildet jene Breite das Argument der Tafel. Gauss lässt dieses innerhalb 12 Graden von Minute zu Minute wachsen und gibt die Sekunden der Breiten des Ellipsoïds auf 5 Decimalstellen genau an, um die Tafel „für die allerschärfste Berechnung einer trigonometrischen Vermessung, nämlich

für eine Durchführung derselben mit zehnzifferigen Logarithmen vollkommen zureichend" zu machen; für unsere Zwecke genügt es jedoch, das Argument von 2 zu 2 Minuten fortschreiten zu lassen und die Sekunde der elliptischen Breiten auf 2 Decimalstellen genau anzugeben. Die in der Tafel nicht vorkommenden Breiten lassen sich mit hinreichender Genauigkeit aus den Differenzen je zweier Nachbarwerthe berechnen. Denn gesetzt, man wolle die elliptische Breite φ' finden, welche der Kugelbreite $\varphi = 49^0\ 25'\ 10''$ entspricht, so liefert die Tafel für $29^0\ 24'$ eine elliptische Breite von $49^0\ 25'\ 44'',74$ und für $49^0\ 26'$ eine elliptische Breite von $49^0\ 27'\ 44'',96$; die Differenz für 2 Minuten Kugelbreite beträgt also $2'\ 0'',22$ elliptische Breite und folglich genau genug $1'\ 10'',13$ elliptische Breite für $1'\ 10''$ Kugelbreite. Es ist somit $\varphi' = 49^0\ 25'\ 44'',74 + 1'\ 10'',13 = 49^0\ 26'\ 54'',87$.

Tafel Nr. XII

giebt die mittleren Werthe der astronomischen Refraction für alle Höhenwinkel zwischen 0 und 90⁰. Diese Werthe bedürften noch Correctionen wegen der Temperatur und des Barometerstandes, wofür es ebenfalls nach Bessel's Bestimmungen entworfene Tafeln giebt. Da aber diese Correctionen nur unbedeutende Grössen sind, und die geodätischen Aufgaben, welche in diesem Buche vorkommen und die Berücksichtigung der astronomischen Refraction erfordern, nur angenäherte Resultate liefern sollen, so haben wir es unterlassen, auch die Correctionstafeln mitzutheilen. Die Berechnung der mittleren Refraction für andere als in der Tabelle vorkommende Höhenwinkel geschieht mit Hilfe der in der Tafel enthaltenen Proportionaltheile.

Tafel Nr. XIII

ist eigentlich schon in der ersten Tafel enthalten, indem dort die Längen der Parallelgrade in Toisen angegeben sind. Wenn nun hier dieselben Längen in geographischen Meilen, wovon 15 auf einen Grad des Aequators gehen, ausgedrückt worden, so hat dieses lediglich darin seinen Grund, dass man bei Kartenzeichnungen gewöhnlich die geographische Meile (welche 3807,2346 Toisen gleich ist) als Längeneinheit des Massstabs wählt und daher durch Tafel Nr. XIII die Reductionen der in Toisen ausgedrückten Längen auf Meilen erspart werden.

Tafel Nr. XIV

dient zur Zeichnung der Parallelkreise auf Karten, die nach der konischen Projection von Bonne oder de l'Isle entworfen werden. Diese Parallele erscheinen als Kreise, die ihre Mittelpunkte auf der verlängerten Erdaxe haben und deren Halbmesser R sich nach der Gleichung $R = r \cot \varphi$ bestimmt, in welcher r den Halbmesser der Erdkugel und φ die geographische Breite des Parallels bezeichnet. Der Berechnung der Tafel liegt der Werth $r = 857{,}43$ geographische Meilen zu Grunde.

Tafel Nr. XV

enthält Vorschriften über Gattung und Grösse der Schrift zur Bezeichnung einzelner Objecte auf Karten und Plänen von verschiedenen Massstäben. Die Höhen sind zwar ursprünglich in badischem Masse ausgedrückt, sie können aber auch in Duodecimallinien jedes andern deutschen Fussmasses angewendet werden.

Die Abkürzungen in der Tafel bedeuten:

S. K: stehende Kapitalschrift (grosse römische stehende Schrift);
L. K: liegende Kapitalschrift (grosse römische liegende Schrift);
S. R: stehende Rotondschrift (kleine römische stehende Schrift);
T. C: topographische Cursivschrift.

Tafel Nr. I.

Längen der Erdmeridiane und Parallelkreise.

Geographische Breite.		Grad im Meridian.	Grad senkrecht auf den Meridian.	Grad des Parallels.	Länge des Bogens vom Aequator bis zum Parallel.
		In Pariser Toisen (Toise du Pérou bei 13° B.).			
0°		56727,356	57108,519	57108,519	0,000
	30′	727,399	108,534	106,359	28363,685
1°		56727,529	57108,578	57099,880	56727,414
	30′	727,745	108,650	089,080	85091,229
2°		56728,048	57108,752	57073,963	113455,173
	30′	728,437	108,882	054,527	141819,291
3°		56728,912	57109,041	57030,776	170183,624
	30′	729,473	109,230	002,710	198548,217
4°		56730,120	57109,447	56970,331	226913,111
	30′	730,852	109,693	933,643	255278,350
5°		56731,670	57109,967	56892,646	283643,977
	30′	732,574	110,270	847,346	312010,035
6°		56733,562	57110,602	56797,744	340376,565
	30′	734,635	110,962	743,844	368743,611
7°		56735,792	57111,350	56685,651	397111,214
	30′	737,033	111,767	623,168	425479,417
8°		56738,358	57112,211	56556,399	453848,261
	30′	739,766	112,684	485,350	482217,789
9°		56741,257	57113,184	56410,026	510588,041
	30′	742,830	113,712	330,432	538959,060
10°		56744,485	57114,267	56246,573	567330,885
	30	746,222	114,850	158,456	595703,558
11°		56748,039	57115,459	56066,088	624077,120
	30′	749,937	116,096	55969,474	652451,611
12°		56751,915	57116,760	55868,621	680827,071
	30′	753,972	117,450	763,538	709203,539
13°		56756,107	57118,166	55654,231	737581,056
	30′	758,320	118,908	540,708	765959,659
14°		56760,611	57119,677	55422,978	794339,389
	30′	762,978	120,471	301,049	822720,283
15°		56765,421	57121,290	55174,930	851102,380
	30′	767,940	122,135	044,629	879485,717
16°		56770,532	57123,005	54910,156	907870,332
	30′	773,199	123,899	771,522	936256,262
17°		56775,938	57124,818	54628,735	964643,543
	30′	778,749	125,760	481,806	993032,211
18°		56781,632	57126,727	54330,746	1021422,304
	30′	784,584	127,717	175,566	1049813,855

Geographische Breite.	Grad im Meridian.	Grad senkrecht auf den Meridian.	Grad des Parallels.	Länge des Bogens vom Aequator bis zum Parallel.
	In Pariser Toisen			
19°	56787,607	57128,731	54016,276	1078206,900
30′	790,698	129,767	53852,889	1106601,473
20°	56793,856	57130,826	53685,416	1134997,608
30′	797,081	131,908	513,869	1163395,340
21°	56800,372	57133,011	53338,261	1191749,700
30′	803,728	134,136	158,604	1220195,723
22°	56807,147	57135,283	52974,912	1248598,439
30′	810,629	136,450	787,197	1277002,880
23°	56814,173	57137,638	52595,473	1305409,078
30′	817,777	138,846	399,755	1333817,063
24°	56821,441	57140,074	52200,055	1362226,865
30′	825,163	141,322	51996,390	1390638,514
25°	56828,943	57142,589	51788,773	1419052,038
30′	832,779	143,875	577,220	1447467,466
26°	56836,670	57145,179	51361,746	1475884,826
30′	840,614	146,501	142,367	1504304,145
27°	56844,612	57147,840	50919,099	1532725,449
30′	848,661	149,197	691,957	1561148,765
28°	56852,760	57150,571	50460,959	1589574,119
30′	856,908	151,961	226,121	1618001,534
29°	56861,105	57153,367	49987,461	1646431,035
30′	865,347	154,788	744,995	1674862,646
30°	56869,635	57156,225	49498,743	1703296,390
30′	873,967	157,676	248,720	1731732,288
31°	56878,341	57159,141	48994,947	1760170,364
30′	882,757	160,620	737,441	1788610,637
32°	56887,213	57162,113	48476,221	1817053,127
30′	891,708	163,618	211,307	1845497,856
33°	56896,240	57165,136	47942,717	1873944,841
30′	900,808	166,666	670,472	1902394,102
34°	56905,410	57168,207	47394,592	1930845,655
30′	910,046	169,760	115,096	1959299,517
35°	56914,713	57171,322	46832,006	1987755,706
30′	919,411	172,895	545,341	2016214,235
36°	56924,138	57174,478	46255,124	2044675,121
30′	928,892	176,070	45961,376	2073138,378
37°	56933,673	57177,670	45664,118	2101604,018
30′	938,478	179,279	363,372	2130072,055
38°	56943,306	57180,895	45059,160	2158542,500
30′	948,156	182,518	44751,505	2187015,364
39°	56953,027	57184,148	44440,430	2215490,659
30′	957,916	185,785	125,957	2243968,394
40°	56962,822	57187,427	43808,110	2272448,578

Geographische Breite.	Grad im Meridian.	Grad senkrecht auf den Meridian.	Grad des Parallels.	Lange des Bogens vom Aequator bis zum Parallel.
	In Pariser Toisen.			
40° 30′	56967,744	57189,074	43486,913	2300931,219
41°	56972,681	57190,726	43162,389	2329416,324
30′	977,631	192,382	42834,561	2357903,902
42°	56982,591	57194,041	42503,456	2386393,957
30′	987,562	195,704	169,097	2414886,495
43°	56992,541	57197,370	41831,508	2443381,520
30′	997,527	199,038	41490,716	2471879,037
44°	57002,518	57200,708	41146,746	2500379,048
30′	007,513	202,378	40799,622	2528881,555
45°	57012,510	57204,050	449,371	2557386,561
30′	017,508	205,721	40096,020	2585894,065
46°	57022,505	57207,392	39739,594	2614404,068
30′	027,499	209,062	380,120	2642916,570
47°	57032,490	57210,731	39017,625	2671431,567
30′	037,476	212,398	38652,136	2699949,059
48°	57042,454	57214,063	38283,681	2728469,042
30′	047,425	215,725	37912,286	2756991,512
49°	57052,385	57217,383	37537,981	2785516,465
30′	057,334	219,037	160,792	2814043,895
50°	57062,270	57220,687	36780,749	2842573,796
30′	067,191	222,332	397,879	2871106,162
51°	57072,097	57223,972	36012,212	2899640,985
30′	076,985	225,605	35623,777	2928178,256
52°	57081,854	57227,232	35232,602	2956717,966
30′	086,702	228,853	34838,718	2985260,106
53°	57091,529	57230,466	34442,154	3013804,665
30′	096,332	232,070	042,940	3042351,631
54°	57101,111	57233,667	33641,105	3070900,993
30′	105,863	235,255	236,682	3099452,737
55°	57110,587	57236,833	32829,699	3128006,851
30′	115,282	238,401	420,187	3156563,319
56°	57119,946	57239,959	32008,179	3185122,128
30′	124,578	241,507	31593,705	3213683,260
57°	57129,176	57243,042	31176,795	3242246,700
30′	133,740	244,567	30757,483	3270812,431
58°	57138,267	57246,079	30335,800	3299380,434
30′	142,756	247,578	29911,777	3327950,691
59°	57147,206	57249,064	29485,448	3356523,184
30′	151,616	250,536	056,843	3385097,891
60°	57155,984	57251,995	28625,997	3413674,793
30′	160,308	253,439	192,942	3442253,868
61°	57164,588	57254,867	27757,711	3470835,094
30′	168,822	256,281	320,336	3499418,448

Geographische Breite.		Grad im Meridian	Grad senkrecht auf den Meridian.	Grad des Parallels.	Länge des Bogens vom Aequator bis zum Parallel.
		In Pariser Toisen.			
62°		57173,009	57257,679	26880,852	3528003,908
	30′	177,147	259,060	439,292	3556591,449
63°		57181,236	57260,425	25995,689	3585181,047
	30′	185,273	261,773	550,078	3613772,676
64°		57189,258	57263,103	25102,492	3642366,311
	30′	193,190	264,415	24652,966	3670961,925
65°		57197,067	57265,709	24201,534	3699559,492
	30′	200,888	266,984	23748,231	3728158,983
66°		57204,652	57268,240	23293,092	3756760,370
	30′	208,357	269,477	22836,150	3785363,625
67°		57212,003	57270,693	22377,443	3813968,718
	30′	215,589	271,890	21917,003	3842575,618
68°		57219,113	57273,065	21454,868	3871184,297
	30′	222,574	274,220	20991,072	3899794,721
69°		57225,971	57275,354	20525,651	3928406,860
	30′	229,304	276,465	058,641	3957020,681
70°		57232,570	57277,555	19590,078	3985636,153
	30′	235,770	278,622	119,997	4014253,240
71°		57238,901	57279,667	18648,435	4042871,911
	30′	241,964	280,688	175,429	4071492,130
72°		57244,957	57281,687	17701,015	4100113,863
	30′	247,879	282,661	225,228	4128737,075
73°		57250,729	57283,612	16748,107	4157361,730
	30′	253,507	284,538	269,688	4185987,792
74°		57256,211	57285,440	15790,007	4214615,225
	30′	258,841	286,317	309,102	4243243,991
75°		57261,396	57287,169	14827,011	4271874,053
	30′	263,875	287,996	343,769	4300505,374
76°		57266,277	57288,797	13859,414	4329137,916
	30′	268,602	289,573	373,985	4357771,639
77°		57270,849	57290,322	12887,518	4386406,505
	30′	273,017	291,045	400,052	4415042,474
78°		57275,105	57291,741	11911,623	4443679,508
	30′	277,113	292,410	11422,270	4472317,566
79′		57279,041	57293,053	10932,030	4500956,608
	30′	280,887	293,669	440,942	4529596,593
80°		57282,651	57294,257	9949,043	4558237,481
	30′	284,332	294,817	9456,372	4586879,230
81°		57285,931	57295,350	8962,967	4615521,799
	30′	287,445	295,855	468,867	4644165,147
82°		57288,876	57296,332	7974,108	4672809,231
	30′	290,223	296,781	478,731	4701454,009
83°		57291,484	57297,202	6982,772	4730099,440

Geographische Breite.	Grad im Meridian.	Grad senkrecht auf den Meridian.	Grad des Parallels.	Länge des Bogens vom Aequator bis zum Parallel.
	In Pariser Toisen			
83° 30′	57292,661	57297,594	486,272	4758745,479
84°	57293,751	57297,957	5989,267	4787392,086
30′	294,756	298,292	491,798	4816039,216
85°	57295,674	57298,598	4993,902	4844686,827
30′	296,506	298,876	495,618	4873334,876
86°	57297,251	57299,124	3996,985	4901938,318
30′	297,908	299,343	498,041	4930632,112
87°	57298,479	57299,533	2998,826	4959281,212
30′	298,962	299,694	499,378	4987930,576
88°	57299,357	57299,826	1999,735	5016580,159
30′	299,665	299,929	499,937	5045229,918
89°	57299,885	57300,002	1000,023	5073879,809
30′	300,017	300,046	500,031	5102529,788
90°	57300,061	57300,061	0,000	5131179,811

Tafel Nr. II.

Reductionen für den Reichenbach'schen Distanzmesser.

1. Erhebung des Rohrs.

Höhen-winkel.	50′	100′	150′	200′	250′	300′	350′	400′	450′	500′	Höhen-winkel.
1°	2,7′	1,1′	0,7′	0,4′	0,3′	0,2′	0,1′	0,1′	0,1′	0,1′	1°
30′	2,6	1,1	0,6	0,4	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	30′
2°	2,5	1,0	0,6	0,3	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	2°
30′	2,4	1,0	0,5	0,3	0,3	0,2	0,2	0,3	0,2	0,3	30′
3°	2,4	0,9	0,5	0,3	0,3	0,3	0,3	0,4	0,4	0,5	3°
30′	2,4	0,9	0,5	0,4	0,3	0,4	0,4	0,5	0,6	0,7	30′
4°	2,3	0,9	0,5	0,4	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	4°
30′	2,2	0,8	0,5	0,5	0,5	0,6	0,7	0,9	1,0	1,2	30′
5°	2,1	0,8	0,6	0,5	0,6	0,8	0,9	1,1	1,3	1,5	5°
30′	2,1	0,8	0,6	0,6	0,7	1,0	1,1	1,3	1,6	1,8	30′
6°	2,0	0,8	0,7	0,7	0,9	1,1	1,4	1,6	1,9	2,2	6°
30′	2,0	0,9	0,7	0,8	1,1	1,3	1,6	2,0	2,3	2,6	30′
7°	2,0	0,9	0,8	0,9	1,3	1,6	1,9	2,3	2,7	3,1	7°
30°	2,0	0,9	0,9	1,1	1,5	1,8	2,3	2,7	3,1	3,6	30′
8°	1,9	1,0	1,0	1,3	1,7	2,1	2,6	3,1	3,6	4,1	8°
30′	1,9	1,0	1,1	1,5	1,9	2,4	3,0	3,5	4,1	4,7	30′
9°	1,9	1,1	1,2	1,7	2,2	2,8	3,4	4,0	4,6	5,3	9°
30′	1,9	1,1	1,3	1,9	2,5	3,1	3,8	4,5	5,2	5,9	30′

Höhen-winkel.	50′	100′	150′	200′	250′	300′	350′	400′	450′	500′	Höhen-winkel
10°	1,9′	1,1′	1,5′	2,1′	2,8′	3,5′	4,3′	5,0′	5,8′	6,6′	10°
30′	1,9	1,2	1,7	2,3	3,1	3,9	4,8	5,6	6,5	7,3	30′
11°	1,9	1,3	1,9	2,6	3,4	4,3	5,3	6,2	7,2	8,1	11°
30′	1,9	1,4	2,0	2,9	3,8	4,8	5,8	6,8	7,9	8,9	30′
12°	1,9	1,5	2,2	3,1	4,2	5,2	6,3	7,5	8,6	9,7	12°
30′	1,9	1,6	2,4	3,4	4,6	5,7	6,9	8,1	9,4	10,5	30′
13°	1,9	1,7	2,6	3,7	5,0	6,2	7,5	8,7	10,2	11,5	13°
30′	1,9	1,8	2,8	4,1	5,4	6,8	8,2	9,6	11,0	12,5	30′
14°	2,0	2,0	3,0	4,4	5,8	7,3	8,8	10,4	11,8	13,5	14°
30′	2,0	2,1	3,3	4,8	6,3	7,9	9,5	11,2	12,8	14,5	30′
15°	2,0	2,3	3,6	5,1	6,8	8,5	10,2	12,0	13,8	15,5	15°
30′	2,0	2,4	3,8	5,5	7,3	9,1	11,0	12,9	14,8	16,7	30′
16°	2,1	2,6	4,1	5,9	7,8	9,8	11,8	13,8	15,8	17,8	16°
30′	2,1	2,8	4,4	6,4	8,4	10,4	12,5	14,7	16,8	18,9	30′
17°	2,1	2,9	4,7	6,8	8,9	11,1	13,4	15,6	17,9	20,2	17°
30′	2,2	3,0	5,0	7,2	9,5	11,9	14,2	16,6	19,0	21,4	30′
18°	2,2	3,3	5,4	7,7	10,1	12,6	15,1	17,6	20,1	22,6	18°
30′	2,2	3,5	5,7	8,2	10,7	13,3	16,0	18,6	21,3	24,0	30′
19°	2,3	3,7	6,0	8,7	11,3	14,1	16,9	19,7	22,5	25,3	19°
30′	2,4	3,9	6,4	9,2	12,0	14,9	17,8	20,7	23,7	26,7	30′
20°	2,4	4,1	6,7	9 7	12,6	15,7	18,8	21,9	25,0	28,1	20°
30′	2,5	4,3	7,1	10,2	13,3	16,6	19,8	23,0	26,2	29,6	30′
21°	2,6	4,5	7,5	10,7	14,0	17,4	20,8	24,2	27,6	31,1	21°
30′	2,6	4,8	7,9	11,3	14,7	18,3	21,9	25,4	29,1	32,6	30′
22°	2,7	5,0	8,3	11,9	15,5	19,2	23,0	26,7	30,4	34,2	22°
30′	2,8	5,3	8,7	12,5	16,2	20,2	24,0	27,9	31,9	35,8	30′
23°	2,9	5,5	9,2	13,1	17,0	21,1	25,2	29,2	33,3	37,5	23°
30′	3,0	5,8	9,6	13,7	17,8	22,1	26,3	30,6	34,8	39,1	30′
24°	3,1	6,1	10,1	14,3	18,6	23,1	27,5	31,9	36,4	40,8	24°
30′	3,2	6,4	10,6	15,0	19,5	24,1	28,7	33,3	37,9	42,5	30′
25°	3,3	6,7	11,1	15,6	20,3	25,1	29,9	34,7	39,5	44,3	25°
30′	3,4	7,0	11,6	16,3	21,2	26,2	31,1	36,1	41,1	46,1	30′
26°	3,5	7,3	12,1	17,0	22,1	27,3	32,4	37,6	42,8	48,0	26°
30,	3,6	7,6	12,6	17,7	23,0	28,4	33,7	39,1	44,5	49,8	30′
27°	3,7	7,9	13,1	18,4	23,9	29,5	35,0	40,6	46,2	51'8	27°
30′	3,8	8,2	13,6	19,2	24,8	30,6	36,4	42,1	47,9	53,7	30′
28°	3,9	8,5	14,2	19,9	25,8	31,7	37,7	43,7	49,7	55,7	28°
30′	4,1	8,9	14,7	20,7	26,7	32,9	39,1	45,3	51,5	57,7	30′
29°	4,2	9,2	15,3	21,4	27,7	34,1	40,5	46,9	53,4	59,8	29°
30′	4,3	9,6	15,8	22,2	28,7	35,3	42,0	48,6	55,2	61,9	30′
30°	4,4	9,9	16,4	23,0	29,7	36,6	43,4	50,2	57,1	64,0	30°
30′	4,6	10,3	17,0	23,9	30,8	37,8	44,9	51,9	59,1	66,1	30′
31°	4,7	10,7	17,6	24,7	31,8	39,1	46,4	53,7	61,0	68,7	31°
30′	4,9	11,1	18,3	25,5	32,9	40,4	47,9	55,4	63,0	70,6	30′
32°	5,0	11,4	18,9	26,4	34,0	41,8	49,5	57,2	65,0	72,8	32°
30′	5,2	11,8	19,5	27,2	35,1	43,1	51,1	59,0	67,1	75,0	30′

Höhen-winkel.	50′	100′	150′	200′	250′	300′	350′	400′	450′	500′	Höhen-winkel.
33°	5,3	12,2′	20,1′	28,1′	36,2′	44,5′	52,7′	60,9′	69,1′	77,3′	33°
30′	5,5	12,6	20,8	29,0	37,3	45,8	54,3	62,7	71,2	79,7	30′
34°	5′6	13,1	21,5	29,9	38,5	47,2	55,9	64,6	73′4	82,1	34°
30′	5,8	13,5	22,2	30,7	39,7	48,6	57,6	66,6	76,5	84,5	30′
35°	6,0	13,9	22,8	31,7	40,9	50,0	59,3	68,5	77,7	86,9	35°
30′	6,2	14,3	23,5	32,7	42,1	51,5	61,0	70,4	80,0	89,4	30′
36°	6,3	14,8	24,4	33,7	43,3	53,0	62,7	72,4	82,2	91,9	36°

Höhen-winkel.	550′	600′	650′	700′	750′	800′	850′	900′	950′	1000′	Höhen-winkel.
1°	0,1′	0,1′	0,0′	0,0′	0,0′	0,0′	0,1′	0,1′	0,1′	0,1′	1°
30′	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,3	30′
2°	0,2	0,2	0,2	0,3	0,3	0,3	0,4	0,4	0,5	0,5	2°
30′	0,3	0,4	0,4	0,5	0,5	0,6	0,7	0,7	0,8	0,8	30′
3°	0,5	0,6	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,2	3°
30′	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	30′
4°	1,0	1,1	1,2	1,4	1,5	1,7	1,8	2,0	2,1	2,3	4°
30′	1,3	1,5	1,6	1,8	2,0	2,2	2,3	2,5	2,7	2,9	30′
5°	1,7	1,9	2,0	2,2	2,5	2,7	2,9	3,1	3,4	3,6	5°
30′	2,1	2,3	2,5	2,8	3,0	3,3	3,6	3,8	4,1	4,4	30′
6°	2,5	2,8	3,0	3,3	3,7	4,0	4,3	4,6	4,9	5,2	6°
30′	2,9	3,3	3,6	4,0	4,3	4,7	5,1	5,4	5,8	6,0	30′
7°	3,5	3,9	4,2	4,7	5,1	5,5	5,9	6,3	6,7	7,1	7°
30′	4,0	4,5	4,9	5,4	5,9	6,3	6,8	7,3	7,7	8,2	30′
8°	4,6	5,1	5,6	6,2	6,7	7,2	7,8	8,3	8,8	9,4	8°
30′	5,2	5,8	6,4	7,0	7,6	8,2	8,8	9,4	10,0	10′6	30′
9°	5,9	6,6	7,2	7,9	8,5	9,2	9,9	10,6	11,2	11,9	9°
30′	6,6	7,4	8,1	8,8	9,5	10,3	11,1	11,8	12,5	13,3	30′
10°	7,4	8,2	9,0	9,8	10,6	11,5	12,3	13,1	13,9	14,7	10°
30′	8,2	9,1	10,0	10,8	10,8	12,7	13,6	14,5	15,4	16,3	30′
11°	9,1	10,0	11,0	12,0	13,0	14,0	14,9	15,9	17,7	17,9	11°
30′	10,0	11,0	12,0	13,1	14,2	15,3	16,3	17,4	19,3	19,5	30′
12°	10,9	12,0	13,2	14,4	15,5	16,7	17,8	19,0	20,8	21,3	12°
30′	11,8	13,1	14,3	15,7	16,8	18,1	19,4	20,6	21,9	23,1	30′
13°	12,9	14,2	15,4	16,9	18,2	19,6	21,0	22,3	23,7	25,0	13°
30′	13,9	15,3	16,8	18,2	19,7	21,2	22,6	24,1	25,4	27,0	30′
14°	15,0	16,6	18,1	19′6	21,2	22,8	24,4	25,9	27,5	29,1	14°
30′	16,1	17,8	19,4	21,1	22,8	24,5	26,2	27,8	29,5	31,2	30′
15°	17,2	19,1	20,8	22,6	24,4	26,2	28,1	29,8	31,6	33,4	15°
30′	18,5	20,3	22,3	24,2	26,1	28,1	29,9	31,8	33,7	35,7	30′
16°	19,7	21,8	23,8	25,8	28,0	29,9	32,0	34,0	36,0	38,1	16°
30′	21,0	23,2	25,3	27,6	29,5	31,8	34,0	36,1	38,3	40,5	30′
17°	22,4	24,7	26,9	29,2	31,2	33,8	36,1	38,3	40,6	42,9	17°
30′	23,8	26,2	28,5	31,0	33,3	35,8	38,2	40,6	43,1	45,5	30′
18°	25,3	27,7	30,2	32,8	35,3	37,9	40,5	43,0	45,6	48,1	18°
30′	26,6	29,3	31,9	34,7	37,4	40,0	42,8	45,4	48,1	50,8	30′

Höhenwinkel.	550′	600′	650′	700′	750′	800′	850′	900′	950′	1000′	Höhenwinkel.
19°	28,1′	30,95′	33,6′	36,6′	39,4′	42,2′	45,1′	47,9′	50,8′	53,6′	19°
30′	29,7	32,6	35,5	38,6	41,5	44,5	47,5	50,5	53,5	56,0	30′
20°	31,2	34,3	37,4	40,6	43,6	46,8	50,0	53,1	56,5	59,4	20°
30′	32,8	36,1	39,3	42,7	45,9	49,2	52,5	55,8	59,1	62,4	30′
21°	34,5	37,9	41,3	44,7	48,2	51,7	55,1	58,6	62,0	65,5	21°
30′	36,2	39,8	43,3	47,0	50,6	54,2	57,8	61,4	65′0	68,6	30′
22°	37,9	41,7	45,4	49,2	53,0	56,1	60,5	64,4	68,0	71,8	22°
30′	39,7	43,6	47,5	51,5	55,5	59,4	63,3	67,2	71,2	75,1	30′
23°	41,6	45,6	49,6	53,7	57,8	62,0	66,1	70,2	74′3	78,5	23°
30′	43,3	47,6	51,8	56,2	60,4	64,7	69,0	73,3	77,6	81,9	30′
24°	45,2	47,7	54,1	58,6	63,0	67,5	72,0	76,4	80,9	85,2	24°
30′	47,1	51,8	56,4	61,1	65,7	70,3	75,0	79,6	84,3	89,0	30′
25°	49,1	53,9	58,7	63,6	68,4	73,2	78,0	82,8	87,7	92,6	25°
30′	51,2	56,1	61,1	66,2	71,1	76,1	81,2	86,2	91,2	96,3	30′
26°	53,1	58,3	63,5	68,8	74,0	79,1	84,4	89,6	94,8	100,1	26°
30′	55,2	60,6	66,0	71,4	76,8	82,2	87,7	93,1	98,5	103,9	30′
27°	57,3	62,9	68,5	74,1	79,7	85,3	91,0	96,6	102,2	107,8	27°
30′	59,5	65,2	70,9	76,9	82,7	88,5	94,3	100,2	105,9	111,8	30′
28°	61,7	67,7	73,6	79,7	85,7	91,7	97,8	103,8	109,8	115,8	28°
30′	63,9	70,1	76,3	82,6	88,8	95,0	101,2	107,4	113,7	119,9	30′
29°	66,2	72,6	79,0	85,5	91,9	98,3	104,8	111,2	117,6	124,1	29°
30′	68,5	75,1	81,7	88,4	95,1	101,7	108,3	115,0	121,7	128,4	30′
30°	70,8	77,7	84,5	91,4	98,3	105,1	112,0	118,9	125,0	132,7	30°
30′	73,2	80,3	87,3	94,5	101,8	108,6	115,7	122,8	129,8	137,0	30′
31°	75,6	82,9	90,1	97,5	104,8	112,1	119,5	126,8	134,1	141,5	31°
30′	78,0	85,5	93,0	100,7	108,2	115,8	123,4	130,9	138,4	146,0	30′
32°	80,5	88,3	95,7	103,9	111,6	119,4	127,2	135,0	142,7	150,6	32°
30′	83′0	91,0	99,0	107,1	115,1	123,1	131,1	139,1	147,1	155,1	30′
33°	85,5	93,8	102,1	110,4	118,6	126,8	135,1	143,3	151,6	159,9	33°
30′	88,2	96,7	105,1	113,6	122,1	130,6	139,1	147,6	156,1	164,7	30′
34°	90,8	99,5	108,2	117,0	125,7	134,5	143,3	152,0	160,7	169,5	34°
30′	93,4	102,3	111,3	120,4	129,4	138,4	147,4	156,4	165,4	174,4	30′
35°	96,1	106,5	114,5	123,9	133,1	142,2	151,6	160,8	170,1	179,3	35°
30′	98,9	109,3	117,8	127,4	136,9	146,3	155,8	165′3	174,8	184,4	30′
36°	101,6	114,4	121,1	130,9	140,6	150,4	160,2	169,9	179,6	189,9	36°

2. Senkung des Rohrs.

Tiefenwinkel.	50′	100′	150′	200′	250′	300′	350′	400′	450′	500′	Tiefenwinkel.
1°	2,9′	1,4′	1,0′	0,7′	0,6′	0,5′	0,4′	0,3′	0,3′	0,3′	1°
30′	3,0	1,5	1,0	0,8	0,6	0,6	0,5	0,5	0,5	0,4	30′
2°	3,1	1,6	1,2	0,9	0,7	0,7	0,7	0,7	0,6	0,6	2°
30′	3,2	1,7	1,3	1,1	0,9	0,9	0,9	0,9	0,8	0,8	30′
3°	3,3	1,9	1,4	1,2	1,0	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	3°
30′	3,4	2,0	1,6	1,4	1,2	1,3	1,3	1,3	1,4	1,4	30′

Tiefen-winkel.	50′	100′	150′	200′	250′	300′	350′	400′	450′	500′	Tiefen-winkel.
4°	3,5′	2,1′	1,7′	1,6′	1,4′	1,5′	1,6′	1,6′	1,7′	1,8′	4°
30′	3,6	2,2	1,9	1,8	1,7	1,8	1,9	1,9	2,0	2,1	30′
5°	3,7	2,4	2,1	2,0	1,9	2,1	2,2	2,3	2,4	2,6	5°
30′	3,9	2,6	2,3	2,2	2,2	2,4	2,5	2,7	2,8	3,0	30′
6°	4,0	2,7	2,5	2,5	2,4	2,7	2,9	3,1	3,3	3,5	6°
30′	4,1	2,9	2,7	2,7	2,7	3,1	3,3	3,5	3,8	4,0	30′
7°	4,2	3,1	2,9	3,0	3,1	3,5	3,7	4,0	4,3	4,5	7°
30′	4,4	3,3	3,2	3,3	3,4	4,0	4,2	4,5	4,8	5,1	30′
8°	4,5	3,5	3,4	3,6	3,8	4,4	4,6	5,0	5,4	5,8	8°
30′	4,6	3,7	3,7	3,9	4,1	4,8	5,1	5,6	6,0	6,5	30′
9°	4,8	3,9	4,0	4,3	4,5	5,3	5,7	6,2	6,7	7,2	9°
30′	4,9	4,1	4,3	4,6	4,9	5,8	6,2	6,8	7,4	8,0	30′
10°	5,1	4,3	4,6	5,0	5,4	6,3	6,8	7,5	8,1	8,8	10°
30′	5,2	4,5	4,9	5,4	5,8	6,8	7,4	8,1	8,9	9,6	30′
11°	5,4	4,8	5,2	5,8	6,3	7,3	8,0	8,9	9,7	10,5	11°
30′	5,5	5,0	5,5	6,1	6,8	7,8	8,7	9,6	10,5	11,4	30′
12°	5,8	5,3	5,8	6,6	7,2	8,4	9,4	10,3	11,3	12,3	12°
30′	5,9	5,5	6,2	7,0	7,8	9,0	10,2	11,2	12,2	13,3	30′
13°	6,1	5′8	6,5	7,5	8,4	9,7	10,9	12,0	13,1	14,3	13°
30′	6,2	6,1	6,9	8,0	8,9	10,4	11,9	12,8	14,1	15,4	30′
14°	6,4	6,4	7,3	8,5	9,5	11,0	12,8	13,7	15,1	16,5	14°
30′	6,6	6,7	7,7	9,0	10,1	11,7	13,6	14,7	16,1	17,6	30′
15°	6,8	7,0	8,1	9,5	10,7	12,5	14,5	15,6	17,2	18,8	15°
30′	7,0	7,3	8,5	10,0	11,3	13,2	15,4	16,6	18,3	19,9	30′
16°	7,2	7,6	8,9	10,5	12,0	14,1	16,3	17,6	19,4	21,2	16°
30′	7,3	7,9	9,4	11,1	12,7	14,8	17,2	18,6	20,5	22,5	30′
17°	7,5	8,2	9,8	11,7	13,4	15,6	18,2	19,7	21,7	23,8	17°
30′	7,5	8,5	10,3	12,3	14,1	16,5	18,9	20,7	22,9	25,1	30′
18°	8,0	8,9	10,8	12,8	14,9	17,2	19,5	21,8	24,2	26,5	18°
30′	8,2	9′2	11,2	13,5	15,6	18,2	20,5	23,0	25,5	27,9	30′
19°	8,4	9,6	11,7	14,2	16,3	19,1	21,6	24,2	26,8	29,4	19°
30′	8,6	9,9	12,2	14,8	17,1	20,0	22,7	25,4	28,1	30,9	30′
20°	8,8	10,3	12,7	15,4	17,9	21,0	23,8	26,7	29,5	32,4	20°
30′	9,0	10,7	13,3	16,1	18,7	22,0	24,9	27,9	30,9	34,0	30′
21°	9,2	11,1	13,8	16,8	19,5	23,0	26,1	29,2	32,4	35,6	21°
30′	9,4	11,4	14,3	17,5	20,4	24,0	27,2	30,5	33,8	37,2	30′
22°	9,7	11,8	14,9	18,2	21,2	25,0	28,4	31,9	35,3	38,8	22°
30′	9,9	12,2	15,5	18,9	22,1	26,0	29,6	33,3	36,9	40,5	30′
23°	10,1	12,6	16,0	19,7	23,0	27,1	30,9	34,7	38,5	42,3	23°
30′	10,4	13,0	16,6	20,4	24,0	28,2	32,1	36,1	40,1	44,1	30′
24°	10,6	13,5	17,2	21,2	24,9	29,3	33,4	37,6	41,7	45,9	24°
30′	10,9	13,9	17,8	22,0	25,9	30,5	31,8	39,1	43,4	47,7	30′
25°	11,1	14,3	18,4	22,8	26,8	31,6	36,1	40,6	45,1	49,6	25°
30′	11,4	14,8	19,1	23,6	27,8	32,8	37,5	42,1	46,8	51,5	30′
26°	11,7	15,2	19,7	24,4	28,8	34,0	38,8	43,7	48,5	53,4	26°
30′	11,9	15,7	20,3	25,2	29,2	35,8	40,2	45,3	50,3	55,4	30′

Tiefen-winkel.	50′	100′	150′	200′	250′	300′	350′	400′	450′	500′	Tiefen-winkel.
27°	12,2′	16,1′	21,0′	26,1′	30,9′	36,4′	41,7′	46,9′	52,0′	57,4′	27°
30′	12,4	16,6	21,7	26,9	31,9	37,7	43,1	48,6	54,0	59,9	30′
28°	12,7	17,1	22,3	27,8	33,0	39,0	44,6	50,2	55,9	61,6	28°
30′	12,9	17,6	23,0	28,7	34,1	40,3	46,1	52,0	57,8	63,7	30′
29°	13,2	18,1	23,7	29,6	35,2	41,6	47,6	53,7	59,7	65,8	29°
30′	13,4	18,5	24,4	30,5	36,3	42,9	49,2	55,4	61,6	68,0	30′
30°	13,7	19,0	25,1	31,4	37,4	44,3	50,7	57,3	63,6	70,2	30°
30′	14,0	19,5	25,8	32,4	38,6	45,6	52,3	59,0	65,7	72,4	30′
31°	14,3	20,0	26,6	33,3	39,8	47,0	54,0	60,9	67,8	74,7	31°
30′	14,6	20,5	27,3	34,3	41,0	48,5	55,6	62,7	69,9	77,0	30′
32°	14,9	21,1	28,1	35,3	42,2	49,9	57,3	64,6	72,0	79,4	32°
30′	15,2	21,6	28,8	36,3	43,4	51,3	58,9	66,5	74,1	81,8	30′
33°	15,5	22,1	29,6	37,3	44,6	52,8	61,6	68,5	76,3	84,2	33°
30′	15,8	22,6	30,4	38,3	45,9	54,3	62,4	70,4	78,5	86,6	30′
34°	16,1	23,2	31,2	39,3	47,1	55,8	64,1	72,2	80,7	89,1	34°
30′	16,4	23,8	32,0	40,4	48,5	57,3	65,9	74,3	83,0	91,6	30′
35°	16,7	24,3	32,8	41,4	49,7	58,9	67,7	76,5	85,3	94,1	35°
30′	17,0	24,9	33,6	42,5	51,0	60,5	69,5	78,6	87,6	96,7	30′
36°	17,3	25,5	34,4	43,6	52,2	62,0	71,3	80,7	89,9	99,3	36°

Tiefen-winkel.	550′	600′	650′	700′	750′	800′	850′	900′	950′	1000′	Tiefen-winkel.
1°	0,3′	0,3′	0,2′	0,2′	0,2′	0,2′	0,2′	0,2′	0,2′	0,2′	1°
30′	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	30′
2°	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	2°
30′	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	1,0	1,0	1,0	1,0	1,1	30′
3°	1,2	1,2	1,2	1,2	1,3	1,3	1,4	1,4	1,4	1,5	3°
30′	1,5	1,5	1,6	1,6	1,7	1,8	1,8	1,9	2,0	2,0	30′
4°	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,3	2,4	2,6	2,6	4°
30′	2,2	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,2	3,3	30′
5°	2,7	2,8	3,0	3,1	3,3	3,4	3,6	3,7	3,9	4,0	5°
30′	3,1	3,4	3,5	3,7	3,9	4,1	4,3	4,5	4,7	4,9	30′
6°	3,7	3,9	4,1	4,4	4,6	4,8	5,1	5,3	5,6	5,8	6°
30′	4,3	4,6	4,8	5,1	5,3	5,6	5,9	6,2	6,5	6,7	30′
7°	4,9	5,2	5,5	5,8	6,1	6,5	6,8	7,1	7,5	7,8	7°
30′	5,6	5,9	6,3	6,6	7,0	7,4	7,8	8,2	8,6	8,9	30′
8°	6,3	6,7	7,1	7,4	7,9	8,3	8,8	9,2	9,7	10,1	8°
30′	7,0	7,5	8,0	8,4	8,9	9,4	9,9	10,4	10,9	11,4	30′
9°	7,8	8,3	8,9	9,3	9,9	10,5	11,1	11,6	12,2	12,7	9°
30′	8,6	9,2	9,8	10,4	11,0	11,7	12,3	12,9	13,5	14,1	30′
10°	9,5	10,1	10,8	11,5	12,2	12,9	13,6	14,3	15,0	15,6	10°
30′	10,4	11,1	11,9	12,6	13,4	14,2	14,9	15,7	16,5	17,3	30′
11°	11,3	12,2	13,0	13,8	14,6	15,5	16,3	17,2	18,0	18,9	11°
30′	12,3	13,2	14,1	15,0	15,9	16,9	17,9	18,8	19,7	20,6	30′
12°	13,3	14,3	15,3	16,3	17,3	18,4	19,4	20,4	21,4	22,4	12°
30′	14,5	15,5	16,6	17,6	18,7	19,9	21,0	22,1	23,2	24,3	30′
13°	15,5	16,7	17,9	19,0	20,2	21,5	22,6	23,8	25,0	26,2	13°

Tiefen-winkel.	550′	600′	650′	700′	750′	800′	850′	900′	950′	1000′	Tiefen-winkel.
13° 30′	16,6′	17,9′	19,2′	20,5′	21,8′	23,1′	24,4′	25,7′	27,0′	28,2′	13° 30′
14°	17,8	19,2	20,6	22,0	23,3	24,8	26,2	27,6	29,0	30,3	14°
30′	19,1	20,6	22,1	23,5	25,0	26,6	28,0	29,5	31,0	32,5	30′
15°	20,4	22,0	23,6	25,1	26,7	28,4	29,9	31,6	33,2	34,7	15°
30′	21,7	23,4	25,1	26,7	28,5	30,2	31,9	33,7	35,3	37,1	30′
16°	23,0	24,9	26,7	28,5	30,3	32,2	34,0	35,8	37,4	39,5	16°
30′	24,4	26,4	28,3	30,2	32,1	34,2	36,1	38,0	39,9	41,8	30′
17°	25,8	27,9	30,0	32,0	31,1	36,2	38,3	40,3	42,4	44,5	17°
30′	27,3	29,8	31,7	33,8	36,0	38,3	40,5	42,7	44,9	47,1	30′
18°	28,8	31,1	33,4	35,7	38,1	40,5	42,8	45,1	47,5	49,9	18°
30′	30,4	32,8	35,3	37,7	40,1	42,7	45,1	47,6	50,1	52,6	30′
19°	32,0	34,6	37,2	39,7	42,3	45,0	47,5	50,1	52,8	55,3	19°
30′	33,6	36,3	39,1	41,7	44,5	47,3	50,0	52,7	55,5	58,2	30′
20°	35,3	38,2	41,0	43,8	46,7	49,6	52,5	55,4	58,3	61,2	20°
30′	37,0	40,0	43,0	46,0	49,1	52,1	55,1	58,2	61,2	64,2	30′
21°	38,7	41,9	45,1	48,2	51,4	54,7	57,8	61,0	64,2	67,4	21°
30′	40,5	43,9	47,2	50,1	53,8	57,2	60,5	65,9	67,2	70,6	30′
22°	42,3	45,9	49,3	52,7	56,3	59,8	63,3	67,8	70,3	73,8	22°
30′	44,2	47,9	51,5	55,1	58,8	62,5	66,1	69,8	73,5	77,1	30′
23°	46,1	49,9	53,8	57,5	61,3	65,3	69,0	72,9	76,7	80,5	23°
30′	48,0	52,0	57,1	59,9	63,9	68,0	72,0	76,0	80,0	81,0	30′
24°	50,0	54,2	58,4	62,4	66,6	70,9	75,0	79,2	83,4	87,5	24°
30′	52,1	56,4	60,7	65,0	69,3	73,8	78,1	82,5	86,8	91,1	30′
25°	54,1	58,6	63,2	67,6	72,1	76,7	81,3	85,8	90,2	94,8	25°
30′	56,2	60,9	65,7	70,2	74,9	79,8	84,4	89,1	93,8	98,5	30′
26°	58,3	63,2	68,2	72,9	77,8	82,8	87,7	92,6	97,5	102,3	26°
30′	60,5	65,5	70,7	75,7	80,8	85,9	91,0	96,1	101,2	106,3	30′
27°	62,7	67,9	73,3	78,5	83,8	89,0	94,3	99,6	104,9	110,2	27°
30′	65,0	70,3	75,9	81,3	86,8	92,3	97,8	103,3	107,8	114,2	30′
28°	67,2	72,9	78,6	84,2	89,9	95,6	101,3	107,0	112,7	118,3	28°
30′	69,5	75,4	81,3	87,1	93,0	99,0	104,8	110,7	116,6	122,4	30′
29°	71,9	78,0	84,1	90,1	96,2	102,4	108,4	114,5	120,6	126,6	29°
30′	74,4	80,6	86,9	93,1	99,4	105,8	112,0	118,4	124,7	130,9	30′
30°	76,8	83,2	89,8	96,1	102,7	109,3	115,7	122,3	128,8	135,3	30°
30′	79,2	85,9	92,7	99,3	106,0	112,8	119,5	126,3	133,0	139,7	30′
31°	81,7	88,6	95,6	102,4	109,4	116,4	123,3	130,3	137,2	144,2	31°
30′	84,2	91,4	98,6	105,6	112,8	120,1	127,2	134,4	141,6	148,7	30′
32°	86,8	94,2	101,6	108,9	116,2	123,8	131,1	138,6	146,0	153,3	32°
30′	89,4	96,9	104,7	112,2	119,8	127,5	135,1	142,8	150,4	158,0	30′
33°	92,0	99,4	107,8	115,5	123,4	131,4	139,2	147,1	154,9	162,8	33°
30′	94,7	102,2	110,9	118,9	127,0	135,2	143,3	151,4	159,5	167,6	30′
34°	96,4	104,8	114,1	122,3	130,7	139,1	147,4	155,8	164,1	172,4	34°
30′	100,1	108,2	117,3	125,8	134,4	143,1	151,6	160,2	168,8	177,4	30′
35°	102,9	111,2	120,6	129,3	138,1	147,1	155,9	164,7	173,6	182,4	35°
30′	105,7	114,3	123,9	132,9	142,0	151,2	160,2	169,3	178,4	187,4	30′
36°	108,6	117,4	127,3	136,4	145,8	155,2	164,5	174,0	183,2	192,5	36°

Tafel Nr. III.

Reductionen für den Ertel'schen Distanzmesser.

1. Erhebung des Rohrs.

Erhebungswinkel	50′	100′	150′	200′	250′	300′	350′	400′	450′	500′	550′	600′	Erhebungswinkel
1°	0,1′	0,2′	0,01′	0,03′	0,03′	0,04′	0,05′	0,05′	0,05′	0,07′	0,08′	0,1′	1°
30′	0,3	0,1	0,01′	0,05′	0,05′	0,07′	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	30′
2°	0,3	0,1	0,02′	0,08′	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,3	0,3	0,3	2°
30′	0,3	0,1	0,05′	0,1	0,2	0,2	0,3	0,3	0,4	0,4	0,5	0,5	30′
3°	0,3	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,6	0,7	0,8	3°
30′	0,3	0,2	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	30′
4°	0,3	0,2	0,2	0,3	0,5	0,6	0,7	0,9	1,0	1,2	1,3	1,4	4°
30′	0,3	0,2	0,3	0,5	0,6	0,8	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,8	30′
5°	0,3	0,2	0,3	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,1	2,2	5°
30′	0,3	0,3	0,4	0,7	1,0	1,2	1,5	1,7	2,0	2,2	2,5	2,7	30′
6°	0,3	0,3	0,5	0,8	1,2	1,4	1,8	2,1	2,4	2,7	3,0	3,2	6°
30′	0,3	0,1	0,7	1,0	1,4	1,7	2,1	2,4	2,8	3,1	3,5	3,8	30′
7°	0,3	0,5	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8	3,2	3,7	4,1	4,4	7°
30′	0,3	0,6	0,9	1,4	1,9	2,3	2,8	3,2	3,7	4,2	4,7	5,1	30′
8°	0,4	0,6	1,1	1,6	2,2	2,6	3,2	3,7	4,3	4,8	5,3	5,8	8°
30′	0,4	0,7	1,2	1,8	2,4	3,0	3,6	4,2	4,8	5,4	6,0	6,5	30′
9°	0,4	0,8	1,4	2,1	2,8	3,4	4,0	4,7	5,4	6,1	6,7	7,3	9°
30′	0,5	0,9	1,6	2,3	3,1	3,8	4,5	5,3	6,0	6,8	7,5	8,2	30′
10°	0,5	1,0	1,8	2,6	3,5	4,2	5,1	5,9	6,7	7,5	8,3	9,1	10°
30′	0,6	1,2	2,0	2,9	3,8	4,7	5,6	6,5	7,4	8,3	9,2	10,0	30′
11°	0,6	1,3	2,2	3,2	4,2	5,2	6,1	7,1	8,1	9,1	10,1	11,0	11°
30′	0,7	1,4	2,4	3,5	4,6	5,7	6,7	7,8	8,9	9,9	11,0	12,0	30′
12°	0,7	1,6	2,7	3,9	5,0	6,2	7,3	8,5	9,7	10,8	12,0	13,1	12°
30′	0,8	1,7	2,9	4,2	5,5	6,7	8,0	9,2	10,5	11,7	13,0	14,2	30′
13°	0,8	1,9	3,2	4,6	5,9	7,3	8,6	10,0	11,3	12,6	14,0	15,3	13°
30′	0,9	2,1	3,4	5,0	6,4	7,9	9,3	10,8	12,2	13,6	15,1	16,5	30′
14°	1,0	2,2	3,7	5,3	6,9	8,5	10,0	11,6	13,1	14,7	16,3	17,8	14°
30′	1,1	2,4	4,1	5,7	7,5	9,1	10,7	12,4	14,1	15,8	17,4	19,1	30′
15°	1,1	2,6	4,4	6,2	8,0	9,7	11,5	13,2	15,1	16,9	18,6	20,4	15°
30′	1,2	2,8	4,7	6,6	8,5	10,4	12,3	14,2	16,2	18,0	19,9	21,8	30′
16°	1,3	3,0	5,0	7,1	9,1	11,1	13,1	18,2	17,2	19,2	21,3	23,2	16°
30′	1,4	3,2	5,3	7,5	9,7	11,8	14,0	16,1	18,3	20,4	22,6	24,6	30′
17°	1,5	3,4	5,7	8,0	10,3	12,5	14,8	17,1	19,4	21,7	24,0	26,2	17°
30′	1,6	3,7	6,1	8,5	10,9	13,3	15,7	18,1	20,6	23,0	25,4	27,7	30′
18°	1,7	3,9	6,5	9,0	11,6	14,1	16,7	19,2	21,8	24,3	26,9	29,3	18°
30′	1,8	4,2	6,8	9,5	12,3	14,9	17,6	20,3	23,0	25,7	28,4	31,0	30′
19°	1,9	4,4	7,2	10,1	12,9	15,7	18,6	21,4	24,2	27,1	29,9	32,6	19°
30′	2,0	4,7	7,6	10,6	13,6	16,6	19,6	22,5	25,5	28,5	31,5	34,3	30′
20°	2,1	4,9	8,0	11,2	14,4	17,5	20,6	23,7	26,8	30,0	33,1	36,1	20°
30′	2,2	5,2	8,5	11,8	15,1	18,4	21,6	24,9	28,2	31,5	34,8	37,0	30′

Höhenwinkel.	50′	100′	150′	200′	250′	300′	350′	400′	450′	500′	550′	600′	Höhenwinkel.
21°	2,4′	5,5′	8,9′	12,4′	15,9′	19,3′	22,7′	26,1′	29,6′	33,0′	36,5′	39,8′	21°
30′	2,5	5,7	9,3	13,0	16,7	20,2	23,8	27,4	31,0	34,6	38,2	41,7	30′
22°	2,6	6,0	9,8	13,6	17,4	21,1	24,9	28,7	32,4	36,2	40,0	43,7	22°
30′	2,8	6,3	10,3	14,3	18,2	22,1	26,0	30,0	33,9	37,9	41,8	45,7	30′
23°	2,9	6,6	10,8	14,9	19,1	23,1	27,2	31,3	35,4	39,5	43,7	47,7	23°
30′	3,0	7,0	11,3	15,6	19,9	24,1	28,1	32,7	37,0	40,2	45,6	49,8	30′
24°	3,2	7,3	11,8	16,3	20,8	25,1	29,6	34,1	38,5	43,0	47,5	51,8	24°
30′	3,3	7,6	12,3	17,0	21,6	26,2	30,9	35,5	40,2	44,8	49,5	53,9	30′
25°	3,5	7,9	12,8	17,7	22,5	27,3	32,1	37,0	41,8	47,6	51,5	56,1	25°
30′	3,6	8,3	13,3	18,4	23,5	28,4	33,4	38,4	43,5	48,5	53,5	58,4	30′
26°	3,8	8,6	13,9	19,1	24,1	29,5	34,8	39,9	45,2	50,4	55,6	60,6	26°
30′	3,9	9,0	14,4	19,9	25,3	30,7	36,0	41,5	46,9	52,3	57,8	63,0	30′
27°	4,1	9,3	15,0	20,6	26,3	31,8	37,4	43,0	48,6	54,3	60,9	65,3	27°
30′	4,3	9,7	15,6	21,4	27,3	33,0	38,8	44,6	50,4	56,3	62,1	67,7	30′
28°	4,5	10,1	16,2	22,2	28,3	34,2	40,2	46,2	52,3	58,3	64,3	70,1	28°
30′	4,7	10,5	16,8	23,0	29,3	35,4	41,7	47,9	54,1	60,3	66,6	72,6	30′
29°	4,8	10,9	17,4	23,8	30,3	36,7	43,1	49,6	56,0	62,4	68,9	75,1	29°
30′	5,0	11,3	18,0	24,7	31,4	37,9	44,6	51,3	57,9	64,6	71,2	77,7	30′
30°	5,2	11,7	18,6	25,5	32,4	39,2	46,1	53,0	59,8	66,8	73,6	80,3	30°
30′	5,4	12,1	19,3	26,4	33,5	40,5	47,6	54,7	61,8	68,9	76,0	82,9	30′
31°	5,6	12,5	19,9	27,2	34,6	41,9	49,2	56,5	63,8	71,1	78,5	85,6	31°
30′	5,8	12,9	20,6	28,1	35,7	43,2	50,8	58,3	65,8	73,4	81,0	88,3	30′
32°	6,0	13,3	21,2	29,0	36,8	44,6	52,4	60,1	67,9	75,7	83,5	91,1	32°
30′	6,2	13,8	21,9	29,9	38,0	46,0	54,0	62,0	70,0	78,0	86,0	93,9	30′
33°	6,4	14,2	22,6	30,9	39,2	47,4	55,6	63,9	72,1	80,3	88,6	96,8	33°
30′	6,6	14,7	23,3	31,9	40,4	48,8	57,3	65,8	74,1	82,8	91,2	99,7	30′
34°	6,8	15,2	24,0	32,8	41,6	50,2	59,0	67,7	76,4	85,2	93,9	102,5	34°
30′	7,0	15,6	24,7	33,7	42,8	51,7	60,7	69,7	78,6	87,6	96,6	105,4	30′
35°	7,3	16,1	25,4	34,7	44,0	53,2	62,4	71,6	80,8	90,1	99,4	108,4	35°
30′	7,5	16,5	26,1	35,7	45,3	54,7	64,2	73,6	83,1	92,7	102,1	111,4	30′
36°	7,8	17,0	26,9	36,7	46,6	56,2	66,1	75,7	88,4	95,2	104,9	114,5	36°

2. Senkung des Rohrs.

Tiefenwinkel.	50′	100′	150′	200′	250′	300′	350′	400′	450′	500′	550′	600′	Tiefenwinkel.
1°	0,5′	0,3′	0,1′	0,1′	0,1′	0,1′	0,1′	0,1′	0,1′	0,1′	0,1′	0,1′	1°
30′	0,5	0,3	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	30′
2°	0,6	0,4	0,2	0,2	0,2	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,4	0,4	2°
30′	0,6	0,5	0,3	0,3	0,3	0,4	0,4	0,4	0,5	0,5	0,6	0,6	30′
3°	0,7	0,5	0,4	0,5	0,5	0,5	0,5	0,6	0,7	0,7	0,8	0,8	3°
30′	0,7	0,6	0,5	0,6	0,6	0,7	0,7	0,8	0,9	0,9	1,0	1,1	30′
4°	0,8	0,7	0,6	0,7	0,7	0,9	0,9	1'0	1,2	1,2	1,3	1,4	4°
30′	0,8	0,8	0,7	0,8	0,9	1,1	1,2	1,3	1,5	1,6	1,6	1,7	30′
5°	0,9	0,9	0,8	1,0	1,2	1,3	1,5	1,6	1,8	1,9	2,0	2,1	5°
30′	1,0	1,0	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	1,9	2,1	2,3	2,4	2,6	30′

Tiefen-winkel.	50′	100′	150′	200′	250′	300′	350′	400′	450′	500′	550′	600′	Tiefen-winkel.
6°	1,1′	1,2′	1,1′	1,4′	1,6′	1,9′	2,1′	2,3′	2,5′	2,8′	2,9′	3,0′	6°
30′	1,2	1,3	1,3	1,6	1,8	2,2	2,4	2,7	3,0	3,3	3,4	3,5	30′
7°	1,2	1,4	1,5	1,8	2,1	2,5	2,8	3,1	3,5	3,8	3,9	4,1	7°
30′	1,3	1,5	1,7	2,1	2,3	2,8	3,2	3,6	4,0	4,3	4,5	4,7	30′
8°	1,4	1,7	1,9	2,3	2,7	3,2	3,6	4,1	4,5	4,9	5,2	5,5	8°
30′	1,5	1,9	2,1	2,6	3,1	3,6	4,0	4,6	5,1	5,5	5,9	6,4	30′
9°	1,6	2,0	2,3	2,9	3,4	4,0	4,5	5,1	5,7	6,2	6,7	7,3	9°
30′	1,8	2,2	2,6	3,2	3,8	4,4	5,1	5,7	6,3	6,9	7,6	8,4	30′
10°	1,9	2,4	2,8	3,5	4,2	4,9	5,6	6,3	7,0	7,7	8,4	9,3	10°
30′	2,0	2,6	3,1	3,9	4,6	5,4	6,1	6,9	7,7	8,5	9,3	10,2	30′
11°	2,2	2,8	3,3	4,2	5,0	5,9	6,7	7,6	8,4	9,3	10,1	11,1	11°
30′	2,3	3,0	3,6	4,6	5,5	6,4	7,3	8,3	9,2	10,1	11,1	12,1	30′
12°	2,4	3,2	3,9	5,0	5,9	6,9	8,0	9,0	10,0	11,0	12,1	13,2	12°
30′	2,5	3,4	4,2	5,3	6,4	7,5	8,6	9,7	10,8	11,9	13,1	14,3	30′
13°	2,7	3,6	4,5	5,7	6,9	8,1	9,3	10,5	11,7	12,9	14,1	15,4	13°
30′	2,9	3,8	4,9	6,2	7,4	8,7	10,0	11,3	12,5	13,9	15,2	16,6	30′
14°	3,1	4,1	5,2	6,6	7,9	9,4	10,7	12,2	13,5	15,0	16,4	17,9	14°
30′	3,2	4,3	5,5	7,1	8,5	10,0	11,5	13,0	14,5	16,1	17,6	19,2	30′
15°	3,4	4,6	5,9	7,5	9,1	10,7	12,3	14,0	15,5	17,2	18,8	20,5	15°
30′	3,5	4,8	6,3	8,0	9,7	11,4	13,1	14,9	16,6	18,3	20,0	21,9	30′
16°	3,7	5,1	6,7	8,5	10,3	12,2	14,0	15,8	17,7	19,5	22,3	23,3	16°
30′	3,8	5,4	7,1	9,0	10,9	12,9	14,8	16,8	18,8	20,7	22,7	24,7	30′
17°	4,0	5,7	7,5	9,5	11,5	13,7	15,7	17,8	19,9	22,0	24,1	26,3	17°
30′	4,2	6,0	7,9	10,1	12,2	14,5	16,7	18,9	20,1	23,3	25,5	27,9	30′
18°	4,3	6,3	8,3	10,6	12,9	15,3	17,6	20,0	22,3	24,6	27,0	29,5	18°
30′	4,5	6,6	8,7	11,2	13,6	16,1	18,6	21,1	23,5	26,0	28,5	31,1	30′
19°	4,7	6,9	9,1	11,8	14,3	17,0	19,6	22,2	24,8	27,4	30,1	32,7	19°
30′	4,9	7,2	9,6	12,4	15,1	17,9	20,6	23,3	26,1	28,8	31,6	34,8	30′
20°	5,1	7,5	10,0	13,0	15,8	18,8	21,6	24,4	27,4	30,3	33,2	36,2	20°
30′	5,2	7,9	10,5	13,6	16,7	19,7	22,7	25,7	28,8	31,8	34,9	38,0	30′
21°	5,4	8,2	11,0	14,3	17,4	20,6	23,8	27,0	30,2	33,4	36,6	39,9	21°
30′	5,6	8,5	11,6	14,9	18,2	21,6	24,9	28,3	31,6	35,0	38,3	41,8	30′
22°	5,8	8,9	12,1	15,6	19,0	22,6	26,0	29,6	33,0	36,6	40,1	43,7	22°
30′	6,0	9,3	12,6	16,3	19,8	23,6	27,2	30,9	34,5	38,2	41,9	45,7	30′
23°	6,2	9,6	13,1	17,0	20,7	24,6	28,4	32,3	36,1	39,9	43,8	47,8	23°
30′	6,4	10,0	13,6	17,7	21,6	25,6	29,6	33,7	38,7	41'7	45,7	49,8	30′
24°	6,6	10,4	14,2	18,4	22,5	26,7	30,9	35,1	39,3	43,4	47,6	51,9	24°
30′	6,9	10,8	14,7	19,1	23,4	27,8	32,1	36,5	40,9	45,2	49,6	54,1	30′
25°	7,1	11,2	15,3	19,9	24,3	28,9	33,4	38,0	42,5	47,0	51,6	56,3	25°
30′	7,3	11,6	15,9	20,6	25,3	30,1	34,8	39,5	44,2	48,9	53,6	58,5	30′
26°	7,5	12,0	16,5	21,4	26,2	31,2	36,0	41,0	45,9	50,8	55,7	60,8	26°
30′	7,8	12,4	17,1	22,2	27,2	32,4	37,4	42,6	47,6	52,7	57,8	63,1	30′
27°	8,0	12,8	17,7	23,0	28,2	33,6	38,8	44,2	49,4	54,7	60,0	65,5	27°
30′	8,2	13,2	18,3	23,8	29,2	34,8	40,2	45,8	51,2	56,7	62,2	67,9	30′
28°	8,5	13,7	19,0	24,7	30,2	36,0	41,7	47,4	53,1	58,7	64,4	70,3	28°
30′	8,7	14,1	19,6	25,8	31,3	37,3	43,1	49,0	55,0	60,8	66,7	72,8	30′

Tiefen-winkel.	50′	100′	150′	200′	250′	300′	350′	400′	450′	500′	550′	600′	Tiefen-winkel.
29°	8,9′	14,6′	20,3′	26,4′	32,4′	38,6′	44,6′	50,7′	56,9′	62,9′	69,0	75,3′	29°
30′	9,2	15,0	20,9	27,2	33,5	39,9	46,1	52,4	58,8	65,1	71,4	77,9	30′
30°	9,4	15,5	21,6	28,1	34,6	41,2	47,6	54,2	60,8	67,2	73,8	80,5	30°
30′	9,7	15,9	22,3	29,0	35,7	42,2	49,2	56,0	62,8	69,4	76,2	83,1	30′
31°	9,9	16,4	23,0	29,9	36,8	43,8	50,8	57,8	64,8	71,7	78,7	85,8	31°
30′	10,2	16,9	23,7	30,9	38,0	45,2	52,4	59,6	66,8	73,9	81,1	88,5	30′
32°	10,5	17,4	24,4	31,9	39,1	46,6	54,0	61,4	68,8	76,2	83,7	91,3	32°
30′	10,7	17,9	25,1	32,8	40,3	48,0	55,6	63,3	70,9	78,6	86,2	94,1	30′
33°	11,0	18,4	25,8	33,7	41,5	49,4	57,3	65,2	73,0	80,9	88,8	96,9	33°
30′	11,3	18,9	26,6	34,7	42,7	50,9	59,0	67,1	75,2	83,2	91,4	99,8	30′
34°	11,5	19,4	27,3	35,7	43,9	52,4	60,7	69,1	77,4	85,7	94,1	102,7	34°
30′	11,8	19,9	28,1	36,7	45,2	53,9	62,4	71,1	79,6	88,2	96,8	105,6	30′
35°	12,1	20,4	28,8	37,7	46,4	55,4	64,2	73,1	81,9	90,7	99,6	108,6	35°
30′	12,3	20,9	29,6	38,7	47,7	56,9	66,1	75,1	84,1	93,2	102,3	111,6	30′
36°	12,6	21,5	30,4	39,7	49,0	58,4	68,1	77,1	86,3	95,8	105,1	114,7	36°

Tafel Nr. IV.

Zu Stampfer's Distanzmesser; Werthe von $\frac{324}{o-u}$.

o — u	Distanz.	Prop.-Theile.	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.
1,00	324,00		1,20	270,00		1,40	231,43	
1,01	320,79	0,29	1,21	267,77	0,21	1,41	229,79	0,15
1,02	317,65	0,59	1,22	265,58	0,42	1,42	228,17	0,31
1,03	314,56	0,88	1,23	263,42	0,62	1,43	226,57	0,46
1,04	311,54	1,18	1,24	261,29	0,83	1,44	225,00	0,62
1,05	308,57	1,47	1,25	259,20	1,04	1,45	223,45	0,77
1,06	305,66	1,76	1,26	257,14	1,25	1,46	221,92	0,93
1,07	302,80	2,06	1,27	255,12	1,45	1,47	220,41	1,08
1,08	300,00	2,35	1,28	253,13	1,66	1,48	218,92	1,23
1,09	297,95	2,65	1,29	251,16	1,87	1,49	217,45	1,39
1,10	294,54		1,30	249,23		1,50	216,00	
1,11	291,89	0,25	1,31	247,33	0,18	1,51	214,57	0,14
1,12	289,29	0,49	1,32	245,46	0,36	1,52	213,16	0,27
1,13	287,73	0,74	1,33	243,61	0,53	1,53	211,76	0,40
1,14	284,21	0,98	1,34	241,79	0,71	1,54	210,39	0,54
1,15	281,74	1,23	1,35	240,00	0,89	1,55	209,03	0,68
1,16	279,31	1,47	1,36	238,24	1,07	1,56	207,69	0,81
1,17	276,92	1,72	1,37	236,50	1,25	1,57	206,37	0,94
1,18	274,58	1,96	1,38	234,78	1,42	1,58	205,06	1,08
1,19	272,27	2,21	1,39	233,09	1,60	1,59	203,77	1,22

[illegible]	Instant	[illegible]	[illegible]	Instant	[illegible]	[illegible]	Instant	[illegible]
[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]	
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]	
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]	
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]	
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

o — u	Distanz.	Prop.-Theile.	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.
2,80	115,71		3,20	101,25		3,60	90,00	
2,81	115,53	0,04	3,21	100,94	0,03	3,61	89,75	0,02
2,82	114,89	0,08	3,22	100,62	0,06	3,62	89,50	0,05
2,83	114,49	0,12	3,23	100,31	0,09	3,63	89,26	0,07
2,84	114,08	0,16	3,24	100,00	0,12	3,64	89,01	0,09
2,85	113,69	0,20	3,25	99,69	0,15	3,65	88,77	0,12
2,86	113,29	0,24	3,26	99,39	0,18	3,66	88,52	0,14
2,87	112,89	0,28	3,27	99,08	0,21	3,67	88,28	0,17
2,88	112,50	0,32	3,28	98,78	0,24	3,68	88,04	0,19
2,89	112,11	0,36	3,29	98,48	0,28	3,69	87,81	0,22
2,90	111,72		3,30	98,18		3,70	87,57	
2,91	111,34	0,04	3,31	97,89	0,03	3,71	87,33	0,02
2,92	110,96	0,07	3,32	97,59	0,06	3,72	87,10	0,05
2,93	110,58	0,11	3,33	97,30	0,09	3,73	86,86	0,07
2,94	110,20	0,15	3,34	97,01	0,12	3,74	86,63	0,09
2,95	109,83	0,19	3,35	96,72	0,14	3,75	86,40	0,12
2,96	109,46	0,26	3,36	96,43	0,17	3,76	86,17	0,14
2,97	109,09	0,30	3,37	96,14	0,20	3,77	85,94	0,16
2,98	108,72	0,33	3,38	95,86	0,23	3,78	85,71	0,18
2,99	108,36	0,22	3,39	95,58	0,26	3,79	85,94	0,21
3,00	108,00		3,40	95,29		3,80	85,26	
3,01	107,64	0,03	3,41	95,02	0,03	3,81	85,04	0,02
3,02	107,28	0,07	3,42	94,74	0,05	3,82	84,82	0,04
3,03	106,93	0,10	3,43	94,46	0,08	3,83	84 60	0,06
3,04	106,58	0,14	3,44	94,19	0,11	3,84	84,38	0,09
3,05	106,23	0,17	3,45	93,91	0,14	3,85	84,16	0,11
3,06	105,88	0,21	3,46	93,64	0,16	3,86	83,94	0,13
3,07	105,54	0,24	3,47	93,37	0,19	3,87	83,72	0,15
3,08	105,20	0,28	3,48	93,10	0,22	3,88	83,50	0,17
3,09	104,86	0,31	3,49	92,84	0,24	3,89	83,29	0,20
3,10	104,52		3,50	92,57		3,90	83,08	
3,11	104,18	0,03	3,51	92,31	0,02	3,91	82,86	0,02
3,12	103,85	0,06	3,52	92,05	0,05	3,92	82,65	0,04
3,13	103,52	0,10	3,53	91,79	0,08	3,93	82,44	0,06
3,14	103,18	1,13	3,54	91,53	0,10	3,94	82,23	0,08
3,15	102,86	0,16	3,55	91,27	0,13	3,95	82,03	0,10
3,16	102,53	0,20	3,56	91,01	0,15	3,96	81,82	0,12
3,17	102,21	0,23	3,57	90,76	0,18	3,97	81,61	0,14
3,18	101,89	0,26	3,58	90,50	0,20	3,98	81,41	0,17
3,19	101,57	0,29	3,59	90,25	0,23	3,99	81,20	0,19

o — u	Distanz.	Prop.-Theile	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.
4,00	81,00		4,40	73,64		4,80	67,50	
4,01	80,79	0,02	4,41	73,47	0,02	4,81	67,36	0,01
4,02	80,59	0,04	4,42	73,30	0,03	4,82	67,22	0,03
4,03	80,39	0,06	4,43	73,14	0,05	4,83	67,08	0,04
4,04	80,20	0,08	4,44	72,97	0,06	4,84	66,94	0,06
4,05	80,00	0,09	4,45	72,81	0,08	4,85	66,80	0,07
4,06	79,80	0,12	4,46	72,65	0,10	4,86	66,67	0,08
4,07	79,61	0,14	4,47	72,49	0,11	4,87	66,53	0,10
4,08	79,41	0,16	4,48	72,32	0,13	4,88	66,39	0,11
4,09	79,22	0,18	4,49	72,16	0,15	4,89	66,26	0,12
4,10	79,03		4,50	72.00		4,90	66,12	
4,11	78,83	0,02	4,51	71,84	0,02	4,91	65,99	0,01
4,12	78,64	0,04	4,52	71,68	0,03	4,92	65,85	0,03
4,13	78,45	0,06	4,53	71,52	0,05	4,93	65,72	0,04
4,14	78,26	0,08	4,54	71,36	0,06	4,94	65,59	0,05
4,15	76,07	0,09	4,55	71,21	0,08	4,95	65,46	0,07
4,16	77,88	0,11	4,56	71,05	0,09	4,96	65,32	0,08
4,17	77,70	0,13	4,57	70,90	0,11	4,97	65,19	0,09
4,18	77,51	0,15	4,58	70,74	0,12	4,98	65,06	0,10
4,19	77,33	0,17	4,59	70,59	0,14	4,99	64,93	0,12
4,20	77,14		4,60	70,44		5,00	64,80	
4,21	76,96	0,02	4,61	70,28	0,02	5,01	64,67	0,01
4,22	76,78	0,04	4,62	70,13	0,03	5,02	64,54	0,02
4,23	76,60	0,05	4,63	69,98	0,04	5,03	64,41	0,04
4,24	76,42	0,07	4,64	69,83	0,06	5,04	64,29	0,05
4,25	76,24	0,09	4,65	69,68	0,08	5,05	64,16	0,06
4,26	76,06	0,10	4,66	69,53	0,09	5,06	64,03	0,08
4,27	75,88	0,12	4,67	69,38	0,10	5,07	63,91	0,09
4,28	75,70	0,14	4,68	69,23	0,12	5,08	63,78	0,10
4,29	75,53	0,16	4,69	69,08	0,14	5,09	63,66	0,11
4,30	75,35		4,70	68,94		5,10	63,53	
4,31	75,18	0,02	4,71	68,79	0,01	5,11	63,41	0,01
4,32	75,00	0,03	4,72	68,64	0,03	5,12	63,28	0,02
4,33	74,83	0,05	4,73	68,50	0,04	5,13	63,16	0,04
4,34	74,66	0,07	4,74	68,36	0,06	5,14	63,04	0,05
4,35	74,48	0,08	4,75	68,21	0,07	5,15	62,91	0,06
4,36	74,31	0,10	4,76	68,07	0,09	5,16	62,79	0,07
4,37	74,14	0,12	4,77	67,93	0,10	5,17	62,67	0,08
4,38	73,97	0,14	4,78	67,78	0,12	5,18	62,55	0,10
4,39	73,80	0,15	4,79	67,64	0,13	5,19	62,43	0,11

o — u	Distanz.	Prop.-Theile.	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.
5,20	62,31		5,60	57,86		6,00	54,00	
5,21	62,19	0,01	5,61	57,75	0,01	6,01	53,91	0,01
5,22	62,07	0,02	5,62	57,65	0,02	6,02	53,82	0,02
5,23	61,95	0,04	5,63	57,55	0,03	6,03	53,73	0,03
5,24	61,83	0,05	5,64	57,45	0,04	6,04	53,64	0,04
5,25	61,72	0,06	5,65	57,35	0,05	6,05	53,55	0,04
5,26	61,60	0,07	5,66	57,24	0,06	6,06	53,47	0,05
5,27	61,48	0,08	5,67	57,14	0,07	6,07	53,37	0,06
5,28	61,36	0,09	5,68	57,04	0,08	6,08	53,29	0,07
5,29	61,25	0,11	5,69	56,94	0,09	6,09	53,20	0,08
5,30	61,13		5,70	56,84		6,10	53,12	
5,31	61,02	0,01	5,71	56,74	0,01	6,11	53,03	0,01
5,32	60,90	0,02	5,72	56,64	0,02	6,12	52,94	0,02
5,33	60,79	0,03	5,73	56,54	0,03	6,13	52,86	0,02
5,34	60,68	0,04	5,74	56,45	0,04	6,14	52,77	0,03
5,35	60,56	0,06	5,75	56,35	0,05	6,15	52,68	0,04
5,36	60,45	0,07	5,76	56,25	0,06	6,16	52,60	0,05
5,37	60,34	0,08	5,77	56,15	0,07	6,17	52,51	0,06
5,38	60,22	0,09	5,78	56,06	0,08	6,18	52,43	0,07
5,39	60,11	0,10	5,79	55,96	0,09	6,19	52,34	0,08
5,40	60,00		5,80	55,86		6,20	52,26	
5,41	59,89	0,01	5,81	55,76	0,01	6,21	52,17	0,01
5,42	59,78	0,02	5,82	55,67	0,02	6,22	52,09	0,02
5,43	59,67	0,03	5,83	55,57	0,03	6,23	52,01	0,02
5,44	59,56	0,04	5,84	55,48	0,04	6,24	51,92	0,03
5,45	59,45	0,05	5,85	55,38	0,05	6,25	51,84	0,04
5,46	59,34	0,06	5,86	55,29	0,06	6,26	51,76	0,05
5,47	59,23	0,08	5,87	55,20	0,07	6,27	51,68	0,06
5,48	59,12	0,09	5,88	55,10	0,08	6,28	51,59	0,07
5,49	59,02	0,10	5,89	55,01	0,08	6,29	51,51	0,07
5,50	58,91		5,90	54,92		6,30	51,43	
5,51	58,80	0,01	5,91	54,82	0,01	6,31	51,35	0,01
5,52	58,70	0,02	5,92	54,73	0,02	6,32	51,27	0,02
5,53	58,59	0,03	5,93	54,64	0,03	6,33	51,18	0,02
5,54	58,48	0,04	5,94	54,55	0,04	6,34	51,10	0,03
5,55	58,38	0,05	5,95	54,45	0,05	6,35	51,02	0,04
5,56	58,27	0,06	5,96	54,36	0,06	6,36	50,94	0,05
5,57	58,17	0,07	5,97	54,27	0,06	6,37	50,86	0,06
5,58	58,06	0,08	5,98	54,18	0,07	6,38	50,78	0,06
5,59	57,96	0,09	5,99	54,09	0,08	6,39	50,70	0,07

o — u	Distanz.	Prop.-Theile.	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.
6,40	50,62		6,80	47,65		7,20	45,00	
6,41	50,55	0,01	6,81	47,58	0,01	7,21	44,94	0,01
6,42	50,47	0,02	6,82	47,51	0,01	7,22	44,88	0,01
6,43	50,39	0,02	6,83	47,44	0,02	7,23	44,81	0,02
6,44	50,31	0,03	6,84	47,37	0,03	7,24	44,75	0,02
6,45	50,23	0,04	6,85	47,30	0,03	7,25	44,69	0,03
6,46	50,16	0,05	6,86	47,23	0,04	7,26	44,63	0,04
6,47	50,08	0,05	6,87	47,16	0,05	7,27	44,56	0,04
6,48	50,00	0,06	6,88	47,09	0,06	7,28	44,51	0,05
6,49	49,92	0,07	6,89	47,02	0,06	7,29	44,44	0,06
6,50	49,85		6,90	46,96		7,30	44,38	
6,51	49,77	0,01	6,91	46,89	0,01	7,31	44,32	0,01
6,52	49,69	0,02	6,92	46,82	0,01	7,32	44,26	0,01
6,53	49,62	0,02	6,93	46,75	0,02	7,33	44,20	0,02
6,54	49,54	0,03	6,94	46,69	0,03	7,34	44,14	0,02
6,55	49,47	0,04	6,95	46,62	0,03	7,35	44,08	0,03
6,56	49,39	0,04	6,96	46,55	0,04	7,36	44,02	0,04
6,57	49,32	0,05	6,97	46,48	0,05	7,37	43,96	0,04
6,58	49,24	0,06	6,98	46,42	0,05	7,38	43,90	0,05
6,59	49,16	0,07	6,99	46 35	0,06	7,39	43,84	0,05
6,60	49,09		7,00	46,29		7,40	43,78	
6,61	49,02	0,01	7,01	46,22	0,01	7,41	43,72	0,01
6,62	48,94	0,01	7,02	46,15	0,01	7,42	43,67	0,01
6,63	48,87	0,02	7,03	46,09	0,02	7,43	43,61	0,02
6,64	48,79	0,03	7,04	46,02	0,03	7,44	43,55	0,02
6,65	48,72	0,04	7,05	45,96	0,03	7,45	43,49	0,03
6,66	48,65	0,04	7,06	45,89	0,04	7,46	43,43	0,03
6,67	48,58	0,05	7,07	45,84	0,05	7,47	43,37	0,04
6,68	48,50	0,06	7,08	45,76	0,05	7,48	43,32	0,05
6,69	48,43	0,06	7,09	45,70	0,06	7,49	43,25	0,05
6,70	48,36		7,10	45,63		7,50	43,20	
6,71	48,29	0,01	7,11	45,57	0,01	7,51	43,14	0,00
6,72	48,21	0,01	7,12	45,51	0,01	7,52	43,08	0,01
6,73	48,14	0,02	7,13	45,44	0,02	7,53	43,03	0,02
6,74	48,07	0,03	7,14	45,38	0,02	7,54	42,97	0,02
6,75	48,01	0,04	7,15	45,32	0,03	7,55	42,91	0,03
6,76	47,93	0,04	7,16	45,25	0,04	7,56	42,86	0,03
6,77	47,86	0,05	7,17	45,19	0,04	7,57	42,80	0,04
6,78	47,79	0,06	7,18	45,13	0,05	7,58	42,74	0,04
6,79	47,72	0,06	7,19	45,06	0,06	7,59	42,69	0,05

o — u	Distanz.	Prop.-Theile.	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.
7,60	42,63		8,00	40,50		8,40	38,57	
7,61	42,58	0,00	8,01	40,45	0,00	8,41	38,53	0,00
7,62	42,52	0,01	8,02	40,40	0,01	8,42	38,48	0,01
7,63	42,46	0,02	8,03	40,34	0,01	8,43	38,43	0,01
7,64	42,41	0,02	8,04	40,29	0,02	8,44	38,39	0,02
7,65	42,35	0,03	8,05	40,25	0,02	8,45	38,34	0,02
7,66	42,30	0,03	8,06	40,20	0,03	8,46	38,30	0,03
7,67	42,24	0,04	8,07	40,15	0,03	8,47	38,25	0,03
7,68	42,19	0,04	8,08	40,10	0,04	8,48	38,20	0,04
7,69	42,13	0,05	8,09	40,05	0,04	8,49	38,16	0,04
7,70	42,08		8,10	40,00		8,50	38,12	
7,71	42,02	0,00	8,11	39,95	0,00	8,51	38,07	0,00
7,72	41,97	0,01	8,12	39,90	0,01	8,52	38,03	0,01
7,73	41,91	0,02	8,13	39,85	0,01	8,53	37,98	0,01
7,74	41,86	0,02	8,14	39,80	0,02	8,54	37,94	0,02
7,75	41,81	0,03	8,15	39,75	0,02	8,55	37,89	0,02
7,76	41,75	0,03	8,16	39,71	0,03	8,56	37,85	0,03
7,77	41,70	0,04	8,17	39,66	0,03	8,57	37,81	0,03
7,78	41,65	0,04	8,18	39,61	0,04	8,58	37,76	0,04
7,79	41,59	0,05	8,19	39,56	0,04	8,59	37,72	0,04
7,80	41,54		8,20	39,51		8,60	37,68	
7,81	41,48	0,00	8,21	39,46	0,00	8,61	37,63	0,00
7,82	41,43	0,01	8,22	39,42	0,01	8,62	37,59	0,01
7,83	41,38	0,02	8,23	39,37	0,01	8,63	37,54	0,01
7,84	41,33	0,02	8,24	39,32	0,02	8,64	37,50	0,02
7,85	41,27	0,03	8,25	39,27	0,02	8,65	37,46	0,02
7,86	41,22	0,03	8,26	39,23	0,03	8,66	37,41	0,03
7,87	41,17	0,04	8,27	39,18	0,03	8,67	37,37	0,03
7,88	41,12	0,04	8,28	39,13	0,04	8,68	37,33	0,04
7,89	41,06	0,05	8,29	39,08	0,04	8,69	37,28	0,04
7,90	41,01		8,30	39,04		8,70	37,24	
7,91	40,96	0,00	8,31	38,99	0,00	8,71	37,20	0,00
7,92	40,91	0,01	8,32	38,94	0,01	8,72	37,16	0,01
7,93	40,86	0,01	8,33	38,90	0,01	8,73	37,11	0,01
7,94	40,81	0,02	8,34	38,85	0,02	8,74	37,07	0,02
7,95	40,76	0,02	8,35	38,80	0,02	8,75	37,03	0,02
7,96	40,70	0,03	8,36	38,76	0,03	8,76	36,99	0,02
7,97	40,65	0,03	8,37	38,71	0,03	8,77	36,94	0,03
7,98	40,60	0,04	8,38	38,66	0,04	8,78	36,90	0,03
7,99	40,55	0,05	8,39	38,62	0,04	8,79	36,86	0,04

o — u	Distanz.	Prop.-Theile.	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.
8,80	36,82		9,20	35,22		9,60	33,75	
8,81	36,78	0,00	9,21	35,18	0,00	9,61	33,72	0,00
8,82	36,74	0,01	9,22	35,14	0,01	9,62	33,68	0,01
8,83	36,69	0,01	9,23	35,10	0,01	9,63	33,64	0,01
8,84	36,65	0,02	9,24	35,07	0,01	9,64	33,61	0,01
8,85	36,61	0,02	9,25	35,03	0,02	9,65	33,58	0,02
8,86	36,57	0,02	9,26	34,99	0,02	9,66	33,54	0,02
8,87	36,53	0,03	9,27	34,95	0,02	9,67	33,52	0,02
8,88	36,49	0,03	9,28	34,91	0,03	9,68	33,47	0,03
8,89	36,45	0,04	9,29	34,88	0,03	9,69	33,44	0,03
8,90	36,40		9,30	34,84		9,70	33,40	
8,91	36,36	0,00	9,31	34,80	0,00	9,71	33,37	0,00
8,92	36,32	0,01	9,32	34,76	0,01	9,72	33,33	0,01
8,93	36,28	0,01	9,33	34,73	0,01	9,73	33,31	0,01
8,94	36,24	0,02	9,34	34,69	0,01	9,74	33,27	0,01
8,95	36,20	0,02	9,35	34,65	0,02	9,75	33,23	0,02
8,96	36,16	0,02	9,36	34,62	0,02	9,76	33,20	0,02
8,97	36,12	0,03	9,37	34,58	0,02	9,77	33,16	0,02
8,98	36,08	0,03	9,38	34,54	0,03	9,78	33,13	0,03
8,99	36,04	0,04	9,39	34,51	0,03	9,79	33,10	0,03
9,00	36,00		9,40	34,47		9,80	33,06	
9,01	35,96	0,00	9,41	34,43	0,00	9,81	33,03	0,00
9,02	35,92	0,01	9,42	34,40	0,01	9,82	32,99	0,01
9,03	35,88	0,01	9,43	34,36	0,01	9,83	32,96	0,01
9,04	35,84	0,02	9,44	34,32	0,01	9,84	32,93	0,01
9,05	35,80	0,02	9,45	34,29	0,02	9,85	32,89	0,02
9,06	35,76	0,02	9,46	34,25	0,02	9,86	32,86	0,02
9,07	35,72	0,03	9,47	34,21	0,02	9,87	32,83	0,02
9,08	35,68	0,03	9,48	34,18	0,03	9,88	32,79	0,03
9,09	35,64	0,03	9,49	34,15	0,03	9,89	32,76	0,03
9,10	35,60		9,50	34,11		9,90	32,73	
9,11	35,56	0,00	9,51	34,07	0,00	9,91	32,69	0,00
9,12	35,53	0,01	9,52	34,03	0,01	9,92	32,66	0,01
9,13	35,49	0,01	9,53	34,00	0,01	9,93	32,63	0,01
9,14	35,45	0,01	9,54	33,96	0,01	9,94	32,60	0,01
9,15	35,41	0,02	9,55	33,93	0,02	9,95	32,56	0,02
9,16	35,37	0,02	9,56	33,89	0,02	9,96	32,53	0,02
9,17	35,33	0,02	9,57	33,86	0,02	9,97	32,50	0,02
9,18	35,26	0,03	9,58	33,82	0,03	9,98	32,46	0,03
9,19	35,26	0,03	9,59	33,79	0,03	9,99	32,43	0,03

Tafel Nr. V.

Zu Stampfer's Distanzmesser; Werthe von $\frac{0{,}0356\,(o + u - 2m)}{o - u}$.

o — u	o + u — 2m									
	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
1,0	0,14	0,28	0,43	0,57	0,71	0,85	0,00	1,14	1,28	1,42
1,05	0,13	0,26	0,41	0,54	0,68	0,82	0,95	1,09	1,22	1,36
1,1	0,13	0,26	0,39	0,52	0,65	0,78	0,91	1,04	1,17	1,30
1,15	0,12	0,25	0,37	0,50	0,62	0,74	0,87	1,00	1,12	1,24
1,2	0,12	0,24	0,36	0,47	0,59	0,71	0,83	0,95	1,07	1,19
1,25	0,11	0,23	0,34	0,46	0,57	0,68	0,80	0,91	1,03	1,14
1,3	0,11	0,22	0,33	0,44	0,55	0,66	0,77	0,88	0,99	1,10
1,35	0,11	0,21	0,32	0,42	0,53	0,63	0,74	0,84	0,95	1,06
1,4	0,10	0,20	0,31	0,41	0,51	0,61	0,71	0,81	0,92	1,02
1,45	0,10	0,19	0,30	0,39	0,49	0,59	0,69	0,79	0,89	0,98
1,5	0,10	0,19	0,29	0,38	0,47	0,57	0,67	0,76	0,86	0,95
1,6	0,09	0,18	0,27	0,36	0,44	0,53	0,62	0,71	0,80	0,89
1,7	0,08	0,17	0,25	0,34	0,42	0,50	0,59	0,67	0,75	0,84
1,8	0,08	0,16	0,24	0,32	0,40	0,47	0,55	0,63	0,71	0,79
1,9	0,07	0,15	0,22	0,30	0,38	0,45	0,53	0,60	0,67	0,75
2,0	0,07	0,14	0,21	0,28	0,36	0,43	0,50	0,57	0,64	0,71
2,1	0,07	0,13	0,20	0,27	0,34	0,41	0,47	0,55	0,61	0,68
2,2	0,06	0,13	0,19	0,26	0,32	0,39	0,45	0,52	0,58	0,65
2,3	0,06	0,12	0,19	0,25	0,31	0,37	0,43	0,50	0,56	0,62
2,4	0,06	0,12	0,18	0,24	0,30	0,35	0,41	0,47	0,53	0,59
2,6	0,05	0,11	0,16	0,22	0,27	0,33	0,38	0,44	0,49	0,55
2,8	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,36	0,41	0,46	0,51
3,0	0,05	0,09	0,14	0,19	0,24	0,28	0,33	0,38	0,43	0,47
3,5	0,04	0,08	0,12	0,16	0,20	0,24	0,28	0,33	0,37	0,41
4,0	0,04	0,07	0,11	0,14	0,18	0,21	0,25	0,28	0,32	0,36
4,5	0,03	0,06	0,10	0,13	0,16	0,19	0,22	0,25	0,29	0,32
5,0	0,03	0,06	0,09	0,11	0,14	0,17	0,20	0,23	0,26	0,28
6,0	0,02	0,05	0,07	0,09	0,12	0,14	0,17	0,19	0,21	0,24
7,0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20
8,0	0,02	0,04	0,05	0,07	0,09	0,11	0,12	0,14	0,16	0,18
9,0	0,01	0,03	0,05	0,06	0,08	0,09	0,11	0,13	0,14	0,16
10,0	0,01	0,03	0,04	0,06	0,07	0,08	0,10	0,11	0,13	0,14

o − u	o + u − 2m									
	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80
1,0	1,57	1,71	1,85	1,99	2,14	2,28	2,42	2,56	2,70	2,85
1,05	1,50	1,63	1,76	1,90	2,04	2,17	2,31	2.40	2,58	2,72
1,1	1,42	1,55	1,68	1,81	1,94	2,07	2,20	2,33	2,46	2,59
1,15	1,36	1,49	1,60	1,74	1,86	1,98	2,11	2,23	2,36	2,48
1,2	1,31	1,42	1,54	1,66	1,78	1,90	2,02	2,14	2,26	2,37
1,25	1,25	1,37	1,48	1,60	1,71	1,82	1,94	2,05	2,17	2,28
1,3	1,20	1,31	1,42	1,53	1,64	1,75	1,86	1,97	2,08	2,19
1,35	1,16	1,26	1,37	1,48	1,58	1,69	1,79	1,90	2,00	2,11
1,4	1,12	1,22	1,32	1,42	1,52	1,63	1,73	1,83	1,93	2,03
1,45	1,08	1,18	1,28	1,38	1,47	1,57	1,67	1,77	1,87	1,97
1,5	1,04	1,14	1,24	1,33	1,42	1,52	1,61	1,71	1,81	1,90
1,6	0,98	1,07	1,16	1,25	1,33	1,42	1,51	1,60	1,69	1,78
1,7	0,92	1,01	1,09	1,17	1,26	1,34	1,42	1,51	1,59	1,68
1,8	0,87	0,96	1,04	1,11	1,19	1,26	1,34	1,42	1,50	1,58
1,9	0,82	0,90	0,98	1,05	1,12	1,20	1,27	1,35	1,42	1,50
2,0	0,78	0,85	0,92	1,00	1,07	1,14	1,21	1,28	1,35	1,42
2,1	0,75	0,81	0,88	0,95	1,02	1,09	1,15	1,22	1,29	1,35
2,2	0,71	0,78	0,84	0,91	0,97	1,04	1,10	1,17	1,23	1,29
2,3	0,68	0,74	0,80	0,87	0,93	1,00	1,05	1,12	1,18	1,24
2,4	0,65	0,71	0,77	0,83	0,89	0,95	1,01	1,07	1,13	1,19
2,6	0,60	0,66	0,71	0,77	0,82	0,87	0,93	0,99	1,04	1,10
2,8	0,56	0,61	0,66	0,71	0,76	0,81	0,86	0,91	0,97	1,02
3,0	0,52	0,57	0,62	0,66	0,71	0,76	0,81	0,85	0,90	0,95
3,5	0,45	0,49	0,53	0,57	0,61	0,65	0,69	0,73	0,77	0,81
4,0	0,39	0,43	0,46	0,50	0,53	0,57	0,60	0,64	0,68	0,71
4,5	0,35	0,38	0,41	0,44	0,48	0,51	0,54	0,57	0,60	0,63
5,0	0,31	0,34	0,37	0,40	0,43	0,45	0,48	0,51	0,54	0,57
6,0	0,26	0,28	0,31	0,33	0,36	0,38	0,40	0,43	0,45	0,47
7,0	0,22	0,24	0,26	0,28	0,30	0,32	0,34	0,36	0,39	0,41
8,0	0,20	0,21	0,23	0,25	0,27	0,28	0,30	0,32	0,34	0,36
9,0	0,17	0,19	0,21	0,22	0,24	0,25	0,27	0,28	0,30	0,32
10,0	0,16	0,17	0,18	0,20	0,21	0,23	0,24	0,25	0,27	0,28

Tafel Nr. VI.

Zu Stampfer's Distanzmesser; Werthe von $\frac{0{,}0031\ (h - u)^2}{o - u}$.

o — u	o — u									
	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
1,0	0,05	0,11	0,20	0,31	0,45	0,61	0,80	1,00	1,24	1,50
1,05	0,05	0,10	0,19	0,30	0,43	0,58	0,76	0,96	1,18	1,43
1,1	0,05	0,10	0,18	0,28	0,41	0,55	0,72	0,91	1 13	1,36
1,15	0,04	0,10	0,17	0,27	0,39	0,53	0,69	0,87	1,08	1,31
1,2	0,04	0,09	0,16	0,26	0,37	0,51	0,66	0,84	1,03	1,25
1,25	0,04	0,09	0,16	0,25	0,36	1,49	0,64	0,80	1,00	1,20
1,3	0,04	0,09	0,15	0,24	0,34	0,47	0,61	0,77	0,95	1,15
1,35	0,04	0,08	0,15	0,23	0,33	0,45	0,59	0,74	0,92	1,11
1,4	0,04	0,08	0,14	0,22	0,32	0,43	0,57	0,72	0,89	1,07
1,45	0,03	0,08	0,14	0,21	0,31	0,42	0,55	0,69	0,86	1,04
1,5	0,03	0,08	0,13	0,20	0,30	0,40	0,53	0,67	0,83	1,00
1,6	0,03	0,07	0,12	0,19	0,28	0,38	0,50	0,63	0,77	0,94
1,7	0,03	0,07	0,12	0,18	0,26	0,36	0,47	0,59	0,73	0,88
1,8	0,03	0,06	0,11	0,17	0,25	0,34	0,44	0,56	0,69	0,83
1,9	0,03	0,06	0,10	0,16	0,24	0,32	0,42	0,53	0,65	0,79
2,0	0,02	0,06	0,10	0,16	0,22	0,30	0,40	0,50	0,64	0,75
2,1	0,02	0,05	0,09	0,15	0,21	0,29	0,38	0,48	0,59	0,72
2,2	0,02	0,05	0,09	0,14	0,20	0,28	0,36	0,46	0,56	0,68
2,3	0,02	0,05	0,09	0,14	0,19	0,26	0,34	0,44	0,54	0,65
2,4	0,02	0,05	0,08	0,13	0,19	0,25	0,33	0,42	0,52	0,62
2,6	0,02	0,04	0,08	0,12	0,17	0,23	0,30	0,39	0,48	0,58
2,8	0,02	0,04	0,07	0,11	0,16	0,22	0,28	0,36	0,44	0,54
3,0	0,02	0,04	0,07	0,10	0,15	0,20	0,26	0,33	0,41	0,50
3,5	0,01	0,03	0,06	0,09	0,13	0,17	0,23	0,29	0,35	0,43
4,0	0,01	0,03	0,05	0,08	0,11	0,15	0,20	0,24	0,31	0,37
4,5	0,01	0,03	0,04	0,07	0,10	0,13	0,18	0,22	0,28	0,33
5,0	0,01	0,02	0,04	0,06	0,09	0,12	0,16	0,20	0,25	0,30
6,0	0,01	0,02	0,03	0,05	0,07	0,10	0,13	0,17	0,21	0,25
7,0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06	0,09	0,11	0,14	0,18	0,21
8,0	0,01	0,01	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,13	0,16	0,19
9,0	0,01	0,01	0,02	0,03	0,05	0,07	0,09	0,11	0,14	0,17
10,0	0,00	0,01	0,02	0,03	0,05	0,06	0,08	0,10	0,12	0,15

Tafel Nr. VII.

Für den Stromquadranten; Werthe von $\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$.

α	$\log \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$	$\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$	α	$\log \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$	$\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$	α	$\log \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$	$\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$
1° 0'	9,12096	0,1321	8° 0'	9,57390	0,3749	15° 0'	.9,71402	0,5176
10	9,15444	0,1427	10	9,57844	0,3788	10	9,71654	0,6206
20	9,18344	0,1526	20	9,58288	0,3827	20	9,71903	0,5236
30	9,20903	0,1618	30	9,58725	0,3866	30	9,72149	0,5266
40	9,23192	0,1706	40	9,59153	0,3904	40	9,72393	0,5296
50	9,25263	0,1789	50	9,59573	0,3942	50	9,72635	0,5325
2 0	9,27154	0,1869	9 0	9,59985	0,3980	16 0	9,72875	0,5355
10	9,28894	0,1945	10	9,60391	0,4017	10	9,73112	0,5384
20	9,30504	0,2019	20	9,60789	0,4054	20	9,73347	0,5413
30	9,32004	0,2089	30	9,61180	0,4091	30	9,73580	0,5442
40	9,33408	0,2158	40	9,61565	0,4127	40	9,73811	0,5471
50	9,34726	0,2225	50	9,61943	0,4163	50	9,74040	0,5500
3 0	9,35970	0,2289	10 0	9,62316	0,4199	17 0	9,74267	0,5529
10	9,37146	0,2352	10	9,62682	0,4235	10	9,74492	0,5558
20	9,38262	0,2413	20	9,63043	0,4270	20	9,74715	0,5587
30	9,39424	0,2473	30	9,63398	0,4305	30	9,74936	0,5615
40	9,40337	0,2531	40	9,63748	0,4340	40	9,75155	0,5643
50	9,41305	0,2589	50	9,64093	0,4374	50	9,75373	0,5672
4 0	9,42232	0,2644	11 0	9,64432	0,4409	18 0	9,75589	0,5700
10	9,43121	0,2699	10	9,64767	0,4443	10	9,75803	0,5728
20	9,43976	0,2753	20	9,65097	0,4477	20	9,76015	0,5756
30	9,44799	0,2805	30	9,65423	0,4511	30	9,76226	0,5784
40	9,45592	0,2857	40	9,65743	0,4544	40	9,76435	0,5812
50	9,46358	0,2908	50	9,66061	0,4577	50	9,76642	0,5840
5 0	9,47097	0,2958	12 0	9,66373	0,4610	19 0	9,76848	0,5868
10	9,47813	0,3007	10	9,66682	0,4643	10	9,77053	0,5896
20	9,48506	0,3055	20	9,66987	0,4676	20	9,77256	0,5923
30	9,49179	0,3103	30	9,67288	0,4708	30	9,77457	0,5951
40	9,49831	0,3150	40	9,67585	0,4741	40	9,77657	0,5978
50	9,50465	0,3196	50	9,67878	0,4773	50	9,77856	0,6006
6 0	9,51081	0,3242	13 0	9,68168	0,4805	20 0	9,78053	0,6033
10	9,51680	0,3287	10	9,68454	0,4837	10	9,78249	0,6060
20	9,52264	0,3332	20	9,68738	0,4868	20	9,78443	0,6087
30	9,52833	0,3375	30	9,69017	0,4900	30	9,78637	0,6115
40	9,53387	0,3419	40	9,69294	0,4931	40	9,78829	0,6142
50	9,53929	0,3462	50	9,69568	0,4962	50	9,79019	0,6169
7 0	9,54457	0,3504	14 0	9,69838	0,4993	21 0	9,79209	0,6196
10	9,54973	0,3546	10	9,70106	0,5024	10	9,79397	0,6223
20	9,55478	0,3587	20	9,70371	0,5055	20	9,79584	0,6249
30	9,55971	0,3628	30	9,70633	0,5085	30	9,79770	0,6276
40	9,56454	0,3669	40	9,70892	0,5116	40	9,79954	0,6303
50	9,56927	0,3709	50	9,71147	0,5146	50	9,80138	0,6330

α	$\log \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$	$\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$	α	$\log \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$	$\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$	α	$\log \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$	$\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$
22° 0'	9,80320	0,6356	29° 40'	9,87779	0,7547	44° 0'	9,99242	0,9827
10	9,80502	0,6383	50	9,87926	0,7573	30	9,99621	0,9913
20	9,80682	0,6409	30 0	9,88072	0,7598	45 0	0,00000	1,0000
30	9,80861	0,6436	10	9,88217	0,7624	30	0,00379	1,0088
40	9,81039	0,6462	20	9,88362	0,7649	46 0	0,00758	1,0176
50	9,81216	0,6489	30	9,88507	0,7675	30	0,01137	1,0265
23 0	9,81392	0,6515	40	9,88651	0,7700	47 0	0,01517	1,0355
10	9,81567	0,6541	50	9,88795	0,7726	30	0,01897	1,0446
20	9,81742	0,6568	31 0	9,88938	0,7751	48 0	0,02278	1,0539
30	9,81915	0,6594	10	9,89081	0,7777	30	0,02659	1,0631
40	9,82087	0,6620	20	9,89224	0,7803	49 0	0,03042	1,0726
50	9,82258	0,6646	30	9,89366	0,7828	30	0,03425	1,0821
24 0	9,82429	0,6672	40	9,89507	0,7854	50 0	0,03809	1,0917
10	9,82598	0,6698	50	9,89648	0,7879	30	0,04195	1,1014
20	9,82767	0,6725	32 0	9,89789	0,7905	51 0	0,04581	1,1113
30	9,82935	0,6751	10	9,89930	0,7930	30	0,04969	1,1212
40	9,83102	0,6777	20	9,90070	0,7956	52 0	0,05359	1,1313
50	9,83268	0,6803	30	9,90209	0,7982	30	0,05751	1,1415
25 0	9,83433	0,6829	40	9,90348	0,8007	53 0	0,06144	1,1520
10	9,83598	0,6855	50	9,90487	0,8033	30	0,06539	1,1625
20	9,83762	0,6880	33 0	9,90626	0,8059	54 0	0,06937	1,1732
30	9,83925	0,6906	10	9,90764	0,8084	30	0,07336	1,1840
40	9,84087	0,6932	20	9,90901	0,8110	55 0	0,07738	1,1950
50	9,84248	0,6958	30	9,91039	0,8136	30	0,08143	1,2062
26 0	9,84409	0,6984	40	9,91176	0,8161	56 0	0,08550	1,2176
10	9,84569	0,7009	50	9,91313	0,8187	30	6,08961	1,2292
20	9,84728	0,7035	34 0	9,91449	0,8213	57 0	0,09374	1,2409
30	9,84887	0,7061	30	9,91856	0,8290	30	0,09790	1,2529
40	9,85044	0,7087	35 0	9,92261	0,8368	58 0	0,10210	1,2650
50	9,85202	0,7112	30	9,92663	0,8446	30	0,10634	1,2774
27 0	9,85358	0,7138	36 0	9,93063	0,8524	59 0	0,11061	1,2901
10	9,85514	0,7164	30	9,93460	0,8602	30	0,11492	1,3029
20	9,85669	0,7189	37 0	9,93855	0,8681	60 0	0,11928	1,3161
30	9,85824	0,7215	30	9,94249	0,8760	30	0,12368	1,3295
40	9,85977	0,7240	38 0	9,94640	0,8839	61 0	0,12812	1,3431
50	9,86131	0,7266	30	9,95030	0,8919	30	0,13262	1,3571
28 0	9,86283	0,7292	39 0	9,95418	0,8999	62 0	0,13716	1,3714
10	9,86436	0,7317	30	9,95805	0,9079	30	0,14171	1,3858
20	9,86587	0,7343	40 0	9,96190	0,9160	63 0	0,14642	1,4010
30	9,86738	0,7368	30	9,96575	0,9242	30	0,15113	1,4162
40	9,86888	0,7394	41 0	9,96958	0,9323	64 0	0,15591	1,4319
50	9,87038	0,7420	30	9,97340	0,9406	30	0,16075	1,4480
29 0	9,87187	0,7445	42 0	9,97722	0,9489	65 0	0,16566	1,4644
10	9,87336	0,7471	30	9,98102	0,9572	30	0,17065	1,4813
20	9,87484	0,7496	43 0	9,98483	0,9657	66 0	0,17571	1,4987
30	9,87632	0,7522	30	9,98862	0,9741	30	0,18085	1,5165

α	log $\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$	$\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$	α	log $\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$	$\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$	α	log $\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$	$\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$
67° 0	0,18607	1,4349	70° 0	0,21946	1,6575	73° 0	0,25733	1,8086
30	0,19139	1,5538	30	0,22542	1,6804	30	0,26420	1,8373
68 0	0,19679	1,5732	71 0	0,23151	1,7042	74 0	0,27125	1,8675
30	0,20230	1,5933	30	0,23774	1,7288	30	0,27850	1,8989
69 0	0,20791	1,6140	72 0	0,24411	1,7543	75 0	0,28597	1,9318
30	0,21363	1,6354	30	0,25064	1,7809	30	0,29367	1,9664
						76 0	0,30161	2,0027

Tafel Nr. VIII.

Für den Reichenbach'schen Strommesser; Werthe von $\sqrt{h'}$.

h'	log $\sqrt{h'}$	$\sqrt{h'}$	h'	log $\sqrt{h'}$	$\sqrt{h'}$	h'	log $\sqrt{h'}$	$\sqrt{h'}$
0,005'	8,84948	0,0707	0,21	9,66105	0,4582	0,51	9,85382	0,7142
0,010	9,00000	0,1000	0,22	9,67117	0,4690	0,52	9,85799	0,7211
0,015	9,08778	0,1224	0,23	9,68088	0,4796	0,53	9,86213	0,7280
0,020	9,15045	0,1414	0,24	9,69011	0,4899	0,54	9,86617	0,7348
0,025	9,19893	0,1581	0,25	9,69897	0,5000	0,55	9,87017	0,7416
0,030	9,23855	0,1732	0,26	9,70748	0,5099	0,56	9,87407	0,7483
0,035	9,27207	0,1871	0,27	9,71567	0,5196	0,57	9,87789	0,7549
0,040	9,30103	0,2000	0,28	9,72354	0,5291	0,58	9,88167	0,7615
0,045	9,32674	0,2122	0,29	9,73118	0,5385	0,59	9,88542	0,7681
0,050	9,34947	0,2236	0,30	9,73846	0,5476	0,60	9,88908	0,7746
0,055	9,37014	0,2345	0,31	9,74562	0,5567	0,61	9,89265	0,7810
0,060	9,38881	0,2448	0,32	9,75251	0,5656	0,62	9,89619	0,7874
0,065	9,40637	0,2549	0,33	9,75921	0,5744	0,63	9,89933	0,7931
0,070	9,42259	0,2646	0,34	9,76574	0,5831	0,64	9,90309	0,8000
0,075	9,43743	0,2738	0,35	9,77203	0,5916	0,65	9,90644	0,8062
0,080	9,45148	0,2828	0,36	9,77815	0.6000	0,66	9,90977	0,8124
0,085	9,46464	0,2915	0,37	9,78405	0,6082	0,67	9,91302	0,8185
0,090	9,47712	0,3000	0,38	9,78986	0,6164	0,68	9,91624	0,8246
0,095	9,48883	0,3082	0,39	9,79553	0,6245	0,69	9,91939	0,8306
0,10	9,49996	0,3162	0,40	9,80099	0,6324	0,70	9,92252	0,8366
0,11	9,52283	0,3333	0,41	9,80638	0,6403	0,71	9,92562	0,8426
0,12	9,53958	0,3464	0,42	9,81164	0,6481	0,72	9,92865	0,8485
0,13	9,55690	0,3605	0,43	9,81670	0,6557	0,73	9,93166	0,8544
0,14	9,57299	0,3741	0,44	9,82171	0,6633	0,74	9,93460	0,8602
0,15	9,58805	0,3873	0,45	9,82659	0,6708	0,75	9,93752	0,8660
0,16	9,60206	0,4000	0,46	9,83136	0,6782	0,76	9,94037	0,8717
0,17	9,61521	0,4123	0,47	9,83601	0,6855	0,77	9,94325	0,8775
0,18	9,62757	0,4242	0,48	9,84061	0,6928	0,78	9,94606	0,8832
0,19	9,63929	0,4358	0,49	9,84510	0,7000	0,79	9,94880	0,8888
0,20	9,65050	0,4472	0,50	9,84948	0,7071	0,80	9,95153	0,8944

h′	log $\sqrt{h'}$	$\sqrt{h'}$	h′	log $\sqrt{h'}$	$\sqrt{h'}$	h′	log $\sqrt{h'}$	$\sqrt{h'}$
0,82	9,95689	0,9055	0,90	9,97713	0,9487	0,98	9,99559	0,9899
0,84	9,96213	0,9165	0,92	9,98191	0,9592	1,00	10,00000	1,0000
0,86	9,96727	0,9274	0,94	9,98655	0,9695	1,02	10,05045	1,1414
0,88	9,97225	0,9381	0,96	9,99114	0,9798	1,04	10,30103	1,2000

Tafel Nr. IX.

Coordinaten für Kreisbögen; die Tangenten als Abscissen-Axen. [1]

Abscissen.	Ordinaten für einen Halbmesser von									
	100	125	150	175	200	250	300	350	400	450
10	0,51	0,41	0,34	0,29	0,25	0,21	0,17	0,15	0,14	0,12
20	2,02	1,62	1,34	0,15	1,00	0,81	0,67	0,58	0,51	0,45
30	4,61	3,66	3,04	2,59	2,27	1,83	1,51	1,29	1,12	1,11
40	8,35	6,58	5,44	4,64	4,04	3,23	2,68	2,30	2,01	1,78
50	13,40	10,44	8,58	7,30	6,35	5,06	4,20	3,59	3,14	2.79
60	20,00	15,35	12,53	10,61	9,22	7,31	6,07	5,19	4,53	4,02
70	28,59	21,44	17,34	14,61	12,64	10,00	8,29	7,08	6,18	5,48
80	40,00	28,96	23,12	19,36	16,70	13,15	10,87	9,27	8,09	7,17
90	56,41	38,26	30,00	24,92	21,40	16,77	13,82	11,77	10,27	9,10
100	.	50,00	39,80	31,39	26,80	20,87	17,16	14,59	12,71	11,26
110	.	65,63	48,02	38,90	32,97	25,51	20,90	17,74	15,43	13,66
120	.	.	60,00	47,62	40,00	30,69	25,05	21,22	18,43	16,30
130	.	.	.	57,85	48,02	36,46	29,63	25,04	21,72	19,19
140	.	.	.	.	57,17	42,88	34,68	29,22	25,31	22,34
150	.	.	.	.	67,72	50,00	40,20	33,78	29,19	25,74
160	.	.	.	.	80,00	57,91	46,23	38,72	33,39	29,41
170	.	.	.	.	.	66,67	52,82	44,06	37,93	33,35
180	.	.	.	.	.	76,52	60,00	49,84	42,79	37,56
190	.	.	.	.	.	.	67,84	56,07	48,12	42,08
200	.	.	.	.	.	.	76,40	62,78	53,59	46,89
Abscissen.	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950
25	0,63	0,56	0,53	0,48	0,45	0,41	0,39	0,37	0,35	0,33
50	2,51	2,28	2,10	1,93	1,80	1,67	1,56	1,48	1,40	1,32
75	5,68	5,14	4,71	4,34	4,04	3,76	3,53	3,32	3,13	2,97
100	10,11	9,17	8,40	7,74	7,18	6,70	6,28	5,91	5,56	5,29
125	15,96	14,40	13,17	12,14	11,26	10,49	9,83	9,25	8,72	8,26

[1] Es versteht sich wohl von selbst, dass die Halbmesser und Coordinaten in einer und derselben Längeneinheit angegeben sind.

Abscissen.	Ordinaten für einen Halbmesser von									
	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950
150	23,03	20,85	19,05	17,54	16,27	15,16	14,18	13,34	12,58	11,92
175	31,63	28,59	26,10	24,00	22,23	20,70	19,38	18,21	17,18	16,26
200	41,75	37,62	34,33	31,53	29,17	27,16	25,40	23,87	22,52	21,30
225	53,49	48,13	43,79	40,19	37,15	34,55	32,29	30,32	28,58	27,04
250	66,99	60,10	54,56	50,00	46,56	42,90	40,06	37,60	35,42	33,49
275	82,42	73,69	66,73	61,04	56,28	52,24	48,75	45,72	43,05	40,26
300	100,00	89,02	80,39	73,37	67,54	62,62	58,38	54,69	51,48	48,61
325	120,03	106,30	95,65	87,09	80,03	74,08	68,97	64,59	60,74	57,32
350	142,93	125,74	112,68	102,28	93,79	86,68	80,62	75,41	70,87	66,83
375	169,28	147,67	131,63	119,08	108,93	100,48	93,33	87,20	81,85	77,15
400	200,00	172,51	152,78	137,65	125,54	115,57	107,18	100,00	93,77	88,32
425	236,61	200,90	176,48	158,20	143,79	132,04	122,23	113,88	106,67	100,37
450	282,05	233,78	203,14	180,96	163,81	150,00	138,56	128,88	120,58	113,34
475	343,87	272,74	233,43	206,30	185,83	169,59	156,28	145,11	135,56	127,28
500	500,00	320,88	268,34	234,67	210,11	190,98	175,50	162,62	151,66	142,23
525	.	.	.	.	230,56	214,39	196,37	181,52	167,31	158,25
550	.	.	.	.	266,99	240,10	219,06	201,93	187,60	175,40
575	.	.	.	.	.	.	.	.	207,63	193,75
600	.	.	.	.	.	.	.	.	229,17	213,45
625	.	.	.	.	.	.	.	.	.	234,55

Abscissen.	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700	1800	1900
50	1,25	1,14	1,04	0,96	0,89	0,83	0,78	0,73	0,70	0,66
100	5,00	4,55	4,17	3,85	3,58	3,33	3,13	2,94	2,78	2,63
150	11,30	10,28	9,41	8,68	8,06	7,52	7,05	6,63	6,26	5,93
200	20,22	18,33	16,79	15,48	14,36	13,39	12,55	11,80	11,14	10,56
250	31,78	28,79	26,33	24,27	22,50	20,98	19,65	18,48	17,45	16,52
300	46,06	41,70	38,10	35,09	32,52	30,30	28,37	26,68	25,18	23,83
350	63,26	57,17	52,17	48,00	44,45	41,40	38,75	36,42	34,36	32,51
400	83,48	75,31	68,63	63,07	58,36	54,32	50,81	47,73	45,00	42,58
450	106,92	96,26	87,57	80,37	74,29	69,09	64,58	60,64	57,16	54,06
500	133,98	120,20	109,13	100,00	92,33	85,78	80,13	75,19	70,84	66,97
550	164,84	147,30	133,46	122,08	112,56	104,47	97,50	91,43	86,09	81,35
600	200,00	178,04	160,77	146,74	135,09	125,23	116,76	109,40	102,94	97,23
650	240,08	212,59	191,29	174,70	160,04	140,15	137,98	129,17	121,46	114,64
700	.	.	225,32	202,03	187,57	173,35	161,25	150,81	141,69	133,65
750	.	.	.	.	217,84	200,96	186,67	174,38	163,69	154,29
800	.	.	.	.	.	231,14	215,36	200,00	187,55	176,63
850	.	.	.	.	.	.	.	227,76	213,34	200,74
900	.	.	.	.	.	.	.	.	241,15	226,68
950	.	.	.	.	.	.	.	.	.	254,55

Abscissen.	Ordinaten für einen Halbmesser von									
	2000	2100	2200	2300	2400	2500	2600	2700	2800	2900
50	0,62	0,60	0,57	0,54	0,52	0,50	0,48	0,46	0,45	0,43
100	2,50	2,38	2,27	2,18	2,08	2,00	1,93	1,85	1,79	1,73
150	5,63	5,37	5,12	4,90	4,69	4,50	4,33	4,17	4,02	3,88
200	10,03	9,55	9,11	8,71	8,33	8,01	7,71	7,42	7,15	6,90
250	15,69	14,93	14,25	13,63	13,06	12,53	12,05	11,60	11,18	10,80
300	22,63	21,54	20,55	19,65	18,82	18,07	17,37	16,72	16,12	15,56
350	30,86	29,37	28,02	26,79	25,66	24,62	23,67	22,78	21,96	21,20
400	40,41	38,45	36,67	35,05	33,57	32,21	30,95	29,79	28,72	27,72
450	51,28	48,78	46,52	44,45	42,57	40,83	39,24	37,76	36,40	35,13
500	63,51	60,39	57,57	55,01	52,66	50,51	48,53	46,70	45,00	43,43
550	77,11	73,30	69,86	66,72	63,87	61,25	58,84	56,61	54,55	52,63
600	92,12	87,55	83,40	79,64	76,21	73,07	70,12	67,51	65,04	62,75
650	108,57	103,13	98,22	93,76	89,70	85,98	82,56	79,41	76,49	73,78
700	126,50	120,10	114,33	109,11	104,35	100,00	96,00	92,32	88,91	85,75
750	145,95	138,50	131,79	125,72	120,20	115,15	110,52	106,25	102,32	98,63
800	166,97	158,35	150,61	143,61	137,26	131,45	126,14	121,20	116,72	112,50
850	189,61	179,71	170,84	162,83	155,57	148,94	142,87	137,28	132,14	127.37
900	213,94	202,63	192,51	183,30	175,14	167,62	160,74	154,42	148,59	143,19
950	240,03	227,17	215,69	205,36	195,98	187,53	179,77	172,65	166,09	160,02
1000	267,95	253,38	240,41	228,77	218,26	208,71	200,00	192,01	184,66	177,87
1050	297,80	281,35	266,74	253,66	241,88	231,19	221,45	212,53	204,33	196,76
1100	.	.	294,74	280,10	266,93	255,01	244,16	234,23	225,15	216,72
1150	.	.	.	.	293,46	280,20	268,15	257,15	247,06	237,76
1200	.	.	.	.	.	.	293,49	281,32	270,18	259,92

Abscissen.	3000	3100	3200	3300	3400	3500	3600	3700	3800	3900
50	0,42	0,40	0,39	0,38	0,37	0,36	0,35	0,34	0,33	0,32
100	1,67	1,61	1,56	1,52	1,47	1,43	1,39	1,35	1,32	1,28
150	3,77	3,63	3,52	3,41	3,31	3,22	3.13	3,04	2,96	2,89
200	6,67	6,46	6,26	6,07	5,89	5,72	5,56	5,41	5,26	5,13
250	10,43	10,10	9,78	9,48	9,20	8,94	8,69	8,46	8,23	8,02
300	14,83	14,20	14,09	13,66	13,26	12,88	12,52	12,18	11,87	11,56
350	20,49	19,82	19,20	18,99	18,06	17,55	17,05	16,59	16,15	15,75
400	26,79	25,92	25,10	24,33	23,61	22,93	22,29	21,68	21,11	20,57
450	33,94	32,83	31,80	30,83	29,91	29,05	28,24	27,47	26,74	26,05
500	71,96	40,59	39,30	38,10	36,97	35,90	34,89	33,94	33,04	32,18
550	50,85	49,18	47,62	46,16	44,78	43,49	42,26	41,11	40,01	38,91
600	60,61	58,62	56,75	55,00	53,36	51,81	50,35	48,97	47,67	46,43
650	71,26	68,91	66,71	64,65	62,71	60,89	59,17	57,54	56,00	54,55
700	82,81	80,07	77,50	75,10	72,81	70,71	68,71	66,82	65,03	63,33
750	95,26	92,09	89,13	86,36	83,75	81,30	78,99	76,81	74,75	72,80

Abscissen.	Ordinaten für einen Halbmesser von									
	3000	3100	3200	3300	3400	3500	3600	3700	3800	3900
800	108,63	105,00	101,61	98,44	95,46	92,80	90,01	87,52	85,14	82,93
850	122,94	118,81	114,96	111,35	107,96	104,78	101,79	98,96	96,29	93,76
900	138,18	133,52	129,17	125,10	121,28	117,69	114,31	111,13	108,12	105,27
950	154,72	149,15	144,27	139,70	135,42	131,39	127,61	124,04	120,67	117,48
1000	171,57	165,72	160,26	155,16	150,38	145,90	141,68	137,70	133,94	130,39
1050	189,75	183,24	177,17	171,50	166,20	161,21	156,53	152,11	147,95	144,00
1100	208,94	201,73	195,00	188,73	182,86	177,85	172,17	167,30	162,69	158,34
1150	229,20	221,20	213,78	206,86	200,39	194,32	188,62	183,25	178,19	173,40
1200	250,45	241,68	233,52	225,92	218,80	212,14	205,89	200,00	194,45	189,17
1250	272,82	263,19	254,24	245,90	238,12	230,83	223,98	217,45	211.48	205,75
1300	.	.	275,96	266,85	258,34	250,39	242,92	235,70	229,29	223,05
1350	.	.	298,71	288,77	279,50	270,84	262,71	255,08	247,89	241,11
1400	.	.	322,50	311,69	301,61	292,20	283,38	275,10	267,30	259,95
1450	.	.	.	.	.	.	.	.	287,52	262,86
1500	.	.	.	.	.	.	.	.	308,58	299,96

Abscissen.	4000	4100	4200	4300	4400	4500	4600	4700	4800	4900
50	0,31	0,31	0,30	0,29	0,28	0,28	0,27	0,27	0,26	0,26
100	1,25	1,22	1,19	1,16	1,14	1,11	1,09	1,06	1,04	1,02
150	2,81	2,75	2,68	2,62	2,56	2,50	2,43	2,40	2,34	2,30
200	5,00	4,88	4,77	4,65	4,55	4,45	4,36	4,26	4,16	4,08
250	7,82	7,63	7,45	7,27	7,11	6,95	6,80	6,65	6,51	6,38
300	11,27	10,99	10,73	10,48	10,24	10,01	9,79	9,59	9,39	9,19
350	15,34	14,97	14,61	14,27	13,94	13,63	13,33	13,05	12,78	12,52
400	20,05	19,56	19,09	18,65	18,22	17,81	17,42	17,05	16,70	16,35
450	25,39	24,77	24,18	23,61	23,07	22,56	22,06	21,59	21,14	20,71
500	31,36	30,60	29,92	29,19	28,50	27,86	27,26	26,67	26,11	25,58
550	37,99	37,06	36,17	35,32	34,51	33,74	33,00	32,29	31,61	30,97
600	45,26	44,14	43,08	42,07	41,10	40,18	39,30	38,45	37,65	36,87
650	53,17	51,85	50,60	49,41	48,28	47,19	46,16	45,16	44,21	43,30
700	61,73	60,20	58,84	57,36	56,04	54,78	53,57	52,42	51,32	50,26
750	70,94	69,18	67,51	65,91	64,39	62,94	61,55	60,23	58,97	57,74
800	80,82	78,81	76,90	75,07	73,34	71,68	70,10	68,59	67,14	65,75
850	91,36	89,09	86,91	84,85	82,88	81,01	79,22	77,50	75,86	74,29
900	102,56	100,00	97,56	95,24	93,04	90,92	88,90	86,98	85,13	83,36
950	114,45	111,58	108,85	106,26	103,78	101,45	99,17	97,01	94,95	92,97
1000	127,02	123,82	120,79	117,90	115,14	112,52	110,01	107,62	105,32	103,12
1050	140,27	136,73	133,37	130,17	127,10	124,21	121,44	118,79	116,25	113,82
1100	154,22	150,32	146,67	143,08	139,71	136,51	133,46	130,54	127,74	125,07
1150	168,33	164,58	160,51	156,63	152,94	149,42	146,07	142,86	139,80	136,86

Abscissen.	Ordinaten für einen Halbmesser von									
	4000	4100	4200	4300	4400	4500	4600	4700	4800	4900
1200	184,25	179,54	175,08	170,85	166,80	162,93	159,28	155,77	152,42	149,22
1250	200,33	195,20	190,32	185,70	181,29	177,10	173,09	169,27	165,62	162,12
1300	217,15	211,56	206,25	201,22	196,43	191,87	187,57	183,36	179,40	175,60
1350	235,70	228,63	222,88	217,41	212,22	207,27	202,56	198,06	193,75	189,64
1400	253,00	246,43	240,20	234,29	228,67	223,32	218,22	213,35	208,70	204,26
1450	272,07	264,96	258,24	251,85	245,79	240,01	234,51	229,26	224,25	219,45
1500	291,90	284,24	276,99	270,11	263,58	257,36	251,44	245,79	240,40	235,24
1550	312,52	304,28	296,48	289,08	282,05	275,37	269,01	262,94	257,15	251,61
1600	333,94	325,08	316,70	308,76	301,22	294,05	287,23	280,72	274,52	273,92

Abscissen.	5000	5100	5200	5300	5400	5500	5600	5700	5800	5900
50	0,25	0,25	0,24	0,24	0,23	0,23	0,22	0,22	0,21	0,21
100	1,00	0,98	0,96	0,94	0,93	0,91	0,89	0,88	0,86	0,85
150	2,25	2,21	2,16	2,12	2,08	2,05	2,01	1,97	1,94	1,91
200	4,00	3,92	3,85	3,78	3,71	3,65	3,57	3,51	3,45	3,39
250	6,25	6,13	6,01	5,90	5,79	5,69	5,58	5,47	5,39	5,30
300	9,01	8,83	8,66	8,50	8,34	8,19	8,04	7,90	7,76	7,64
350	12,26	12,03	11,79	11,57	11,35	11,15	10,95	10,76	10,57	10,39
400	16,12	15,71	15,39	15,12	14,84	14,57	14,30	14,06	13,81	13,58
450	20,29	19,89	19,31	19,14	18,78	18,44	18,11	17,79	17,48	17,19
500	25,06	24,57	24,09	23,64	23,20	22,74	22,37	21,97	21,59	21,22
550	30,34	29,76	29,17	28,62	28,08	27,57	27,08	26,60	26,14	25,69
600	36,13	35,42	34,73	34,07	33,44	32,83	32,24	31,67	31,12	30,59
650	42,43	41,59	40,79	40,01	39,26	38,56	37,85	37,18	36,54	35,91
700	49,24	48,27	47,33	46,43	45,56	44,73	43,92	43,15	42,40	41,67
750	56,57	55,45	54,37	53,34	52,34	51,38	50,45	49,56	48,70	47,86
800	64.42	63,14	61,89	60,73	59,59	58,49	57,44	56,42	55,44	54,49
850	72,78	71,33	69,94	68,60	67,32	66,08	64,89	63,73	62,62	61,55
900	81,67	80,03	78,48	76,97	75,53	74,14	72,80	71,50	70,26	69,05
950	91,08	89,26	87,49	85,84	84,22	82,67	81,17	79,73	78,33	76,99
1000	101,02	99,00	97,06	95,19	93,40	91,67	90,01	88,40	86,96	85,36
1050	111,49	109,25	107,11	105,05	103,07	101,12	99,32	97,55	95,83	94,19
1100	122,50	120,04	117,68	115,41	112,22	111,12	109,10	107,15	105,27	103,45
1150	134,07	131,35	128,71	126,27	123,88	121,57	119,35	117,21	115,15	113,16
1200	146,14	143,19	140,36	137,60	135,02	132,51	130,08	127,75	125,50	123,32
1250	158,77	155,56	152,48	149,62	146,91	143,93	141,29	138,75	136,30	133,94
1300	171,96	168,47	165,12	161,89	158,79	155,85	152,98	150,23	147,57	145,00
1350	185,90	181,92	178,20	174,82	171,47	168,26	165,16	162,18	159,30	156,53
1400	200,00	195,92	191,99	188,25	184,64	181,17	177,84	174,60	171,50	168,51
1450	214,87	210,47	206,25	202,21	198,32	194,58	190,86	187,51	184,17	180,96

Abscissen.	Ordinaten für einen Halbmesser von									
	5000	5100	5200	5300	5400	5500	5600	5700	5800	5900
1500	230,30	225,58	221,04	216,69	212,51	208,51	204,63	200,91	197,32	193,86
1550	246,36	241,25	236,39	231,72	227,24	222,93	218,78	214,79	210,95	207,24
1600	262,91	257,48	252,28	247,28	242,48	237,87	233,44	229,17	225,06	221,09
1650	280,10	274,29	268,73	263,38	258,26	253,34	248,50	244,04	239,65	235,42
1700	297,88	291,68	285,74	280,04	274,58	269,32	264,37	259,41	254,73	250,22

Abscissen.	6000	6100	6200	6300	6400	6500	6600	6700	6800	6900
50	0,21	0,21	0,20	0,20	0,20	0,19	0,19	0,19	0,18	0,18
100	0,83	0,82	0,81	0,79	0,78	0,77	0,76	0,75	0,74	0,73
150	1,88	1,84	1,82	1,79	1,76	1,73	1,71	1,68	1,65	1,63
200	3,33	3,28	3,23	3,18	3,13	3,08	3,03	2,99	2,94	2,90
250	5,21	5,13	5,04	4,96	4,89	4,81	4,74	4,67	4.60	4,53
300	7,50	7,38	7,26	7,15	7,03	6,93	6,82	6,72	6,70	6,53
350	10,22	10,05	9,89	9,73	9,58	9,44	9,29	9,15	9,01	8,88
400	13,35	13,13	12,92	12,71	12,51	12,42	12,13	11,95	11,78	11,60
450	16,90	16,62	16,35	16,09	15,84	15,60	15,36	15,13	14,91	14,69
500	20,87	20,53	20,19	19,87	19,56	19,26	18,97	18,68	18,41	18,14
550	25,26	24,85	24,44	24,05	23,68	23,31	22,96	22,61	22,28	21,96
600	30,08	29,58	29,10	28,64	28,19	27,75	27,33	26,82	26,52	26,14
650	35,31	34,73	34,17	33,62	33,09	32,58	32,09	31,60	31,14	30,68
700	40,97	40,30	39,64	39,01	38,40	37,80	37,23	36,67	36,13	35,60
750	47,06	46,28	45,53	44,80	44,10	43,41	42,75	42,11	41,49	40,88
800	53,57	52,69	51,84	51,00	50,20	49,42	48,67	47,78	47,22	46,54
850	60,51	59,51	58,54	57,61	56,70	55,82	54,97	54,14	53,33	52,56
900	67,89	66,76	65,66	64,62	63,60	62,61	61,65	60,72	59,82	58,95
950	75,66	74,43	73,21	72,04	70,90	69,80	68,73	67,69	66,69	65,71
1000	83,92	82,53	81,18	79,87	78,61	77,38	76,20	75,05	73,93	72,85
1050	92,59	91,05	89,56	88,12	86,72	85,52	84,06	82,79	81,56	80,36
1100	101,78	100,00	98,36	96,78	95,24	93,75	92,31	90,91	89,71	88,23
1150	111,24	109,38	107,59	105,85	104,17	102,54	100,95	99,43	97,95	96,51
1200	121,23	119,20	117,24	115,34	113,51	111,73	110,16	108,34	106,72	105,15
1250	131,65	129,45	127,32	125,25	123,26	121,32	119,45	117,64	115,88	114,17
1300	142,53	140,14	137,82	135,57	133,42	131,33	129,30	127,33	125,42	123,57
1350	153,85	151,26	148,76	146,34	144,00	141,74	139,54	137,42	135,36	133,36
1400	165,61	162,83	160,13	157,53	155,00	152,56	150,19	147,90	145,68	143,52
1450	177,85	174,84	171,94	169,14	166,22	163,70	161,25	158,78	156,40	154,08
1500	190,52	187,30	184,19	181,18	178,26	175,45	172,71	170,07	167,50	165,02
1550	203,67	200,21	196,88	193,65	190,53	187,51	184,59	181,76	179,01	176,35
1600	217,27	213,58	210,01	206,56	203,23	200,00	196,88	193,85	190,91	188,08
1650	231,73	227,39	223,59	219,91	216,35	212,91	209,58	206,35	203,22	200,19
1700	245,87	241,67	237,62	233,70	229,89	226,25	222,70	219,26	215,93	212,70

Abscissen	Ordinaten für einen Halbmesser von				Abscissen.	Ordinaten für einen Halbmesser von			
	7000	8000	9000	10000		7000	8000	9000	10000
50	0,18	0,16	0,14	0,12	1050	79,20	69,21	61,46	55,28
100	0,72	0,63	0,56	0,50	1100	87,00	75,99	67,48	60,68
150	1,61	1,41	1,25	1,13	1150	95,11	83,09	73,78	66,35
200	2,86	2,50	2,22	2,00	1200	103,62	90,50	80,36	72,26
250	4,47	3,91	3,47	3,13	1250	112,51	98,26	87,23	78,43
300	6,43	5,63	5,00	4,50	1300	121,77	106,24	94,39	84,86
350	8,76	7,58	6,81	6,13	1350	131,42	114,73	101,83	91,54
400	11,44	9,09	8,89	8,00	1400	141,43	123,45	109,56	98,58
450	14,48	12,67	11,26	10,13	1450	151,83	132,51	117,57	105,68
500	17,88	15,64	13,90	12,51	1500	162,60	141,88	125,88	113,14
550	21,64	18,93	16,82	15,14	1550	173,76	151,59	134,48	120,86
600	25,76	22,53	20,02	18,01	1600	185,31	161,63	143,36	128,83
650	30,25	26,45	23,50	21,15	1650	197,23	172,01	152,55	137,06
700	35,09	30,68	27,26	24,53	1700	209,57	182,71	162,01	145,56
750	40,30	35,24	31,31	28,17	1750	222,28	193,75	171,78	154,32
800	45,87	40,01	35,63	32,05	1800	235,39	205,13	181,84	163,33
850	51,80	45,28	40,23	36,19	1850	248,89	216,85	192,19	172,61
900	58,10	50,79	45,11	40,58	1900	262,79	228,90	202,84	182,16
950	64,76	56,61	50,07	45,23	1950	277,09	241,30	213,79	191,97
1000	71,80	62,75	55,73	50,13	2000	291,80	254,03	225,04	202,04

Tafel Nr. X.

Ordinaten für Kreisbögen; die Sehnen als Abscissen-Axen.

Bogenlänge = 50 Einheiten.

Halb-messer.	Ordinate		Halb-messer.	Ordinate		Halb-messer.	Ordinate	
	zu 1/2 b	zu 1/4 b		zu 1/2 b	zu 1/4 b		zu 1/2 b	zu 1/4 b
1000	0,31	0,24	1200	0,26	0,19	1400	0,22	0,17
20	0,31	0,23	20	0,26	0,19	20	0,22	0,17
40	0,30	0,22	40	0,25	0,19	40	0,22	0,16
60	0,29	0,22	60	0,25	0,18	60	0,22	0,16
80	0,29	0,22	80	0,25	0,18	80	0,21	0,16
1100	0,28	0,21	1300	0,24	0,18	1500	0,21	0,16
20	0,28	0,21	20	0,24	0,18	20	0,21	0,16
40	0,28	0,21	40	0,23	0,18	40	0,20	0,15
60	0,27	0,20	60	0,23	0,17	60	0,20	0,15
80	0,27	0,20	80	0,23	0,17	80	0,20	0,15

Halb-messer.	Ordinate		Halb-messer.	Ordinate		Halb-messer.	Ordinate	
	zu $^{1}/_{2}$ b	zu $^{1}/_{4}$ b		zu $^{1}/_{2}$ b	zu $^{1}/_{4}$ b		zu $^{1}/_{2}$ b	zu $^{1}/_{4}$ b
1600	0,19	0,15	2400	0,13	0,10	3200	0,10	0,05
20	0,19	0,15	20	0,13	0,10	20	0,10	0,05
40	0,19	0,14	40	0,13	0,10	40	0,10	0,05
60	0,19	0,14	60	0,13	0,10	60	0,10	0,05
80	0,18	0,14	80	0,13	0,09	80	0,09	0,05
1700	0,18	0,14	2500	0,13	0,09	3300	0,09	0,05
20	0,18	0,14	20	0,12	0,09	20	0,09	0,05
40	0,18	0,14	40	0,12	0,09	40	0,09	0,05
60	0,18	0,13	60	0,12	0,09	60	0,09	0,05
80	0,18	0,13	80	0,12	0,09	80	0,09	0,05
1800	0,17	0,13	2600	0,12	0,09	3400	0,09	0,05
20	0,17	0,13	20	0,12	0,09	20	0,09	0,04
40	0,17	0,13	40	0,12	0,09	40	0,09	0,04
60	0,17	0,13	60	0,12	0,09	60	0,09	0,04
80	0,17	0,13	80	0,12	0,09	80	0,09	0,04
1900	0,17	0,12	2700	0,12	0,09	3500	0,09	0,04
20	0,17	0,12	20	0,12	0,09	20	0,09	0,04
40	0,16	0,12	40	0,11	0,09	40	0,09	0,04
60	0,16	0,12	60	0,11	0,08	60	0,09	0,04
80	0,16	0,12	80	0,11	0,08	80	0,09	0,04
2000	0,16	0,12	2800	0,11	0,08	3600	0,09	0,04
20	0,16	0,12	20	0,11	0,07	20	0,09	0,04
40	0,16	0,12	40	0,11	0,07	40	0,09	0,04
60	0,15	0,12	60	0,11	0,07	60	0,09	0,04
80	0,15	0,11	80	0,11	0,07	80	0,09	0,04
2100	0,15	0,11	2900	0,11	0,07	3700	0,09	0,04
20	0,15	0,11	20	0,11	0,07	20	0,08	0,04
40	0,15	0,11	40	0,11	0,07	40	0,08	0,04
60	0,15	0,11	60	0,11	0,07	60	0,08	0,03
80	0,14	0,11	80	0,10	0,07	80	0,08	0,03
2200	0,14	0,11	3000	0,10	0,06	3800	0,08	0,03
20	0,14	0,11	20	0,10	0,06	20	0,08	0,03
40	0,14	0,11	40	0,10	0,06	40	0,08	0,03
60	0,14	0,11	60	0,10	0,06	60	0,08	0,03
80	0,14	0,10	80	0,10	0,06	80	0,08	0,03
2300	0,14	0,10	3100	0,10	0,06	3900	0,08	0,03
20	0,13	0,10	20	0,10	0,06	20	0,08	0,03
40	0,13	0,10	40	0,10	0,06	40	0,08	0,03
60	0,13	0,10	60	0,10	0,06	60	0,08	0,03
80	0,13	0,10	80	0,10	0,06	80	0,08	0,03
						4000	0,08	0,03

2. Bogenlänge = 100 Einheiten.

Halbmesser.	Ordinate zu 1/2 b	Ordinate zu 1/4 b	Halbmesser.	Ordinate zu 1/2 b	Ordinate zu 1/4 b	Halbmesser.	Ordinate zu 1/2 b	Ordinate zu 1/4 b
1000	1,25	0,94	1800	0,69	0,52	2600	0,48	0,36
20	1,22	0,92	20	0,69	0,52	20	0,48	0,36
40	1,20	0,90	40	0,68	0,51	40	0,47	0,36
60	1,18	0,88	60	0,67	0,51	60	0,47	0,35
80	1,16	0,87	80	0,67	0,50	80	0,47	0,35
1100	1,14	0,85	1900	0,66	0,49	2700	0,46	0,35
20	1,12	0,84	20	0,65	0,49	20	0,46	0,35
40	1,10	0,82	40	0,65	0,48	40	0,46	0,34
60	1,08	0,81	60	0,64	0,48	60	0,45	0,34
80	1,06	0,79	80	0,63	0,47	80	0,45	0,34
1200	1,04	0,78	2000	0,63	0,47	2800	0,45	0,34
20	1,02	0,77	20	0,62	0,47	20	0,44	0,33
40	1,01	0,76	40	0,61	0,46	40	0,44	0,33
60	0,99	0,74	60	0,61	0,46	60	0,44	0,33
80	0,98	0,73	80	0,60	0,45	80	0,43	0,33
1300	0,96	0,72	2100	0,60	0,45	2900	0,43	0,32
20	0,95	0,71	20	0,59	0,44	20	0,43	0,32
40	0,93	0,70	40	0,58	0,44	40	0,43	0,32
60	0,92	0,69	60	0,58	0,43	60	0,42	0,32
80	0,91	0,68	80	0,57	0,43	80	0,42	0,31
1400	0,89	0,67	2200	0,57	0,43	3000	0,42	0,31
20	0,88	0,66	20	0,56	0,42	20	0,41	0,31
40	0,87	0,65	40	0,56	0,42	40	0,41	0,31
60	0,86	0,64	60	0,55	0,42	60	0,41	0,31
80	0,85	0,63	80	0,55	0,41	80	0,40	0,30
1500	0,83	0,62	2300	0,54	0,41	3100	0,40	0,30
20	0,82	0,62	20	0,54	0,40	20	0,40	0,30
40	0,81	0,61	40	0,53	0,40	40	0,40	0,30
60	0,80	0,60	60	0,53	0,40	60	0,39	0,30
80	0,79	0,59	80	0,52	0,39	80	0,39	0,29
1600	0,78	0,58	2400	0,52	0,39	3200	0,39	0,29
20	0,77	0,58	20	0,52	0,39	20	0,39	0,29
40	0,76	0,57	40	0,51	0,38	40	0,39	0,29
60	0,75	0,56	60	0,51	0,38	60	0,38	0,29
80	0,74	0,56	80	0,50	0,38	80	0,38	0,29
1700	0,73	0,55	2500	0,50	0,37	3300	0,38	0,28
20	0,73	0,54	20	0,50	0,37	20	0,38	0,28
40	0,72	0,54	40	0,49	0,37	40	0,38	0,28
60	0,71	0,53	60	0,49	0,37	60	0,37	0,28
80	0,70	0,53	80	0,48	0,36	80	0,37	0,28

Halbmesser.	Ordinate		Halbmesser.	Ordinate		Halbmesser.	Ordinate	
	zu ½ b	zu ¼ b		zu ½ b	zu ¼ b		zu ½ b	zu ¼ b
3400	0,37	0,28	4200	0,30	0,22	5000	0,25	0,19
20	0,37	0,28	20	0,30	0,22	20	0,25	0,19
40	0,36	0,27	40	0,30	0,22	40	0,25	0,19
60	0,36	0,27	60	0,29	0,22	60	0,25	0,19
80	0,36	0,27	80	0,29	0,22	80	0,25	0,19
3500	0,36	0,27	4300	0,29	0,22	5100	0,25	0,19
20	0,36	0,27	20	0,29	0,22	20	0,24	0,18
40	0,36	0,27	40	0,29	0,22	40	0,24	0,18
60	0,35	0,27	60	0,29	0,22	60	0,24	0,18
80	0,35	0,26	80	0,28	0,21	80	0,24	0,18
3600	0,35	0,26	4400	0,28	0,21	5200	0,24	0,18
20	0,35	0,26	20	0,28	0,21	20	0,24	0,18
40	0,34	0,26	40	0,28	0,21	40	0,24	0,18
60	0,34	0,26	60	0,28	0,21	60	0,24	0,18
80	0,34	0,26	80	0,28	0,21	80	0,24	0,18
3700	0,34	0,25	4500	0,28	0,21	5300	0,24	0,18
20	0,34	0,25	20	0,28	0,21	20	0,23	0,18
40	0,33	0,25	40	0,28	0,21	40	0,23	0,18
60	0,33	0,25	60	0,27	0,21	60	0,23	0,18
80	0,33	0,25	80	0,27	0,20	80	0,23	0,17
3800	0,33	0,25	4600	0,27	0,20	5400	0,23	0,17
20	0,33	0,25	20	0,27	0,20	20	0,23	0,17
40	0,33	0,24	40	0,27	0,20	40	0,23	0,17
60	0,32	0,24	60	0,27	0,20	60	0,23	0,17
80	0,32	0,24	80	0,27	0,20	80	0,23	0,17
3900	0,32	0,24	4700	0,27	0,20	5500	0,23	0,17
20	0,32	0,24	20	0,26	0,20	20	0,23	0,17
40	0,32	0,24	40	0,26	0,20	40	0,23	0,17
60	0,31	0,24	60	0,26	0,20	60	0,22	0,17
80	0,31	0,24	80	0,26	0,20	80	0,22	0,17
4000	0,31	0,23	4800	0,26	0,20	5600	0,22	0,17
20	0,31	0,23	20	0,26	0,20	20	0,22	0,17
40	0,31	0,23	40	0,26	0,20	40	0,22	0,17
60	0,31	0,23	60	0,26	0,19	60	0,22	0,17
80	0,31	0,23	80	0,26	0,19	80	0,22	0,17
4100	0,31	0,23	4900	0,26	0,19	5700	0,22	0,17
20	0,30	0,23	20	0,25	0,19	20	0,22	0,16
40	0,30	0,23	40	0,25	0,19	40	0,22	0,16
60	0,30	0,23	60	0,25	0,19	60	0,22	0,16
80	0,30	0,23	80	0,25	0,19	80	0,22	0,16
						5800	0,22	0,16

Tafel Nr. XI.

Correspondirende geographische Breiten.

Geographische Breite.		Geographische Breite.		Geographische Breite.	
Kugel.	Ellipsoïd.	Kugel.	Ellipsoïd.	Kugel.	Ellipsoïd.
46° 40′	46° 41′ 24″,75	47° 58′	47° 59′ 34″,84	49° 16′	49° 17′ 43″,88
42	43 25,02	48 0	48 1 35,09	18	19 44,09
44	45 25,29	2	3 35,33	20	21 44,31
46	47 25,56	4	5 35,58	22	23 44,53
48	49 25,83	6	7 35,82	24	25 44,74
50	51 26,10	8	9 36,06	26	27 44,96
52	53 26,37	10	11 36,30	28	29 45,17
54	55 26,64	12	13 36,54	30	31 45,39
56	57 26,91	14	15 36,78	32	33 45,60
58	59 27,17	16	17 37,02	34	35 45,81
47 0	47 1 27,44	18	19 37,26	36	37 46,02
2	3 27,70	20	21 37,50	38	39 46,23
4	5 27,97	22	23 37,74	40	41 46,44
6	7 28,23	24	25 37,97	42	43 46,65
8	9 28,49	26	27 38,21	44	45 46,86
10	11 28,76	28	29 38,44	46	47 47,07
12	13 29,02	30	31 38,68	48	49 47,28
14	15 29,28	32	33 38,91	50	51 47,48
16	17 29,54	34	35 39,14	52	53 47,69
18	19 29,80	36	37 39,38	54	55 47,89
20	21 30,06	38	39 39,61	56	57 48,10
22	23 30,32	40	41 39,84	58	59 48,30
24	25 30,57	42	43 40,07	50 0	50 1 48,51
26	27 30,83	44	45 40,30	2	3 48,71
28	29 31,09	46	47 40,53	4	5 48,91
30	31 31,34	48	49 40,76	6	7 49,11
32	33 31,60	50	51 40,98	8	9 49,31
34	35 31,85	52	53 41,21	10	11 49,51
36	37 32,10	54	55 41,44	12	13 49,71
38	39 32,36	56	57 41,66	14	15 49,91
40	41 32,61	58	59 41,89	16	17 50,11
42	43 32,86	49 0	49 1 42,11	18	19 50,31
44	45 33,11	2	3 42,33	20	21 50,50
46	47 33,36	4	5 42,56	22	23 50,70
48	49 33,61	6	7 42,78	24	25 50,90
50	51 33,86	8	9 43,00	26	27 51,09
52	53 34,10	10	11 43,22	28	29 51,28
54	55 34,35	12	13 43,44	30	31 51,47
56	57 34,60	14	15 43,66	32	33 61,66

Geographische Breite		Geographische Breite.		Geographische Breite.	
Kugel.	Ellipsoïd.	Kugel.	Ellipsoïd.	Kugel.	Ellipsoïd.
50° 34′	50° 35′ 51″,86	52° 2′	52° 3′ 59″,60	53° 30′	53° 32′ 6″,02
36	37 52,04	4	5 59,76	32	34 6,15
38	39 52,23	6	7 59,92	34	36 6,28
40	41 52,43	8	10 0,08	36	38 6,41
42	43 52,61	10	12 0,24	38	40 6,54
44	45 52,80	12	14 0,39	40	42 6,66
46	47 52,99	14	16 0,55	42	44 6,79
48	49 53,18	16	18 0,71	44	46 6,92
50	51 53,36	18	20 0,86	46	48 7,04
52	53 53,55	20	22 1,02	48	50 7,17
54	55 53,73	22	24 1,17	50	52 7,29
56	57 53,92	24	26 1,33	52	54 7,42
58	59 54,10	26	28 1,48	54	56 7,54
51 0	51 1 54,28	28	30 1,63	56	58 7,66
2	3 54,46	30	32 1,78	58	54 0 7,79
4	5 54,64	32	34 1,93	54 0	2 7,91
6	7 54,82	34	36 2,08	2	4 8,03
8	9 55,00	36	38 2,23	4	6 8,15
10	11 55,18	38	40 2,38	6	8 8,27
12	13 55,36	40	42 2,53	8	10 8,39
14	15 55,54	42	44 2,68	10	12 8,51
16	17 55,72	44	46 2,83	12	14 8,62
18	19 55,90	46	48 2,97	14	16 8,74
20	21 56,07	48	50 3,12	16	18 8,86
22	23 56,24	50	52 3,26	18	20 8,97
24	25 56,42	52	54 3,41	20	22 9,09
26	27 56,59	54	56 3,55	22	24 9,20
28	29 56,76	56	58 3,69	24	26 9,31
30	31 56,94	58	53 0 3,84	26	28 9,43
32	33 57,11	53 0	2 3,98	28	30 9,54
34	35 57,28	2	4 4,12	30	32 9,65
36	37 57,45	4	6 4,26	32	34 9,76
38	39 57,62	6	8 4,40	34	36 9,87
40	41 57,79	8	10 4,54	36	38 9,98
42	43 57,95	10	12 4,67	38	40 10,09
44	45 58,12	12	14 4,81	40	42 10,19
46	47 58,29	14	16 4,95	42	44 10,30
48	49 58,45	16	18 5,08	44	46 10,41
50	51 58,62	18	20 5,22	46	48 10,52
52	53 58,78	20	22 5,35	48	50 10,62
54	55 58,95	22	24 5,49	50	52 10,73
56	57 59,11	24	26 5,62	52	54 10,83
58	59 59,27	26	28 5,75	54	56 10,93
52 0	52 1 59,44	28	30 5,89	56	58 11,03

Geographische Breite.		Geographische Breite.		Geographische Breite.	
Kugel.	Ellipsoïd.	Kugel.	Ellipsoïd.	Kugel.	Ellipsoïd
54° 58′	55° 0′ 11″,14	56° 12′	56° 14′ 14″,45	57° 26′	57° 28′ 16″,88
55 0	2 11,24	14	16 14,53	28	30 16,93
2	4 11,34	16	18 14,61	30	32 16,99
4	6 11,44	18	20 14,68	32	34 17,04
6	8 11,54	20	22 14,76	34	36 17,09
8	10 11,64	22	24 14,83	36	38 17,14
10	12 11,74	24	26 14,91	38	40 17,19
12	14 11,83	26	28 14,98	40	42 17,24
14	16 11,93	28	30 15,05	42	44 17,29
16	18 12,03	30	32 15,12	44	46 17,34
18	20 12,12	32	34 15,20	46	48 17,39
20	22 12,21	34	36 15,27	48	50 17,44
22	24 12,31	36	38 15,34	50	52 17,48
24	26 12,41	38	40 15,41	52	54 17,53
26	28 12,50	40	42 15,48	54	56 17,57
28	30 12,59	42	44 15,54	56	58 17,62
30	32 12,68	44	46 15,61	58	58 0 17,66
32	34 12,77	46	48 15,68	58 0	2 17,71
34	36 12,86	48	50 15,74	2	4 17,75
36	38 12,95	50	52 15,81	4	6 17,79
38	40 13,04	52	54 15,87	6	8 17,83
40	42 13,13	54	56 15,94	8	10 17,87
42	44 13,22	56	58 16,00	10	12 17,89
44	46 13,30	58	57 0 16,07	12	14 17,95
46	48 13,39	57 0	2 16,13	14	16 17,99
48	50 13,48	2	4 16,19	16	18 18,03
50	52 13,56	4	6 16,25	18	20 18,07
52	54 13,65	6	8 16,31	20	22 18,11
54	56 13,73	8	10 16,37	22	24 18,14
56	58 13,81	10	12 16,43	24	26 18,18
58	56 0 13,89	12	14 16,49	26	28 18,21
56 0	2 13,97	14	16 16,55	28	30 18,25
2	4 14,06	16	18 16,60	30	32 18,28
4	6 14,14	18	20 16,66	32	34 18,31
6	8 14,22	20	22 16,72	34	36 18,35
8	10 14,30	22	24 16,77	36	38 18,38
10	12 14,37	24	26 16,83	38	40 18,41
				40	42 18,44

Tafel Nr. XII.

Mittlere astronomische Refraction nach Bessel.

Scheinbare Höhe	Refraction.		Scheinbare Höhe.	Refraction.		Scheinbare Höhe.	Refraction.	
0° 0′	34′ 54″,1	124″,9	6° 40′	7′ 39″,2	10″,0	13° 20′	3′ 58″,8	2″,9
10	32 49,2	116,9	50	7 29,2	9,5	30	3 55,9	2,9
20	30 52,3	108,8	7 0	7 19,7	9,2	40	3 53,0	2,8
30	29 3,5	100,8	10	7 10,5	8,8	50	3 50,2	2,8
40	27 22,7	92,9	20	7 1,7	8,4	14 0	3 47,4	5,3
50	25 49,8	85,2	30	6 53,3	8,2	20	3 42,1	5,1
1 0	24 24,6	77,9	40	6 45,1	7,9	40	3 37,0	4,9
10	23 6,7	71,1	50	6 37,2	7,6	15 0	3 32,1	4,7
20	21 55,6	64,7	8 0	6 29,6	7,3	20	3 27,4	4,5
30	20 50,9	59,0	10	6 22,3	7,1	40	3 22,9	4,3
40	19 51,9	53,9	20	6 15,2	6,8	16 0	3 18,6	4,1
50	18 58,0	49,4	30	6 8,4	6,6	20	3 14,5	4,0
2 0	18 8,6	45,6	40	6 1,8	6,4	40	3 10,5	3,9
10	17 23,0	42,3	50	5 55,4	6,1	17 0	3 6,6	3,7
20	16 40,7	39,8	9 0	5 49,3	6,0	20	3 2,9	3,6
30	16 0,9	37,5	10	5 43,3	5,7	40	2 59,3	3,5
40	15 23,4	35,6	20	5 37,6	5,6	18 0	2 55,8	3,3
50	14 47,8	33,2	30	5 32,0	5,5	20	2 52,5	3,2
3 0	14 14,6	30,9	40	5 26,5	5,2	40	2 49,3	3,2
10	13 43,7	28,7	50	5 21,3	5,1	19 0	2 46,1	3,0
20	13 15,0	26,7	10 0	5 16,2	5,0	20	2 43,1	2,9
30	12 48,3	24,6	10	5 11,2	4,8	40	2 40,2	2,9
40	12 23,7	23,0	20	5 6,4	4,7	20 0	2 37,3	2,8
50	12 0,7	21,8	30	5 1,7	4,5	20	2 34,5	2,6
4 0	11 38,9	20,6	40	4 57,2	4,4	40	2 31,9	2,6
10	11 18,3	19,7	50	4 52,8	4,3	21 0	2 29,3	2,5
20	10 58,6	19,0	11 0	4 48,5	4,2	20	2 26,8	2,5
30	10 39,6	18,4	10	4 44,3	4,1	40	2 24,3	2,4
40	10 21,2	17,9	20	4 40,2	3,9	22 0	2 21,9	2,3
50	10 3,3	16,8	30	4 36,3	3,9	20	2 19,6	2,2
5 0	9 46,5	15,6	40	4 32,4	3,7	40	2 17,4	2,2
10	9 30,9	14,9	50	4 28,7	3,7	23 0	2 15,2	2,2
20	9 16,0	14,1	12 0	4 25,0	3,6	20	2 13,0	2,1
30	9 1,9	13,5	10	4 21,4	3,4	40	2 10,9	2,0
40	8 48,4	12,8	20	4 18,0	3,4	24 0	2 8,9	1,9
50	8 35,6	12,3	30	4 14,6	3,3	20	2 7,0	1,9
6 0	8 23,3	11,7	40	4 11,3	3,2	40	2 5,1	1,9
10	8 11,6	11,3	50	4 8,1	3,2	25 0	2 3,2	1,8
20	8 0,3	10,8	13 0	4 4,9	3,1	20	2 1,4	1,8
30	7 49,5	10,3	10	4 1,8	3,0	40	1 59,6	1,8

Scheinbare Höhe	Refraction.		Scheinbare Höhe.	Refraction.		Scheinbare Höhe.	Refraction.	
26° 0′	1′ 57″,8	1″,7	37° 0′	1′ 16″,5	0″,9	58°	36″,1	1″,4
20	1 56,1	1,7	20	1 15,6	0,9	59	34,7	1,4
40	1 54,4	1,6	40	1 14,7	0,9	60	33,3	1,3
27 0	1 52,8	1,6	38 0	1 13,8	0,9	61	32,0	1,3
20	1 51,2	1,5	20	1 12,9	0,9	62	30,7	1,3
40	1 49,7	1,5	40	1 12,0	0,8	63	29,4	1,2
28 0	1 48,2	1,5	39 0	1 11,2	0,9	64	28,2	1,3
20	1 46,7	1,4	20	1 10,3	0,8	65	26,9	1,2
40	1 45,3	1,5	40	1 9,5	0,8	66	25,7	1,2
29 0	1 43,8	1,4	40 0	1 8,7	0,8	67	24,5	1,2
20	1 42,4	1,4	20	1 7,9	0,8	68	23,3	1,1
40	1 41,0	1,3	40	1 7,1	0,8	69	22,2	1,2
30 0	1 39,7	1,3	41 0	1 6,3	0,8	70	21,0	1,1
20	1 38,4	1,3	20	1 5,5	0,8	71	19,9	1,1
40	1 37,1	1,3	40	1 4,7	0,7	72	18,8	1,1
31 0	1 35,8	1,3	42 0	1 4,0		73	17,7	1,1
20	1 34,5	1,2				74	16,6	1,1
40	1 33,3	1,2	42°	64″,0	2″,2	75	15,5	1,0
32 0	1 32,1	1,2	43	61,8	2,1	76	14,5	1,1
20	1 30,9	1,1	44	59,7	2,0	77	13,4	1,1
40	1 29,8	1,1	45	57,7	2,0	78	12,3	1,1
33 0	1 28,7	1,1	46	55,7	1,9	79	11,2	1,0
20	1 27,6	1,1	47	53,8	1,9	80	10,2	1,1
40	1 26,5	1,1	48	51,9	1,7	81	9,1	1,0
34 0	1 25,4	1,1	49	50,2	1,8	82	8,1	1,0
20	1 24,3	1,0	50	48,4	1,7	83	7,1	1,0
40	1 23,3	1,0	51	46,7	1,6	84	6,1	1,0
35 0	1 22,3	1,0	52	45,1	1,6	85	5,1	1,0
20	1 21,3	1,0	53	43,5	1,6	86	4,1	1,0
40	1 20,3	1,0	54	41,9	1,5	87	3,1	1,0
36 0	1 19,3	1,0	55	40,4	1,5	88	2,1	1,0
20	1 18,3	0,9	56	38,9	1,4	89	1,1	
40	1 17,4	0,9	57	37,5	1,4	90	0,0	

Tafel Nr. XIII.

Längen der Parallelgrade in geographischen Meilen.

Geogr. Breite.	Länge des Parallelgrads.	Geogr. Breite.	Länge des Parallelgrads.	Geogr. Breite.	Länge des Parallelgrads.	Geogr. Breite.	Länge des Parallelgrads.
0°	15,000	2°	14,990	4°	14,963	6°	14,918
30′	14,999	30′	14,986	30′	14,954	30′	14,904
1	14,998	3	14,979	5	14,944	7	14,888
30	14,994	30	14,972	30	14,931	30	14,871

Geogr. Breite.	Länge des Parallelgrads.	Geogr. Breite.	Länge des Parallelgrads.	Geogr. Breite	Länge des Parallelgrads.	Geogr. Breite.	Länge des Parallelgrads.
8°	14,853	28° 30′	13,182	49°	9,841	69° 30′	5,253
30′	14,835	29	13,119	30′	9,742	70	5,130
9	14,815	30	13,055	50	9,642	30	5,007
30	14,794	30	12,990	30	9,541	71	4,884
10	14,771	30	12,924	51	9,440	30	4,759
30	14,748	31	12,857	30	9,338	72	4,636
11	14,724	30	12,789	52	9,234	30	4,522
30	14,698	32	12,721	30	9,131	73	4,385
12	14,672	30	12,651	53	9,027	30	4,260
30	14,644	33	12,580	30	8,922	74	4,134
13	14,615	30	12,508	54	8,817	30	4,008
30	14,585	34	12,436	30	8,699	75	3,882
14	14,554	30	12,362	55	8,604	30	3,756
30	14,522	35	12,287	30	8,496	76	3,629
15	14,488	30	12,212	56	8,388	30	3,502
30	14,454	36	12,153	30	8,279	77	3,374
16	14,418	30	12,058	57	8,169	30	3,247
30	14,382	37	11,980	30	8,059	78	3,119
17	14,344	30	11,900	58	7,949	30	2,990
30	14,305	38	11,820	30	7,837	79	2,862
18	14,265	30	11,739	59	7,726	30	2,733
30	14,224	39	11,657	30	7,613	80	2,605
19	14,182	30	11,574	60	7,500	30	2,476
30	14,139	40	11,491	30	7,386	81	2,346
20	14,095	30	11,406	61	7 272	30	2,217
30	14,050	41	11,321	30	7,157	82	2,088
21	14,006	30	11,234	62	7,042	30	1,958
30	13,956	42	11,147	30	6,926	83	1,828
22	13,907	30	11,059	63	6,810	30	1,698
30	13,858	43	10,970	30	6,693	84	1,568
23	13,807	30	10,881	64	6,575	30	1,438
30	13,755	44	10,790	30	6,458	85	1,307
24	13,703	30	10,699	65	6,339	30	1,177
30	13,649	45	10,607	30	6,220	86	1,046
25	13,605	30	10,514	66	6,101	30	0,916
30	13 538	46	10,419	30	5,981	87	0,785
26	13,482	30	10,325	67	5,861	30	0,654
30	13,424	47	10,230	30	5,740	88	0,523
27	13,365	30	10,134	68	5,619	30	0,393
30	13,305	48	10,037	30	5,497	89	0,262
28	13,244	30	9,939	69	5,375	30	0,131
						90	0,000

Tafel Nr. XIV.

Halbmesser der Parallelkreise in konischen Kartennetzen.

Geogr. Breite.	Halbmesser in geog. Meilen.	Geogr. Breite.	Halbmesser in geog. Meilen.	Geogr. Breite.	Halbmesser in geog. Meilen.	Geogr. Breite.	Halbmesser in geog. Meilen.
5°	9823,4	24°	1930,3	43°	921,6	62°	457,0
30′	8925,6	30′	1885,9	30′	905,6	30′	447,4
6	8177,0	25	1843,0	44	989,9	63	437,9
30	7543,2	30	1801,8	30	874,6	30	428,5
7	6999,6	26	1762,1	45	859,4	64	419,2
30	6528,1	30	1723,8	30	844,6	30	409,9
8	6115,2	27	1686,7	46	829,9	65	400,8
30	5750,6	30	1651,0	30	815,6	30	391,7
9	5426,3	28	1616,4	47	801,4	66	382,6
30	5135,8	30	1582,9	30	787,5	30	373,7
10	4874,1	29	1550,5	48	773,8	67	364,8
30	4637,1	30	1519,0	30	760,4	30	356,0
11	4421,4	30	1488,6	49	747,1	68	347,2
30	4224,3	30	1459,0	30	734,0	30	338,5
12	4043,3	31	1430,3	50	721,2	69	329,9
30	3876,7	30	1402,5	30	708,5	30	321,3
13	3722,6	32	1375,4	51	696,0	70	312,8
30	3579,8	30	1349,0	30	683,6	30	304,3
14	3447,0	33	1323,4	52	671,5	71	295,9
30	3323,2	30	1298,5	30	659,5	30	287,6
15	3207,5	34	1274,2	53	647,6	72	279,2
30	3099,0	30	1250,5	30	635,9	30	271,0
16	2997,2	35	1227,4	54	624,4	73	262,8
30	2901,4	30	1204,9	30	613,0	30	254,5
17	2811,1	36	1182,9	55	601,8	74	246,4
30	2725,8	30	1161,5	30	590,7	30	238,3
18	2645,1	37	1140,5	56	579,7	75	230,2
30	2568,6	30	1120,0	30	568,8	30	222,2
19	2496,0	38	1100,0	57	558,1	76	214,3
30	2427,0	30	1080,5	30	547,5	30	206,3
20	2361,3	39	1061,3	58	537,0	77	198,4
30	2298,7	30	1342,6	30	526,7	30	190,5
21	2238,9	40	1024,2	59	516,4	78	182,7
30	2181,8	30	1006,3	30	506,2	30	174,9
22	2127,2	41	988,7	60	496,2	79	167,0
30	2074,9	30	971,4	30	486,2	30	159,3
23	2024,7	42	954,5	61	476,5	80	151,5
30	1976,6	30	937,9	30	466,6	30	143,5

Tafel Nr. XV.

Gattung und Höhe der Schrift für Plan- und Karten-Objecte.

Gegenstände.	1/5000		1/10000		1/20000	1/50000	1/100000	1/200000	
	Schrift.	Höhe.	Schrift.	Höhe.	Höhe.	Höhe.	Höhe.	Schrift.	Höhe.
		'''		'''	'''	'''	'''		'''
Abtei	S. R	1,1	S. R	0,7	0,5	0,4	0,3	L. R	0,3
Anlage	L. R	0,8	L. R	0,5	0,4	0,3	0,2	—	—
Allee	T. C	0,7	T. C	0,5	0,3	0,3	0,2	—	—
Abhang des Gebirges	L. R	1,0	L. R	0,7	0,5	0,4	0,3	—	—
Bahnhof	L. R	0,6	L. R	0,4	0,3	0,3	0,2	T. C	0,2
Baum, ausgezeichneter, isolirter	T. C	0,4	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Bad, grosses	L. R	2,0	S. R	1,3	1,0	0,8	0,6	T. C	0,5
„ kleines	S. R	1,0	L. R	0,7	0,5	0,4	0,3	—	—
Batterie	T. C	0,5	T. C	0,2	0,2	0,2	0,2	—	—
Benennungen von Feld, Wiesen, Reben etc.	L. R	1,0	L. R	0,6	0,5	0,4	0,3	—	—
Bergwerke	T. C	0,4	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Berg, grosser	L. R	1,3	L. R	0,9	0,7	0,5	0,3	T. C	0,3
Bemerkungen	T. C	0 4	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Brücken, grosse	L. R	0,6	S. R	0,4	0,3	0,2	0,2	T. C	0,2
„ kleine	T. C	0,4	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Brunnen	T. C	0,3	T. C	0,2	0,2	0,2	0,2	—	—
Bach, grosser	S. R	0,7	S. R	0,5	0,4	0,3	0,3	—	—
„ kleiner	L. R	0,5	L. R	0,4	0,3	0,3	0,3	—	—
Canal	S. R	1,0	S. R	0,8	0,6	0,5	0,3	—	—
Capelle	T. C	0,5	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Chaussee	S. R	0,8	S. R	0,6	0,5	0,4	0,3	—	—
Damm, grosser	S. R	0,6	S. R	0,5	0,4	0,3	0,2	T. C	0,2
„ kleiner	T. C	0,3	T. C	0,2	0,2	0,2	0,2	—	—
Dorf über 400 Einwohner	S. R	2,0	S. R	1,3	1,0	0,8	0,5	T. C	0,4
„ unter 400 Einwohner	S. R	1,5	S. R	1,0	0,7	0,6	0,4	T. C	0,3
Eisenbahn	S. R	0,8	S. R	0,6	0,5	0,4	0,3	T. C	0,2
Eisenhammer, grosser	S. R	1,0	S. R	0,7	0,5	0,4	0,3	T. C	0,2
„ kleiner	S. R	0,7	S. R	0,5	0,3	0,3	0,2	T. C	0,2
Eiskeller	T. C	0,3	T. C	0,2	0,2	0,2	0,2	—	—
Engpass	T. C	0,5	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Ebene, grosse	L. K	2,5	L. K	1,7	0,2	1,0	0,7	L. K	0,7
„ gewöhnliche	S. R	2,0	S. R	1,3	1,0	0,8	0,5	L. R	0,5
Fahrt	T. C	0,5	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	T. C	0,2
Flecken oder Marktflecken	L. K	2,5	L. K	1,7	1,3	1,0	0,7	L. K	0,6
Fabrik	T. C	0,5	T. C	0,2	0,2	0,2	0,2	T. C	0,2

Gegenstände	1/5000		1/10000		1/20000	1/50000	1/100000	1/200000	
	Schrift	Höhe.	Schrift	Höhe.	Höhe.	Höhe	Höhe.	Schrift.	Höhe.
		'''		'''	'''	'''	'''		'''
Fluss, grosser	L. K	2,0	L. K	1,3	1,0	0,8	0,5	S. R	0,4
„ kleiner	S. R	1,0	S. R	0,7	0,5	0,4	0,3	T. C	0,2
Fussweg	T. C	0,4	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Garten	T. C	0,3	T. C	0,2	0,2	0,2	0,2	—	—
Gebirgskette	L. K	2,0	L. K	2,0	1,5	0,2	0,8	S. R	0,7
Glashütte	L. R	0,7	L. R	0,5	0,3	0,3	0 2	L. R	0,2
Graben	T. C	0,3	T. C	0,2	0,2	0,2	0,2	T. C	0,2
Grenzen	L. R	0,7	L. R	0,5	0,5	0,4	0,3	—	—
Grenzstein	T. C	0,4	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Haide	L. R	1,3	L. R	0,9	0,7	0,5	0,3	T. C	0,3
Häuser, einzelne	T. C	0,5	T. C	0,3	0,3	0,2	0,2	T. C	0,2
Höhle	T. C	0,4	T. C	0,3	0,2	0,2	0 2	—	—
Hof	L. R	0,6	L. R	0,4	0,3	0,2	0,2	—	—
Hügel, einzelner	T. C	0,5	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Hütte	T. C	0,3	T. C	0,2	0,2	0,2	0,2	—	—
Insel, grosse	L. R	1,3	L. R	0,9	0 7	0,5	0,3	L. R	0 3
„ kleine	L. R	0,7	L. R	0,5	0,3	0 3	0,2	L. R	0,2
Kirche	S. R	0 7	S. R	0,5	0,3	0,3	0,2	T. C	0,2
Kloster	L. R	1,0	L. R	0,7	0,5	0,4	0,3	—	—
Kreuz	T. C	0,3	T. C	0,2	0,2	0,2	0,2	—	—
Lache	T. C	0,5	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Lager	S. R	1,3	S. R	0,9	0,7	0,5	0,3	T. C	0,3
Magazin	T. C	0,4	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	T. C	0,2
Massstab	L. K	0,9	S. R	0,6	0,6	0,6	0,6	S. R	0,6
Mineralquelle	L. R	0,7	T. C	0.5	0,3	0,3	0,2	T. C	0,2
Monument, einzeln stehendes	S. R	0,6	S. R	0,4	0,3	0,2	0,2	S. R	0,2
Mühle	T. C	0,4	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	T. C	0,2
Obstgarten	T. C	0,4	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	T. C	0 2
Pfarrhof	S. R	1,0	S. R	0,8	0,6	0,5	0,4	T. C	0,4
Quelle eines Baches	S. R	0,7	S. R	0,5	0,3	0,2	0,2	T. C	0,2
Redoute	S. R	0,5	S. R	0.3	0,2	0,2	0,2	—	—
Sandbank	L. R	1,0	L. R	0,8	0,6	0,5	0,4	T. C	0,3
Sandgrube	T. C	0,4	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Schenke	T. C	0,5	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Steinbruch	T. C	0,3	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Schloss	S. R	1,0	S. R	0,7	0,5	0,4	0,3	T. C	0,2
Schleuse	T. C	0,4	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
See, grosser	L. K	2,0	L. K	1,3	1,0	0,8	0,5	T. C	0,3
„ kleiner (auf Bergen)	S. R	0,6	S. R	0,4	0,3	0,2	0,2	T. C	0,2
Sumpf	L. R	1,0	L. R	0.8	0,6	0,5	0,4	T. C	0,3
Saline, grosse	L. R	1,0	L. R	0,7	0,5	0,4	0,3	T. C	0,2
„ kleine	T. C	0,5	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—

Gegenstände	1/5000 Schrift	1/5000 Höhe	1/10000 Schrift	1/10000 Höhe	1/20000 Höhe	1/50000 Höhe	1/100000 Höhe	1/200000 Schrift	1/200000 Höhe
		'''		'''	'''	'''	'''		
Sägmühle	T. C	0,4	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Stadt über 5000 Einw.	S. K	4,0	S. K	2,7	2,0	1,6	1,1	S. K	0,9
„ unter 5000 Einw.	S. K	3,0	S. K	2,0	1,5	1,2	0,8	L. K	0,7
Signal, grosses	T. C	0,8	T. C	0,5	0,4	0,3	0,2	—	—
„ kleines	T. C	0,3	T. C	0,2	0,2	0,2	0,2	—	—
Thurm	T. C	0,5	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Thal	L. K	3,0	L. K	2,5	2,0	1,5	1,0	—	—
Vorstadt	L. K	2,0	L. K	1,3	1,0	0,8	0 5	S. R	0,4
Wald, grosser	L. K	2,0	L. K	1,3	1,0	0,8	0,5	—	—
„ gewöhnlicher	L. R	1,5	L. K	1,0	1,0	0,8	0,6	L. R	0,5
„ kleiner	L. R	1,0	L. R	0,8	0,6	0,5	0,3	T. C	0,3
Weiher, grosser	L. K	2,0	L. K	1,3	1,0	0,8	0,6	S. R	0,6
„ kleiner	L. R	0 6	T. C	0,4	0,3	0,2	0,2	—	—
Waide	T. C	1,0	T. C	0,7	0,5	0,4	0,3	—	—
Wiesen	L. R	1,0	L. R	0,8	0,6	0,4	0,3	—	—
Wildbach	T. C	0,5	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Wasserwerk, grosses	S. R	1,0	S. R	0,7	0,5	0,4	0,3	—	—
„ kleines	L. R	0,7	L. R	0,5	0,3	0,3	0,2	—	—
Weiler	T. C	1,0	T. C	0,7	0,5	0,4	0,3	—	—
Weg	T. C	0,6	T. C	0,4	0,3	0,2	0,2	—	—
Zugrippung	T. C	0,5	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Zollstätte	T. C	0,3	T. C	0,2	0,2	0,2	0,2	—	—
Ziegelhütte	T. C	0,3	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—

